

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. Боголепов

(Москва)

В [1] построена общая классификационная схема режимов пространственных локальных ламинарных течений и приведены основные работы по изучению пространственных локальных течений.

В настоящей работе рассматривается компенсационный режим течений [2], когда возмущается пристеночная дозвуковая часть пограничного слоя на теле. Разобраны различные случаи течения в возмущенных областях около тонких пространственных неровностей на поверхности тела, численные решения получены в линейном приближении. Показано изменение типа распространения возмущения давления в зависимости от формы неровности и соотношения ее характерных ширины и протяженности.

1. Рассматривается обтекание плоской пластины равномерным потоком вязкого газа при числах Маха $M_\infty^2 - 1 \sim O(1)$, на поверхности которой на расстоянии l от ее передней кромки находится малая пространственная неровность, и больших, но докритических числах Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty = \varepsilon^{-2}$. Строится стационарное решение уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$. В дальнейшем используются только безразмерные переменные, для этого все линейные размеры относятся к l , давление — к $\rho_\infty u_\infty^2$, энтальпия — к u_∞^2 , остальные функции течения — к своим значениям в равномерном набегающем потоке.

Относительно характерных размеров малой неровности предполагается, что ее толщина a меньше характерной толщины пограничного слоя на пластине в этом месте ($a < \delta \sim O(\varepsilon)$), ее протяженности b ($a < b \leq 1$) и ширины c ($a < c$), т. е. изучается обтекание тонких неровностей, расположенных на «дне» пограничного слоя на пластине.

Исследуется компенсационный режим обтекания малых пространственных неровностей [1, 3, 4], когда в основном возмущается только пристеночная дозвуковая сдвиговая часть пограничного слоя на пластине. Анализируется наиболее общий его случай, когда в возмущенной области Σ с характерными размерами $x \sim O(b)$, $y \sim O(a)$ и $z \sim O(c)$, т. е. по порядку величины равными характерным размерам самой неровности, существует вязкость и индуцируются нелинейные возмущения продольной скорости $u - u \sim \Delta u$. Тогда, учитывая, что в пограничном слое справедлива оценка $u \sim O(y/\varepsilon)$, имеем

$$(1.1) \quad a \sim O(\varepsilon b^{1/3}), \quad \varepsilon^{3/2} < a < b, \quad c, \quad u \sim \Delta u \sim O(b^{1/3}).$$

При этом малая неровность индуцирует возмущения напряжения трения и теплового потока по порядку величины, равные самим их значениям в пограничном слое у поверхности пластины.

2. Для неузких неровностей ($b \leq c$) в области Σ из уравнений сохранения продольного и поперечного импульсов и неразрывности при использовании соотношений (1.1) получаются оценки для возмущения давления, поперечной и вертикальной скоростей:

$$(2.1) \quad \Delta p \sim O(b^{2/3}), \quad w \sim O(b^{4/3}/c), \quad v \sim O(\varepsilon/b^{1/3}).$$

Если возмущение давления создается за счет взаимодействия неровности с равномерным набегающим потоком, то $\Delta p \sim O(a/b)$ и, сравнивая это с (2.1), легко найти, что компенсационный режим обтекания неузких неровностей реализуется при

$$(2.2) \quad a \sim O(\varepsilon b^{1/3}), \quad \varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon^{3/4}, \quad b \leq c.$$

Оценки (1.1), (2.1) и (2.2) позволяют ввести в области 3 следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(2.3) \quad x = bx_3, \quad y = \varepsilon b^{1/3} y_3, \quad z = cz_3, \\ u = b^{1/3} u_3 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3}) v_3 + \dots, \quad w = (b^{4/3}/c) w_3 + \dots, \\ \Delta p = b^{2/3} p_3 + \dots, \quad h = h_w + b^{1/3} h_3 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots, \quad \mu = \mu_w + \dots,$$

индекс w относится к величинам в пограничном слое у поверхности пластины в точке, где находится неровность.

Подстановка разложений (2.3) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{3/2} < b \leq c$ показывают, что в первом приближении течение в области 3 описывается уравнениями пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа

$$(2.4) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \left(\frac{h}{c}\right)^2 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} = 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \left(\frac{h}{c}\right)^2 w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) + \\ + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} = \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial h_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial h_3}{\partial y_3} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 w_3 \frac{\partial h_3}{\partial z_3} \right) = \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h_3}{\partial y_3^2}$$

(Pr — число Прандтля). На поверхности неровности $y_3 = f(x_3, z_3)$ должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания

$$(2.5) \quad u_3 = v_3 = w_3 = h_3 = 0 \quad (y_3 = f(x_3, z_3)).$$

Начальные краевые условия при $x_3 \rightarrow -\infty$ или $z_3 \rightarrow \pm \infty$ находятся из сращивания решения в области 3 с пристеночной частью пограничного слоя на пластине:

$$(2.6) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad h_3 \rightarrow By_3, \quad v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty);$$

$$(2.7) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad h_3 \rightarrow By_3, \quad v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (z_3 \rightarrow \pm \infty).$$

Здесь $A = (\partial u_0 / \partial y_2)_w$; $B = (\partial h_0 / \partial y_2)_w$; $y_2 = y/\varepsilon$, $u_0(y_2)$ и $h_0(y_2)$ — профили продольной скорости и энтальпии в пограничном слое на пластине.

Для нахождения внешних краевых условий при $y_3 \rightarrow \infty$ необходимо рассмотреть возмущенную область 2, характерная толщина которой $y \sim O(b)$ при $\varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon$ или $y \sim O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq b < \varepsilon^{3/4}$, т. е. более «толстую», чем область 3. Поэтому в области 2 в первом случае вводятся независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$(2.8) \quad x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/b, \quad z_2 = z_3 = z/c, \\ u = (b/\varepsilon) A y_2 + (\varepsilon/b^{1/3}) u_2 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3}) v_2 + \dots, \\ w = (\varepsilon b^{2/3}/c) w_2 + \dots, \quad \Delta p = b^{2/3} p_2 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots, \\ h = h_w + (b/\varepsilon) B y_2 + (\varepsilon/b^{1/3}) h_2 + \dots,$$

а во втором — переменные и разложения вида

$$(2.9) \quad x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/\varepsilon, \quad z_2 = z_3 = z/c, \\ u = u_0(y_2) + b^{2/3} u_2 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3}) v_2 + \dots, \\ w = (b^{5/3}/c) w_2 + \dots, \quad \Delta p = b^{2/3} p_2 + \dots, \\ \rho = \rho_0(y_2) + b^{2/3} \rho_2 + \dots, \quad h = h_0(y_2) + b^{2/3} h_2 + \dots$$

($\rho_0(y_2)$ — профиль плотности в пограничном слое на пластине). Подстановка разложений (2.8) или (2.9) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon^{3/4}$, $b \leq c$ по-

казывают, что в обоих случаях течение в области 2 в первом приближении будет описываться линеаризованными относительно набегающего потока ($u = (b/\varepsilon) Ay_2$ или $u = u_0(y_2)$) уравнениями Эйлера, откуда

$$(2.10) \quad A\rho_w v_2 + \partial p_2/\partial x_2 \rightarrow 0 \quad (y_2 \rightarrow 0).$$

Сравнение разложений в областях 2 и 3 при использовании (2.10) дает следующие внешние краевые условия:

$$(2.11) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad h_3 \rightarrow By_3, \quad A\rho_w v_3 + \partial p_3/\partial x_3 \rightarrow 0, \quad w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Для дальнейшего полезно в краевой задаче (2.4)—(2.7) и (2.11), описывающей компенсационный режим обтекания неузких тонких неровностей (2.2), принять $b \sim c$ и ввести новые переменные (без индексов)

$$(2.12) \quad x_3 = b_1 x, \quad y_3 = a_1 y, \quad z_3 = c_1 z,$$

$$u_3 = Aa_1 u, \quad v_3 = (Aa_1^2/b_1) v, \quad w_3 = (Aa_1 c_1/b_1) w, \quad p_3 = \rho_w A^2 a_1^2 p, \quad h_3 = Ba_1 h,$$

где a_1 , b_1 и c_1 — толщина, протяженность и ширина неровности в масштабах a , b и c соответственно (например, физическая размерная толщина неровности равна laa_1 , $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $a_1 \sim O(1)$). В переменных (2.12) система уравнений (2.4) имеет вид

$$(2.13) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + C \frac{\partial p}{\partial x} = \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + D \frac{\partial p}{\partial z} = \Pi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\Pi}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad \Pi = \frac{\mu_w b_1}{\rho_w A a_1^3};$$

внутренние краевые условия (2.5)

$$(2.14) \quad u = v = w = h = 0 \quad (y = f(x, Ez));$$

внешние краевые условия (2.11) переходят в

$$(2.15) \quad u, h \rightarrow y, \quad w \rightarrow 0, \quad v + C \partial p/\partial x \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty);$$

начальные краевые условия (2.6), (2.7) преобразуются в

$$(2.16) \quad u, h \rightarrow y, \quad v, w, p \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty);$$

$$(2.17) \quad u, h \rightarrow y, \quad v, w, p \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty).$$

Здесь коэффициенты C , D и E , выражающие соотношение габаритных размеров неровности a_1 , b_1 и c_1 , принимают значения

$$(2.18) \quad C = E = 1, \quad D = (b_1/c_1)^2 \quad (b_1 \leq c_1)$$

и форма неровности $f = (x, Ez)$ отнормирована к единице по высоте, ширине и протяженности.

Очевидно, что краевая задача (2.13)—(2.18) пригодна для исследования течения около различных неузких неровностей ($b_1 \leq c_1$). При $D \rightarrow 0$ $w \rightarrow 0$, и ее решение будет описывать обтекание широких неровностей ($b_1 \ll c_1$) в плоских сечениях $z = \text{const}$.

Если вместо преобразования переменных (2.12) использовать

$$(2.19) \quad x_3 = \tilde{b}_1 x, \quad y_3 = a_1 \Pi^{1/3} y, \quad z_3 = c_1 z,$$

$$u_3 = Aa_1 \Pi^{1/3} u, \quad v_3 = (Aa_1^2/b_1) \Pi^{2/3} v, \quad w_3 = (Aa_1 c_1/b_1) \Pi^{1/3} w,$$

$$p_3 = \rho_w A^2 a_1^2 \Pi^{2/3} p, \quad h_3 = Ba_1 \Pi^{1/3} h,$$

то систему уравнений (2.4) и внутренние краевые условия (2.5) запишем как

$$(2.20) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + C \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + D \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2};$$

$$(2.21) \quad u = v = w = h = 0 \quad (y = \Pi^{-1/3} f(x, Ez)),$$

а условия (2.6), (2.7) и (2.11) сведутся к (2.15)–(2.17).

Для принятых в краевых задачах (2.13)–(2.18) или (2.15)–(2.18), (2.20) и (2.21) переменных безразмерные компоненты напряжения трения τ_{xy} , τ_{yz} и тепловой поток q выражаются через

$$(2.22) \quad \tau_{xy} = \partial u / \partial y, \quad \tau_{yz} = (c_1 / b_1) \partial w / \partial y, \quad q = \partial h / \partial y$$

и в пограничном слое на пластине вблизи ее поверхности $\tau_{xy} = q = 1$, $\tau_{yz} = 0$.

Параметр подобия Π характеризует отношение толщины вязкого слоя к толщине неровности. При $\Pi \rightarrow 0$ область 3 становится невязкой, и тогда удобно использовать уравнения и краевые условия (2.13)–(2.17). В этом случае необходимо дополнительно рассматривать вязкий и теплопроводный подслои вблизи поверхности неровности [5]. При $\Pi \rightarrow \infty$ вязкий слой значительно толще неровности и возможна линеаризация краевой задачи (2.15)–(2.17), (2.20) и (2.21) по параметру $\lambda = \Pi^{-1/3} \ll 1$.

Дифференцируя уравнения сохранения (2.20) продольного импульса по x , поперечного — по z и складывая их, при использовании краевых условий (2.21) для $p = p(x, z)$ получим обычное уравнение Пуассона

$$(2.23) \quad C \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (y = \Pi^{-1/3} f(x, Ez)),$$

а дифференцируя те же уравнения по y , можно исключить $p(x, z)$ из системы (2.20)

$$(2.24) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

Известно [2], что условие для определения давления при компенсационном режиме обтекания неровностей (2.15)

$$v + C \partial p / \partial x \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty)$$

эквивалентно условию

$$(2.25) \quad u = y + o(1) \quad (y \rightarrow \infty),$$

которое показывает, что для исследуемого режима течения изменение толщины неровности компенсируется изменением толщины вытеснения пристеночной части пограничного слоя на пластине. Поэтому полная краевая задача (2.15)–(2.17), (2.20), (2.21) при использовании (2.25) вместо условия для $p(x, z)$ в (2.15) распадается на две, первая из них с помощью (2.24) позволяет определить компоненты скорости и энтальпию, а вторая — распределение давления из (2.23). Следует особо отметить, что при значениях коэффициентов C , D и E (2.18) первая краевая задача не зависит от габаритных размеров неровности a_1 , b_1 , c_1 и ее решение описывает обтекание отнормированной к единице по высоте, ширине и протяженности неровности, а отношение протяженности и ширины неровности b_1/c_1 входит только во вторую краевую задачу.

3. Для узких неровностей ($b > c$) в области 3 из уравнений неразрывности и сохранения поперечного импульса при использовании соотношений (1.1) получают оценки для вертикальной и поперечной скоростей

и поперечного градиента давления

$$(3.1) \quad v \sim O(\varepsilon/b^{1/3}), \quad w \sim O(c/b^{2/3}), \quad \partial p/\partial z \sim w \partial w/\partial z \sim O(c/b^{4/3}).$$

Если возмущение давления создается за счет взаимодействия неровности с равномерным набегающим потоком, то в возмущенной области с характерными размерами $\varepsilon < x \sim b \leq 1$, $\varepsilon < y \sim z \sim c < b$ индуцируются возмущения функций течения

$$\Delta u \sim O(a/c), \quad v \sim w \sim O(a/b), \quad \partial p/\partial z \sim u \partial w/\partial x \sim O(a/b^2).$$

Сравнивая эту оценку для $\partial p/\partial z$ с (3.1), получим, что компенсационный режим обтекания узких неровностей реализуется при

$$(3.2) \quad a \sim O(\varepsilon b^{1/3}), \quad \varepsilon^{3/2} < b < 1, \quad a < c < \min(b, \varepsilon/b^{1/3}).$$

Если возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии $z \sim O(c)$, то из (3.1)

$$(3.3) \quad \Delta p \sim O(c^2/b^{4/3}),$$

т. е. узкие неровности индуцируют возмущение давления, в $(b/c)^2$ раз меньшее, чем широкие (см. оценку для Δp (2.1)).

Однако для узких неровностей (3.2) максимальным габаритным размером является их протяженность b , и поэтому возможна ситуация, когда возмущение давления в поперечном направлении затухает только на расстоянии $z \sim O(b)$. Тогда становится необходимым рассмотрение еще возмущенной области 4, более широкой, чем область 3, с характерными размерами $x \sim z \sim O(b)$, $y \sim O(a)$, в которой индуцируется возмущение давления

$$(3.4) \quad \Delta p \sim O(c/b^{1/3}),$$

т. е. в (b/c) раз большее, чем возмущение (3.3).

Оценки (3.1)–(3.4) позволяют ввести в области 3 следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x &= bx_3, \quad y = \varepsilon b^{1/3} y_3, \quad z = cz_3, \\ u &= b^{1/3} u_3 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3}) v_3 + \dots, \quad w = (c/b^{2/3}) w_3 + \dots, \\ \Delta p &= (c/b^{1/3}) p_{31} + (c^2/b^{4/3}) p_{32} + \dots, \quad h = h_w + b^{1/3} h_3 + \dots, \\ \rho &= \rho_w + \dots, \quad \mu = \mu_w + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (3.5) в уравнения Навье—Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{3/2} < c < b < 1$ показывают, что в первом приближении течение в области 3 описывается уравнениями пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0, \quad \frac{\partial p_{31}}{\partial y_3} - \frac{\partial p_{32}}{\partial y_3} - \frac{\partial p_{31}}{\partial z_3} = 0, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) + \left(\frac{c}{b} \right) \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_{32}}{\partial z_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial h_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial h_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial h_3}{\partial z_3} \right) &= \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h_3}{\partial y_3^2}. \end{aligned}$$

Если возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии $z \sim O(c)$, то $p_{31} \equiv 0$, $p_{32} = p_3$ и решение системы уравнений (3.6) должно удовлетворять внутренним и начальным краевым условиям (2.5)–(2.7).

Для нахождения внешних краевых условий при $y_3 \rightarrow \infty$ опять надо рассматривать возмущенную область 2, характерная толщина которой

$y \sim O(c)$ при $\varepsilon^{3/2} < c < \varepsilon$ или $y \sim O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq c < \min(b, \varepsilon/b^{1/3})$. Вводя соответствующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения и выполняя необходимые сращения разложений в областях 2 и 3, имеем внешние краевые условия вида (2.11)

$$(3.7) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad h_3 \rightarrow By_3, \quad \rho_w v_3 + \left(\frac{c}{b}\right) \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} \rightarrow 0, \\ w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Здесь $p_{31} \equiv 0$, $p_{32} = p_3$, если возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии $z \sim O(c)$.

Если в краевой задаче (2.5)–(2.7), (3.6) и (3.7), описывающей компенсационный режим обтекания узких тонких неровностей (3.2) при условии затухания возмущения давления в поперечном направлении на расстоянии $z \sim O(c)$, принять $b \sim c$, то она будет идентична краевой задаче (2.4)–(2.7), (2.11). Использование далее переменных (2.12) или (2.19) при

$$(3.8) \quad p_3 = (\rho_w A^2 a_1^2 c_1^2 / b_1^2) p$$

в первом случае или при

$$(3.9) \quad p_3 = (\rho_w A^2 a_1^2 c_1^2 / b_1^2) \Pi^{2/3} p$$

во втором позволяет свести исследуемую краевую задачу к виду (2.13)–(2.17) или (2.15)–(2.17), (2.20), (2.21) соответственно при

$$(3.10) \quad C = (c_1/b_1)^2, \quad D = E = 1 \quad (c_1 \leq b_1).$$

Формулы (3.8) и (3.9) показывают, что в этом случае обтекания узких неровностей индуцируют возмущения давления, в $(b_1/c_1)^2$ раз меньшие, чем при обтекании неузких неровностей (см. (2.12) и (2.19)).

При $C \rightarrow 0$ в исследуемой краевой задаче пропадают члены с $\partial p / \partial x$ и ее решение описывает обтекание узких неровностей ($c_1 \ll b_1$).

Очевидно, здесь справедливы формулы (2.22)–(2.25) и также возможно разделение полной краевой задачи на две, первая из них описывает обтекание отнормированной неровности, а вторая определяет возмущение давления и в качестве параметра подобия содержит квадрат удлинения неровности $C = (c_1/b_1)^2$.

4. Если при обтекании узких тонких неровностей (3.2) возмущение давления затухает в поперечном направлении на расстоянии $z \sim O(b)$, то для области 3 уже не будут справедливы краевые условия (2.7) и становится необходимым рассмотрение области 4. Недостающие краевые условия для области 3 при $z_3 \rightarrow \pm\infty$ находятся тогда из условий сращения асимптотических разложений функций течения в областях 3 и 4.

Однако при $b \geq c$ можно сразу получить краевую задачу для изучаемого случая обтекания неровностей, если в (2.4)–(2.7), (2.11) или в (2.5)–(2.7), (3.6), (3.7) принять $b \sim c$ и ввести новые переменные (без индексов):

$$(4.1) \quad x_3 = b_1 x, \quad y_3 = a_1 y, \quad z_3 = b_1 z, \\ u_3 = A a_1 u, \quad v_3 = (A a_1^2 / b_1) v, \quad w_3 = A a_1 w, \\ p_3 = (\rho_w A^2 a_1^2 c_1 / b_1) p, \quad h_3 = B a_1 h$$

или

$$(4.2) \quad x_3 = b_1 x, \quad y_3 = a_1 \Pi^{1/3} y, \quad z_3 = b_1 z, \\ u_3 = A a_1 \Pi^{1/3} u, \quad v_3 = (A a_1^2 / b_1) \Pi^{2/3} v, \quad w = A a_1 \Pi^{1/3} w, \\ p_3 = (\rho_w A^2 a_1^2 c_1 / b_1) \Pi^{2/3} p, \quad h_3 = B a_1 \Pi^{1/3} h.$$

Тогда краевая задача примет вид (2.13)–(2.17) или (2.15)–(2.17), (2.20), (2.21) соответственно при

$$(4.3) \quad C = D = c_1/b_1, \quad E = b_1/c_1 \quad (c_1 \leq b_1).$$

Очевидно, здесь возмущение давления только в (b_1/c_1) раз меньше, чем при обтекании неузких неровностей (см. (2.12) и (2.19)), а безразмерные компоненты напряжения трения τ_{xy} , τ_{yz} и тепловой поток q будут вычисляться по формулам

$$(4.4) \quad \tau_{xy} = \partial u / \partial y, \quad \tau_{yz} = \partial w / \partial y, \quad q = \partial h / \partial y.$$

Для исследуемого случая обтекания неровностей также справедливы формулы (2.23)—(2.25) и опять возможно разделение полной краевой задачи на две. Только теперь краевая задача для определения компонент скоростей и энтальпии содержит в качестве параметра подобия отношение протяженности неровности к ее ширине — $E = b_1/c_1$.

В предельном случае при $C, D \rightarrow 0, E \rightarrow \infty, c_1 \ll b_1$ изменение формы неровности в поперечном направлении опишется дельта-функцией, что указывает на необходимость введения двух различных масштабов в поперечном направлении: $z \sim O(c)$ и $z \sim O(b), c < b$. Поэтому рассматривается еще возмущенная область 4 с характерными размерами $x \sim z \sim O(b), y \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, в которой возмущение давления определяется соотношением (3.4), а поперечная скорость w — соотношением (3.1). Тогда из уравнения неразрывности получаются оценки для возмущения продольной и вертикальной скоростей $\Delta u \sim O(c/b^{2/3}), v \sim O(\varepsilon c/b^{4/3})$ и в области 4 вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} x_4 &= x_3 = x/b, \quad y_4 = y_3 = y/\varepsilon b^{1/3}, \quad z_4 = z/b, \\ u &= b^{1/3} A y_4 + (c/b^{2/3}) u_4 + \dots, \quad v = (\varepsilon c/b^{4/3}) v_4 + \dots, \\ w &= (c/b^{2/3}) w_4 + \dots, \quad \Delta p = (c/b^{1/3}) p_4 + \dots, \quad h = h_w + b^{1/3} B y_4 + \\ &\quad + (c/b^{2/3}) h_4 + \dots, \\ \rho &= \rho_w + \dots, \quad \mu = \mu_w + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (4.5) в уравнения Навье—Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon^{3/2} < c < b \leq 1$ показывают, что в первом приближении течение в области 4 описывается линеаризованными относительно набегающего потока ($u = b^{1/3} A y_4$) уравнениями пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_4}{\partial x_4} + \frac{\partial v_4}{\partial y_4} + \frac{\partial w_4}{\partial z_4} &= 0, \quad \rho_w \left(A y_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_4} + A v_4 \right) + \frac{\partial p_4}{\partial x_4} = \mu_w \frac{\partial^2 u_4}{\partial y_4^2}, \\ \frac{\partial p_4}{\partial y_4} &= 0, \quad \rho_w A y_4 \frac{\partial w_4}{\partial x_4} + \frac{\partial p_4}{\partial z_4} = \mu_w \frac{\partial^2 w_4}{\partial y_4^2}, \\ \rho_w \left(A y_4 \frac{\partial h_4}{\partial x_4} + B v_4 \right) &= \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h_4}{\partial y_4^2}. \end{aligned}$$

Так как область 4 по порядку величины шире неровности, то условия прилипания и непротекания должны выполняться теперь на поверхности плоской пластины

$$(4.7) \quad u_4 = v_4 = w_4 = h_4 = 0 \quad (y_4 = 0).$$

Начальные краевые условия при $x_4 \rightarrow -\infty$ или $z_4 \rightarrow \pm \infty$ получаются опять из сращивания решения в области 4 с пристеночной частью пограничного слоя на пластине

$$(4.8) \quad u_4, v_4, w_4, p_4, h_4 \rightarrow 0 \quad (x_4 \rightarrow -\infty, z_4 \rightarrow \pm \infty),$$

а внешние краевые условия — из сращивания с решением для области 2 (при использовании разложений вида (2.8) или (2.9) для $c \sim b$)

$$(4.9) \quad u_4, w_4, h_4 \rightarrow 0, \quad A \rho_w v_4 + \partial p_4 / \partial x_4 \rightarrow 0 \quad (y_4 \rightarrow \infty).$$

Сращивание разложений (3.5) и (4.5) позволяет найти недостающие начальные краевые условия для области 3 при $z_3 \rightarrow \pm\infty$

$$(4.10) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad v_3 \rightarrow 0, \quad \partial w_3 / \partial z_3 \rightarrow 0, \quad h_3 \rightarrow By_3 \quad (z_3 \rightarrow \pm\infty),$$

т. е. обтекание узких тонких неровностей (3.2), когда возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии $z \sim O(b)$, в области 3 описывается решением краевой задачи (2.5), (2.6) (здесь под p_3 надо подразумевать p_{32}), (3.6), (3.7) и (4.10), которое при $z_3 \rightarrow \pm\infty$ определяет распределение поперечного градиента давления

$$(4.11) \quad \partial p_{32} / \partial z_3 = \pm G(x_3) \rho_w A^2 a_1^2 c_1 / b_1^2 \quad (z_3 \rightarrow \pm\infty).$$

Для области 4 сращивание разложений (3.5) и (4.5) при использовании соотношения (4.11) дает

$$(4.12) \quad \partial p_4 / \partial z_4 = \pm G(x_4) \rho_w A^2 a_1^2 c_1 / b_1^2 \quad (z_4 \rightarrow \pm\infty)$$

и решение краевой задачи (4.6)–(4.9), (4.12) в области 4 определяет

$$(4.13) \quad p_4 = p_{31}(x_3) \quad (z_4 \rightarrow 0).$$

В новых переменных (без индексов) (2.12), (3.8) при $p_3 = p_{32}$ или (2.19), (3.9) при $p_3 = p_{32}$ краевая задача (2.5), (2.6) ($p_3 = p_{32}$), (3.6), (3.7) и (4.10) для области 3 принимает вид (2.13)–(2.16) и

$$(4.14) \quad u, h \rightarrow y, \quad v, \partial w / \partial z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty)$$

или (2.15), (2.16), (2.20), (2.21), (4.14) при

$$(4.15) \quad C = 0, \quad D = E = 1,$$

где, очевидно, справедливы формулы (2.22)–(2.25) и опять возможно разделение полной краевой задачи на две, вторая из них определяет возмущение давления в области 4 (см. (4.11), (4.12)).

Для краевой задачи (4.6)–(4.9), (4.12) в области 4 также вводятся новые переменные (без индексов)

$$(4.16) \quad x_4 = b_1 x, \quad y_4 = a_1 \Pi^{1/3} y, \quad z_4 = b_1 z, \\ u_4 = (A a_1 c_1 / b_1) u, \quad v_4 = (A a_1^2 c_1 / b_1^2) \Pi^{1/3} v, \quad w_4 = (A a_1 c_1 / b_1) w, \\ p_4 = (\rho_w A^2 a_1^2 c_1 / b_1) \Pi^{1/3} p, \quad h_4 = (B a_1 c_1 / b_1) h,$$

и она принимает вид

$$(4.17) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + v + C \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ y \frac{\partial w}{\partial x} + D \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad y \frac{\partial h}{\partial x} + v = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \\ u = v = w = h = 0 \quad (y = 0), \\ u, v, w, p, h \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty, z \rightarrow \pm\infty), \\ u, w, h \rightarrow 0, \quad v + C \partial p / \partial x \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \\ \partial p / \partial z = +G(x) \Pi^{-1/3} \quad (z \rightarrow \pm 0)$$

при

$$(4.18) \quad C = D = 1.$$

Здесь также возможно разделение полной краевой задачи (4.17) на две, вторая из них определяет возмущение давления для области 3 (см. (4.13)).

5. При $\Pi \rightarrow \infty$ краевые задачи, описывающие различные случаи компенсационного режима обтекания тонких неровностей на поверхности плоской пластины, допускают линеаризацию по малому параметру $\lambda = \Pi^{-1/3} \ll 1$:

$$(5.1) \quad u = y + \lambda U + \dots, \quad v = \lambda V + \dots, \quad w = \lambda W + \dots, \\ p = \lambda P + \dots, \quad h = y + \lambda H + \dots$$

В новых переменных (5.1) из уравнений (2.23), (2.24) и краевых условий (2.15)–(2.17), (2.21) и (2.25) для динамической части задачи получим

$$(5.2) \quad C \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (y = 0),$$

$$y \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad P = P(x, z), \quad F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right),$$

$$P, F \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad P \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$F \rightarrow 0, \quad \int_0^y F dy \rightarrow \frac{\partial f(x, Ez)}{\partial x} \quad (y \rightarrow \infty), \quad P \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm \infty),$$

где еще используется при необходимости естественное условие затухания возмущения давления вдали за неровностью.

При значениях коэффициентов C , D и E (2.18) краевая задача (5.2) пригодна для исследования течения около различных неузких неровностей ($b_1 \leq c_1$), причем распространение возмущений давления определяется из уравнения эллиптического типа. В предельном случае широких неровностей ($b_1 \ll c_1$, $D \rightarrow 0$, $W \rightarrow 0$) решение краевой задачи (5.2) будет описывать обтекание отдельных сечений неровности при $z = \text{const}$, а возмущения давления находятся из решения уравнения

$$\partial P / \partial x = \partial^2 U / \partial y^2 \quad (y = 0),$$

для которого отсутствует передача возмущений вверх по потоку (см. также [2]).

При значениях коэффициентов C , D и E (3.10) краевая задача (5.2) позволяет получить решение для узких неровностей ($c_1 < b_1$), когда возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии, по порядку величины равном характерной ширине неровности. Пусть форма неровности $f(x, z) = f_1(x)f_2(z)$, тогда $F = f_2(z)F_1(x, y)$, и при $c_1 \ll b_1$ возмущение давления определяется решением уравнения

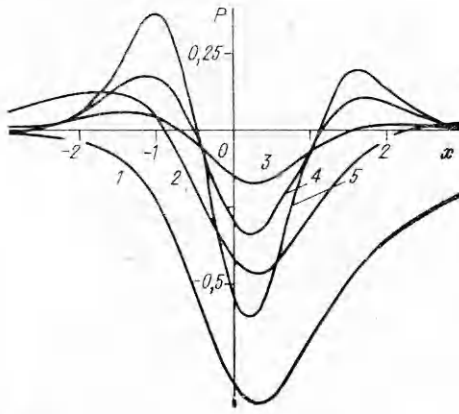
$$(5.3) \quad \partial^2 P / \partial z^2 = f_2(z) \partial F_1 / \partial y \quad (y = 0),$$

которое может удовлетворять условиям затухания при $z \rightarrow \pm \infty$, если

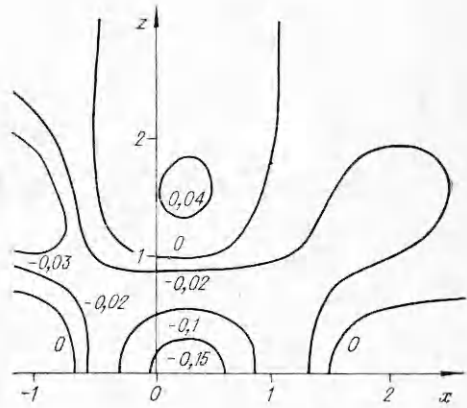
$$(5.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) dz = 0.$$

Вид функции $f_2(z)$ определяет изменение возмущения давления в поперечном направлении, а решение уравнения параболического типа $F_1(x, y)$ — в продольном, т. е. в этом предельном случае также пропадает передача возмущений вверх по потоку.

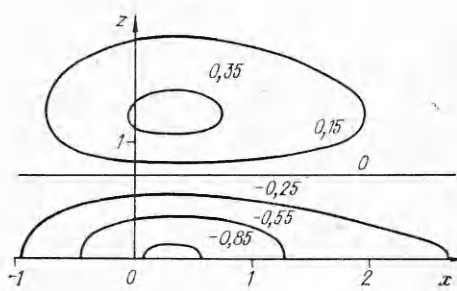
Численное решение краевой задачи (5.2) при условии (5.4) получено для неровности $f(x, z) = \exp(-x^2 - z^2)(1 - 2z^2)$. На рис. 1 представлены распределения возмущения давления $P(x, 0)$ вдоль линии симметрии $z = 0$. При $c_1 \gg b_1$ каждое сечение неровности $z = \text{const}$ индуцирует возмущение давления независимо от других сечений, и выпуклость вида $\exp(-x^2)$ в дозвуковой пристеночной части пограничного слоя на пластине вызывает разрежение (кривая 1). При $c_1 = 4b_1$, например, неровность вызывает меньшие возмущения давления, чем при $c_1 \gg b_1$, и за счет распространения возмущений вверх по потоку появляются положительные возмущения давления при $x < 0$ (кривая 2). По мере уменьшения отношения c_1/b_1 падает уровень возмущения давления (при $c_1/b_1 < 1$ величины возмущения давления умножаются на $(b_1/c_1)^2$), распространение возмущения давления сохраняет эллиптический характер (кривые 3, 4 для $c_1/b_1 = 1$ и 0,25 соответственно). В предельном случае $b_1 \gg c_1$ распределение возмущения давления описывается формулой (линия 5) $P(x, z) = -0,5 \exp(-z^2) \partial F_1 / \partial y \quad (y = 0)$.



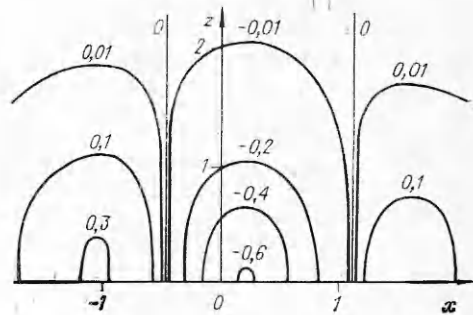
Р и с. 1



Р и с. 3



Р и с. 2



Р и с. 4

Изобары, представленные на рис. 2—4 ($b_1 \ll c_1$, $b_1 = c_1$ и $b_1 \gg c_1$ соответственно), показывают сложный характер распространения возмущения давления при $b_1 = c_1$ и вырождение течения в продольном или поперечном направлениях при $b_1 \ll c_1$ или $b_1 \gg c_1$.

Если условие (5.4) не выполняется, то для узких неровностей ($c_1 < b_1$) возмущение давления в поперечном направлении затухает на расстоянии, соизмеримом с характерной протяженностью неровностей, и для них действительно решение краевой задачи (5.2) при значениях коэффициентов C , D и E (4.3).

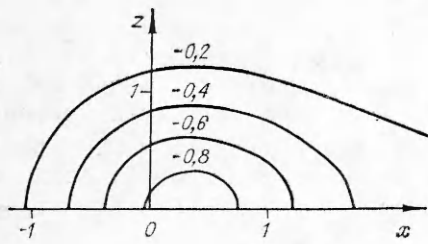
В предельном случае ($c_1 \ll b_1$) в области 3 распределение возмущения давления описывается решением краевой задачи (5.2) при C , D и E из (4.15). Здесь, очевидно, не должны удовлетворяться условия затухания возмущения давления при $z \rightarrow \pm\infty$ и нет передачи возмущений вверх по потоку. Тогда для неровностей, обладающих продольной симметрией, из (5.2) получается

$$(5.5) \quad G(x) = \pm \frac{\partial F_1}{\partial y} \int_0^{\infty} f_2(z) dz \quad (y=0).$$

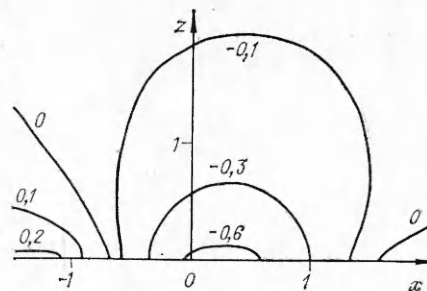
Возмущения давления затухают в области 4, для которой из (4.17) и (5.5) вытекает

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial z^2 &= 0, \\ p \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow \pm\infty), \quad \partial p / \partial z &= \pm G(x) \quad (z \rightarrow \pm 0). \end{aligned}$$

Отметим, что в исследуемом случае узкие неровности ($b_1 \gg c_1$) индуцируют возмущения давления, в (b_1/c_1) раз большие, чем при выполнении условия (5.4).



Р и с. 5



Р и с. 6

Численные решения здесь получены для неровности $f(x, z) = \exp(-x^2 - z^2)$. Распределения возмущения давления $P(x, 0)$ повторяют в принципе кривые, представленные на рис. 1, т. е. здесь также возникает передача возмущений вверх по потоку.

На рис. 5 и 6 представлены изобары для неровностей предельного типа $b_1 \ll c_1$ и $b_1 \gg c_1$ соответственно. В первом случае выпуклая неровность в дозвуковом потоке вызывает разрежение во всем поле течения. В случае нешироких неровностей распространение возмущений давления носит сложный эллиптический характер, аналогично представленному на рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголенов В. В. Общая схема режимов пространственных локальных течений // ПМТФ.— 1986.— № 6.
2. Боголенов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ.— 1971.— Вып. 1363.
3. Smith F. T. A three dimensional boundary layer separation // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 99.— P. 1.
4. Боголенов В. В., Липатов И. И. Исследование пространственных локальных ламинарных течений // ПМТФ.— 1985.— № 1.
5. Боголенов В. В. Исследование предельных решений для случая обтекания малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ.— 1977.— Вып. 1812.

Поступила 28/IV 1986 г.

УДК 532.517.4

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ В КАНАЛЕ С ИНТЕНСИВНЫМ ВДУВОМ

Ф. Ф. Спиридонов
(Бийск)

Вопросам распределения характеристик течений в каналах со вдувом посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1]). Теоретический анализ соответствующего решения уравнений Навье—Стокса для ламинарного режима течения впервые проведен в [2]. Дальнейшие экспериментальные исследования [3—7] показали, что и при турбулентном режиме течения профили продольной и поперечной компонент вектора скорости хорошо описываются предельными (бесконечно большое число Рейнольдса вдува) зависимостями из [2]. Этот эффект, свидетельствующий о высокой устойчивости течения, может быть объяснен ламинаризацией потока при его разгоне вследствие распределенного вдува в канал [8]. Применение модели Прандтля для описания распределения характеристик турбулентности в канале со вдувом [9] приводит к зависимостям, не согласующимся с указанным фактом.

В данной работе предпринята попытка построения приближенной полуэмпирической теории для описания характеристик течения, основанной на $(k - \epsilon)$ -модели турбулентности. Путем численного интегрирования уравнений гидродинамики с $(k - \epsilon)$ -моделью турбулентности проведены расчеты параметров течения в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса вдува. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.