

ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ

В. И. ТАРАКАНОВ

(Томск)

При импульсном сжатии стержня в зависимости от времени нагружения стержень может выдерживать значительно большую нагрузку (не теряя «устойчивости»), чем при статическом нагружении. Оценка «устойчивости» при импульсном нагружении имеет свою специфику, которая заключается в выборе критерия устойчивости в зависимости от режима работы конструкции и в прямой зависимости «устойчивости» от технологических допусков на изготовление изделия.

Вопросы устойчивости стержней при импульсном нагружении рассматривались в [1—7].

Следует заметить, что численное решение задач о потере устойчивости при импульсном нагружении [2, 3] сталкивается с проблемой, которая молчаливо обходится, но которая при расчете реальных конструкций всегда существует. Эта проблема связана с фиксированием начальных отклонений стержня, хотя фактически начальное отклонение является случайной величиной, для которой на практике может лишь задаваться некоторое ограничение — технологический допуск.

В работах, где используются аналитические методы, эта проблема также не нашла определенного решения. В [1, 6, 7] нет зависимости критических усилий от технологических допусков.

В данной работе при некоторой частной постановке задачи дается оценка снизу для критического усилия при импульсном нагружении. Эта оценка прямо связана с технологическим допуском на изделие. При этом, хотя начальный прогиб стержня — величина случайная и величина критической силы должна носить статистический характер, оказывается возможным получить детерминированную оценку снизу для критического усилия.

1. Рассматривается задача об устойчивости шарнирно-закрепленного стержня длиной l , сжатого импульсной нагрузкой, которая до некоторого момента времени t_0 постоянна, а затем снимается.

Стержень имеет начальный прогиб $U(x)$. Предполагается, что нагрузка N_0 превышает критическую эйлерову нагрузку, а время t_0 значительно больше времени распространения продольных волн по стержню.

В такой постановке задача сводится к рассмотрению известного уравнения поперечных колебаний стержня

$$(1.1) \quad EJW_{,xxxx} + \rho SW_{,tt} + NW_{,xx} + NU_{,xx} = 0,$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < \infty;$$

$$(1.2) \quad W = 0, \quad W_{,t} = 0, \quad t = 0;$$

$$(1.3) \quad W = 0, \quad W_{,xx} = 0, \quad x = 0, \quad x = l;$$

$$(1.4) \quad N = \begin{cases} N_0, & 0 < t < t_0, \\ 0, & t_0 < t < \infty, \end{cases}$$

где $U(x)$ — случайная функция, описывающая начальное отклонение стержня от прямолинейного (связанное с технологией изготовления), на которую накладывается ограничение

$$(1.5) \quad |U(x)| \leq \epsilon_0, \quad \epsilon_0 > 0.$$

Величина ϵ_0 , определяющая технологический допуск на изделие, является заданной. В уравнении (1.1) E, J, ρ, S — модуль упругости, момент инерции, плотность материала, площадь сечения стержня соответственно.

При переходе к безразмерным переменным и параметрам уравнение (1.1) с условиями (1.2)—(1.4) представляется в форме

$$(1.6) \quad W_{,\xi\xi\xi\xi} + a^2 W_{,\tau\tau} + b^2 W_{,\xi\xi} + b^2 U_{,\xi\xi} = 0,$$

$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < \infty;$$

$$(1.7) \quad W = W_{,\tau} = 0, \quad \tau = 0; \quad W = W_{,\xi\xi} = 0, \quad \xi = 0, \quad \xi = 1;$$

$$\xi = x/l, \quad \tau = tE^{1/2}l^{-1}\rho^{-1/2}, \quad a^2 = sl^2J^{-1};$$

$$(1.8) \quad b^2 = \begin{cases} \eta\pi^2, & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & \tau_0 < \tau < \infty, \end{cases}$$

$$\eta = N_0/N_c, \quad \tau_0 = t_0E^{1/2}l^{-1}\rho^{-1/2},$$

где $N_e = \pi^2 l^2 EJ$ — эйлера критическая нагрузка. В качестве одного из возможных критериев устойчивости берется критерий, связанный с ограничением на боковое смещение стержня:

$$\max |W(U, \tau, \eta)| \leq W_0, |U(x)| < \varepsilon_0, 0 < \tau < \infty, \\ W_0 \gg \varepsilon_0 > 0.$$

При этом значении η , для которого выполняется строгое неравенство, считается докритическим, а значение η^* , для которого выполняется равенство, — критическим.

2. При разложении функции $U(x)$ в ряд Фурье по функциям $\sin k\pi\xi$ на промежутке $0 < \xi < 1$

$$(2.1) \quad U = \sum_1^{\infty} C_k \sin k\pi\xi, \quad C_k = 2 \int_0^1 U(\xi) \sin k\pi\xi d\xi.$$

Из (1.5), (2.1) для коэффициентов C_k , которые являются случайными величинами, получается оценка

$$(2.2) \quad |C_k| \leq 2 \int_0^1 |U(\xi)| |\sin k\pi\xi| d\xi \leq 2\varepsilon_0.$$

Решение уравнения (1.6) ищется в виде ряда

$$(2.3) \quad W = \sum_1^{\infty} C_k T_k(\tau) \sin k\pi\xi;$$

$$(2.4) \quad T_k(0) = T_{k,\tau}(0) = 0.$$

Начальные и краевые условия (1.7) удовлетворяются при выборе решения в виде (2.3), (2.4).

При подстановке (2.3) в уравнение (1.6) для каждой функции $T_k(\tau)$ имеет место уравнение

$$(2.5) \quad T_{k,\tau\tau} + (k\pi)^2 a^{-2} [(k\pi)^2 - b^2] T_k - (k\pi)^2 b^2 a^{-2} = 0.$$

Из анализа уравнения (2.5) следует, что при фиксированном значении N_0 существует конечное число значений $k \leq m_0$, когда выполняется условие

$$(2.6) \quad \kappa = (k\pi)^2 - b^2 < 0,$$

которому удовлетворяет величина

$$(2.7) \quad m_0 = [\sqrt{\eta}].$$

Условие (2.6) обозначает, что, кроме колебательных движений, соответствующих $\kappa > 0$, существуют движения с экспоненциальным ростом амплитуды при $1 \leq k \leq m_0$, которые и вызывают в основном искривление стержня, т. е. в смещении

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(\tau) \sin k\pi\xi = \sum_{k=1}^{m_0} C_k T_k(\tau) \sin k\pi\xi + \sum_{m_0+1}^{\infty} C_k T_k(\tau) \sin k\pi\xi$$

можно пренебречь второй суммой, которая мала по сравнению с первой, имеющей неограниченно возрастающие члены:

$$(2.8) \quad W \approx \sum_{k=1}^{m_0} C_k T_k(\tau) \sin k\pi\xi.$$

Такое разделение смещений характерно для работ по исследованию устойчивости при импульсном нагружении [1, 6, 7], причем в некоторых из них дополнительно выделяются и сохраняются всего лишь несколько основных членов суммы (2.8).

Решение уравнения (2.5) с начальным условием (2.4) ищется в классе непрерывных функций, имеющих первые непрерывные производные, что означает отсутствие скачкообразных изменений смещения и скорости смещения. С учетом этого замечания и разрыва функции $b(\tau)$ решение (2.5) для $k \leq m_0$ имеет вид

$$T_k(\tau) = -b_k a_k^{-2} [1 - \operatorname{ch} a_k \tau], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ T_k(\tau) = -A_1 \cos c_k \tau - A_2 \sin c_k \tau, \quad \tau_0 < \tau < \infty, \\ a_k = k\pi a^{-1} [b^2 - (k\pi)^2]^{1/2}, \quad b_k = (k\pi)^2 b^2 a^{-2}, \quad c_k = k^2 \pi^2 a^{-1}, \\ A_1 = b_k a_k^{-2} [1 - \operatorname{ch} a_k \tau_0] \cos c_k \tau_0 + b_k a_k^{-1} c_k^{-1} \operatorname{sh} a_k \tau_0 \sin c_k \tau_0, \\ A_2 = b_k a_k^{-2} [1 - \operatorname{ch} a_k \tau_0] \sin c_k \tau_0 - b_k a_k^{-1} c_k^{-1} \operatorname{sh} a_k \tau_0 \cos c_k \tau_0.$$

При этом для функций $T_k(\tau)$ получается оценка

$$(2.9) \quad \max_{0 < \tau < \infty} |T_k(\tau)| = \max_{\tau_0 < \tau < \infty} |T_k(\tau)| \leq |A_1| + |A_2| \leq F_k(\tau_0, \eta, a) = \\ = 2b_k a_k^{-2} [\operatorname{ch} a_k \tau_0 - 1] + 2b_k a_k^{-1} c_k^{-1} \operatorname{sh} a_k \tau_0.$$

Функция $F_k(\tau_0, \eta, a)$ как функция параметра η монотонно возрастающая, так как монотонно возрастают сомножители

$$b_k(\eta), \quad a_k^{-2} [\operatorname{ch} a_k \tau_0 - 1], \quad a_k^{-1} \operatorname{sh} a_k \tau_0,$$

а при $\eta = 1$ $F_k = 0$.

Для основного решения (2.8) с учетом неравенств (2.2), (2.9) найдем оценку

$$(2.10) \quad \max |W(U, \tau, \eta)| \leq 2\varepsilon_0 \sum_1^{m_0} F_k(\eta), \quad |U| \leq \varepsilon_0, \quad 0 < \tau < \infty.$$

Функция $\sum_{k=1}^{m_0} F_k(\eta)$ также монотонно возрастающая при $\eta > 1$ и равна нулю при $\eta = 1$.

Учитывая это, а также неравенство (2.10), в качестве оценки снизу для критического усилия можно взять решение η_*^0 следующего уравнения:

$$(2.11) \quad F(\eta_*^0) = 2 \sum_{k=1}^{m_0} F_k(\eta_*^0) = W_0/\varepsilon_0.$$

Решение уравнения (2.11) всегда существует при $\eta > 1$ в силу перечисленных свойств левой части равенства (2.11), причем это решение в самом деле является оценкой снизу для критического усилия.

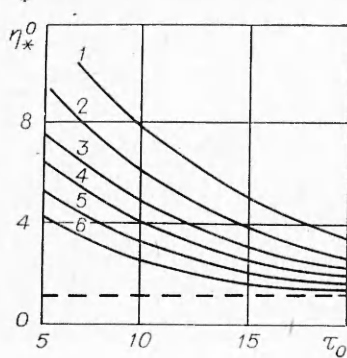
Действительно, для всех $\eta < \eta_*^0 = N_*^0/N_e$ в силу монотонного возрастания $F(\eta) < W_0/\varepsilon_0$. Тогда с учетом неравенства (2.10)

$$\max |W(U, \tau, \eta)| \leq W_0, \quad |U| \leq \varepsilon_0, \quad 0 < \tau < \infty,$$

и в силу определения эти значения η являются докритическими, т. е. критическое усилие η_* в полосу $1 \leq \eta \leq \eta_*^0$ не попадает, значит, $\eta_* > \eta_*^0$.

На основе уравнения (2.11) построена зависимость нижней оценки для критического усилия $\eta_*^0 = N_*^0/N_e$, приведенная на фигуре, от безразмерного времени действия импульса τ_0 для различных значений параметров a , $\sigma = W_0/\varepsilon_0$. Кривые 1—6 соответствуют $a = 100; 100; 50; 50; 50; 50$, $\sigma = 400; 200; 400; 200; 100; 20$.

Из фигуры видно, что при достаточно большом времени действия импульса τ_0 $\eta_*^0 \rightarrow 1$. При небольших временах величина η_*^0 значительно больше единицы, т. е.



найденная оценка не является тривиальной, совпадающей с критическим усилием при статическом нагружении N_e , а значительно больше этого усилия, что позволяет получить существенно более высокое допустимое усилие сжатия при импульсном нагружении, чем при статическом, и этим самым выявить значительные резервы работоспособности конструкции. Следует указать границы параметров, при приближении к которым полученные результаты становятся малодостоверными.

При $\tau_* < 2 - 3$ результаты могут оказаться неверными из-за неучета конечной скорости распространения усилия сжатия по стержню.

При $W_0/\varepsilon_0 < 10$ результаты становятся малодостоверными из-за представления (2.8) и пренебрежения остальной частью суммы. С другой стороны, при больших значениях W_0 результаты становятся неверными из-за того, что рассматривается линейное уравнение изгиба стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. — ДАН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С., Кильдебек И. Г. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе. — ДАН СССР, 1966, т. 167, № 4.
3. Гордиенко Б. А. Выпучивание стержней при ударном нагружении. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.

4. Гордиенко Б. А. Ударное выпучивание упругих систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
5. Малый В. И., Ефимов А. Б. Потеря устойчивости стержня при продольном ударе.— ДАН СССР, 1972, т. 202, № 4.
6. Корнев В. М. Асимптотический анализ поведения упругих стержней при аперiodическом интенсивном нагружении.— ПМТФ, 1972, № 3.
7. Корнев В. М. Развитие динамических форм потери устойчивости упругих систем при интенсивном нагружении на конечном отрезке времени.— ПМТФ, 1972, № 4.

Поступила 25/1 1984 г.

УДК 539.375.6:539.377

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ИЗНОСА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

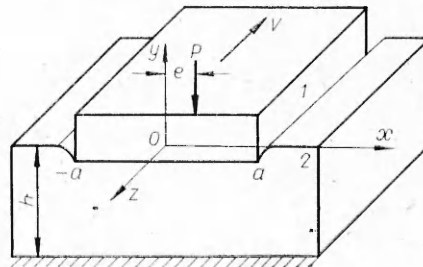
В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО

(Москва)

1. Пусть в упругий (G, ν) шероховатый слой большой толщины h вдавливается массивный цилиндрический штамп, к каждой единице длины которого с эксцентриситетом e приложено усилие P , постоянное во времени. Штамп движется с постоянной скоростью V вдоль своей образующей, причем будем считать, что область контакта его со слоем имеет ширину $2a(ha^{-1} \gg 1)$ и не меняется с течением времени (см. фигуру). При этом происходит изнашивание поверхности слоя, сопровождающееся тепловыделением в области контакта. Предположим, что сам штамп не изнашивается. В области контакта возникают кулоновские силы трения [1, 2]

$$(1.1) \quad \tau_{yz} = (k_1 + k_2 T)q,$$

где k_1, k_2 — постоянные; T — температура в области контакта; $q = q(x, t)$ — контактное давление.



Условие контакта тел 1 и 2 запишем в виде

$$(1.2) \quad v_1 + v_2 + v_3 = -[\delta(t) + \alpha(t)x - f(x)] \quad (|x| \leq a),$$

где v_1 — перемещение верхней границы упругого слоя от смятия шероховатостей; v_2 — упругая деформация поверхности слоя; v_3 — перемещение границы $y = 0$ слоя вследствие ее изнашивания; $\delta(t) + \alpha(t)x$ — жесткое перемещение штампа под действием силы P ; $f(x)$ — форма его основания.

Перемещение v_1 примем линейно зависимым [3] от контактного давления q :

$$(1.3) \quad v_1 = -lq$$

(l — постоянная, характеризующая степень шероховатости соприкасающихся тел). Перемещение v_2 имеет вид [4]

$$(1.4) \quad v_2 = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a q(\xi, t) (-\ln|\xi - x| + d) d\xi, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu},$$

где $d = \ln h + a_0$; $a_0 = -0,527$ для $\nu = 0,3$.

Прежде чем приступить к определению перемещения v_3 , отметим следующее обстоятельство. Обозначим через A работу сил трения τ_{yz} на пути скольжения штампа. Тогда очевидно, что она представима в форме

$$(1.5) \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1 = n_1 A, \quad A_2 = n_2 A, \quad n_1 + n_2 = 1,$$

где A_1 — работа сил трения, затраченная на износ поверхности слоя; A_2 — работа сил трения, пошедшая на тепловыделение в области контакта.

С учетом последних соотношений и выражения (1.1) перемещение v_3 запишется в форме [5]

$$(1.6) \quad v_3 = -n_1 V \int_0^i m [T(x, \tau)] [k_1 + k_2 T(x, \tau)] q(x, \tau) d\tau,$$

где m — коэффициент интенсивности износа, являющийся функцией температуры. Таким образом, интегральное уравнение для определения контактного