

УДК 531.01+531.552

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТЕЛО КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ И СЕМЕЙСТВА ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КВАЗИСКОРСТЕЙ

А. В. Андреев, М. В. Шамолин\*

Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия

\* Институт механики Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

E-mails: aleex@live.ru, shamolin@rambler.ru

Рассматривается математическая модель воздействия среды на твердое тело, частью внешней поверхности которого является круговой конус. Приводится полная система уравнений движения в условиях квазистационарности. В динамической части, образующей независимую систему третьего порядка, выделяется независимая подсистема второго порядка. Получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, квазистационарность, фазовый портрет.

DOI: 10.15372/PMTF20150408

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоскопараллельное движение однородного твердого тела массой  $m$ , имеющего конусообразную переднюю часть, взаимодействующую со средой в условиях, например, струйного или отрывного обтекания (рис. 1). Для упрощения задачи координата  $y_N$  точки  $N$  приложения силы воздействия среды определяется с помощью одного параметра — угла атаки  $\alpha$  между вектором скорости точки  $D$  и осью симметрии  $Dx$ :

$$y_N = R(\alpha). \quad (1)$$

Силы лобового и бокового сопротивления (см. рис. 1) представим в квадратичном виде относительно скорости точки  $D$ :

$$\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y, \quad |\mathbf{v}_D| = v. \quad (2)$$

Таким образом, тройка функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [1–3].

**2. Динамическая часть уравнений движения.** С учетом условий (1), (2) динамическую часть уравнений движения запишем в следующем виде:

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -s(\alpha)v^2/m; \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00020-а), а также в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (проект № 333).

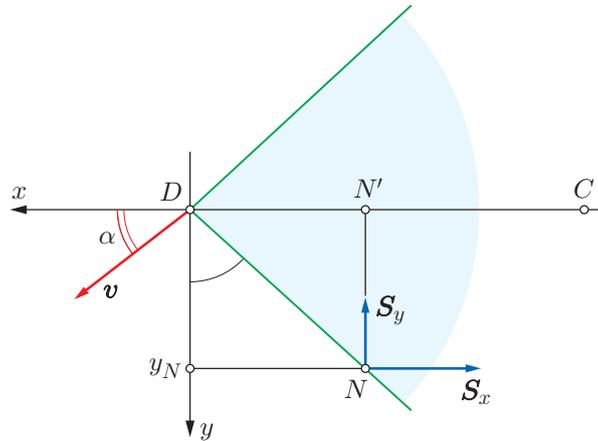


Рис. 1. Модель взаимодействия тела со средой

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega} = -b(\alpha)v^2/m; \quad (4)$$

$$I\dot{\Omega} = -F(\alpha)s(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2 - h\Omega v. \quad (5)$$

Здесь  $I$  — центральный момент инерции тела;  $\sigma = |CD|$ ;  $C$  — центр масс;  $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ ; коэффициент  $h > 0$  характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [1, 2].

Первые два уравнения в (3)–(5) получены из теоремы о движении центра масс, а третье — из теоремы об изменении кинетического момента в осях Кенига. Аналогичные системы, но без учета боковой силы использовались в работах [4, 5].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Поэтому систему динамических уравнений (3)–(5) можно считать независимой. При этом система кинематических уравнений (переменные  $\varphi$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  определяют положение тела на плоскости)

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x}_0 = v \cos(\alpha - \varphi), \quad \dot{y}_0 = v \sin(\alpha - \varphi)$$

вместе с системой (3)–(5) является полной системой для исследования рассматриваемого движения в построенном поле сил.

Для определения вида функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  используем экспериментальные данные о свойствах струйного обтекания (см. [6, 7]).

Вводимые классы динамических функций достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $R(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  — нечетные,  $s(\alpha)$  — четная), удовлетворяющих следующим условиям:  $R(\alpha) > 0$ ,  $b(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем  $R'(0) > 0$ ,  $b'(0) > 0$ ,  $R'(\pi) < 0$ ,  $b'(\pi) < 0$  (классы функций  $\{R\}$ ,  $\{b\}$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0$ ,  $s'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{s\}$ ). При замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$  функции  $R$ ,  $b$ ,  $s$  меняют знак. В частности, аналитические функции

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad b(\alpha) = b_1 \sin \alpha; \quad (6)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad b_1 > 0 \quad (7)$$

являются характерными представителями описанных классов, функции  $R$ ,  $s$  соответствуют функциям воздействия среды, полученным С. А. Чаплыгиным [1–3] при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

Необходимость выбора широких классов функций  $\{R\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{s\}$  объясняется следующим. Геометрические характеристики конусообразного тела могут быть различными, что позволяет отнести три возникающие динамические функции к определенным классам. Как указывалось выше, на эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому данные классы широки и включают допустимые конкретные функции для любого движения тела, существование которого можно предположить.

Однако не каждой тройке динамических функций можно поставить в соответствие движение твердого тела. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет считать, что в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности задача о движении тела в среде рассматривается полностью.

Таким образом, для исследования обтекания конусообразного тела средой используются классы динамических систем, определенные с помощью трех динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа.

В ряде случаев без ограничения общности [1] будем рассматривать представления (6), (7) для функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$ , определяющих воздействие среды.

**3. Дальнейшее понижение порядка.** Уравнения (3), (4) приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos \alpha + \sigma\dot{\Omega} \sin \alpha &= -\frac{s(\alpha)}{m} v^2 \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} v^2 \sin \alpha, \\ \dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega} \cos \alpha - \sigma\Omega^2 \sin \alpha &= -\frac{b(\alpha)}{m} v^2 \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} v^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Проводя дифференцирование по формуле  $\langle \cdot \rangle = d/dt = v d/dq = v \langle \prime \rangle$ , где  $q$  — путь, пройденный точкой  $D$ , получаем  $\Omega = \omega v$ ,  $\dot{\Omega} = v(\omega'v + \omega v')$ . Тогда динамическая часть уравнений движения принимает вид

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega);$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \cos \alpha; \quad (8)$$

$$\omega' = -\psi(\alpha, \omega)/I - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (9)$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma\omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \sin \alpha.$$

Вводя безразмерные параметры

$$q = Q\sigma, \quad \bar{\omega} = \omega\sigma,$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I}, \quad \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma h}{I}, \quad \beta_4 = \frac{B\sigma}{m}, \quad \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m}$$

и учитывая (6), (7), получаем систему (8), (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega \cos \alpha + \\ &+ \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \sin \alpha \cos \alpha - \beta_5 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' = & -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha - \beta_3 \omega + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha - \beta_3 \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \omega \cos^2 \alpha + \beta_5 \omega \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

(далее черта над безразмерной переменной  $\bar{\omega}$  опускается, штрих обозначает производную по безразмерной величине  $Q$ ). В (10), (11)  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$  — безразмерные параметры:  $\beta_1$  — параметр момента силы лобового сопротивления;  $\beta_2$  — параметр момента боковой силы;  $\beta_3$  — параметр дополнительного демпфирующего момента;  $\beta_4$  — параметр силы лобового сопротивления;  $\beta_5$  — параметр момента боковой силы.

Таким образом, имеем пятипараметрическое семейство систем (10), (11) на двумерном фазовом цилиндре  $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , где угол  $\alpha$  определен с точностью до  $2\pi$ .

**4. Режим прямолинейного поступательного торможения.** Среди возможных режимов движения тела основным является режим прямолинейного поступательного торможения: тело движется поступательно с нулевым углом атаки, при этом скорости всех точек тела уменьшаются со временем (см. также [1, 8, 9]). Основным режимом соответствует тривиальному решению системы (10), (11).

Исследуем устойчивость основного режима, под которой будем понимать устойчивость угловых колебаний тела относительно его продольной оси по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости. Линеаризуем систему (10), (11) в начале координат. Получаем

$$\alpha' = \omega + \beta_1 \alpha - \beta_2 \alpha + \beta_3 \omega + \beta_4 \alpha - \beta_5 \alpha; \quad (12)$$

$$\omega' = -\beta_1 \alpha + \beta_2 \alpha - \beta_3 \omega + \beta_4 \omega. \quad (13)$$

Матрица системы (12), (13) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 + \beta_4 - \beta_5 & 1 + \beta_3 \\ -\beta_1 + \beta_2 & -\beta_3 + \beta_4 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0, \quad (14)$$

где  $\operatorname{tr} A = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 - \beta_5$ . Условия  $\operatorname{tr} A < 0$ ,  $\det A > 0$  обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (10), (11).

**5. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов.** Рассмотрим случай, когда имеется две пары сил. Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0. \quad (15)$$

Тогда система (10), (11) принимает вид

$$\alpha' = \omega + \omega^2 \sin \alpha + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (16)$$

$$\omega' = -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha. \quad (17)$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара сил лобового сопротивления и пара боковых сил (которые можно сложить).

Тогда система (16), (17) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов (рис. 2, 3), которое отличается от полученных в работах [8, 9].

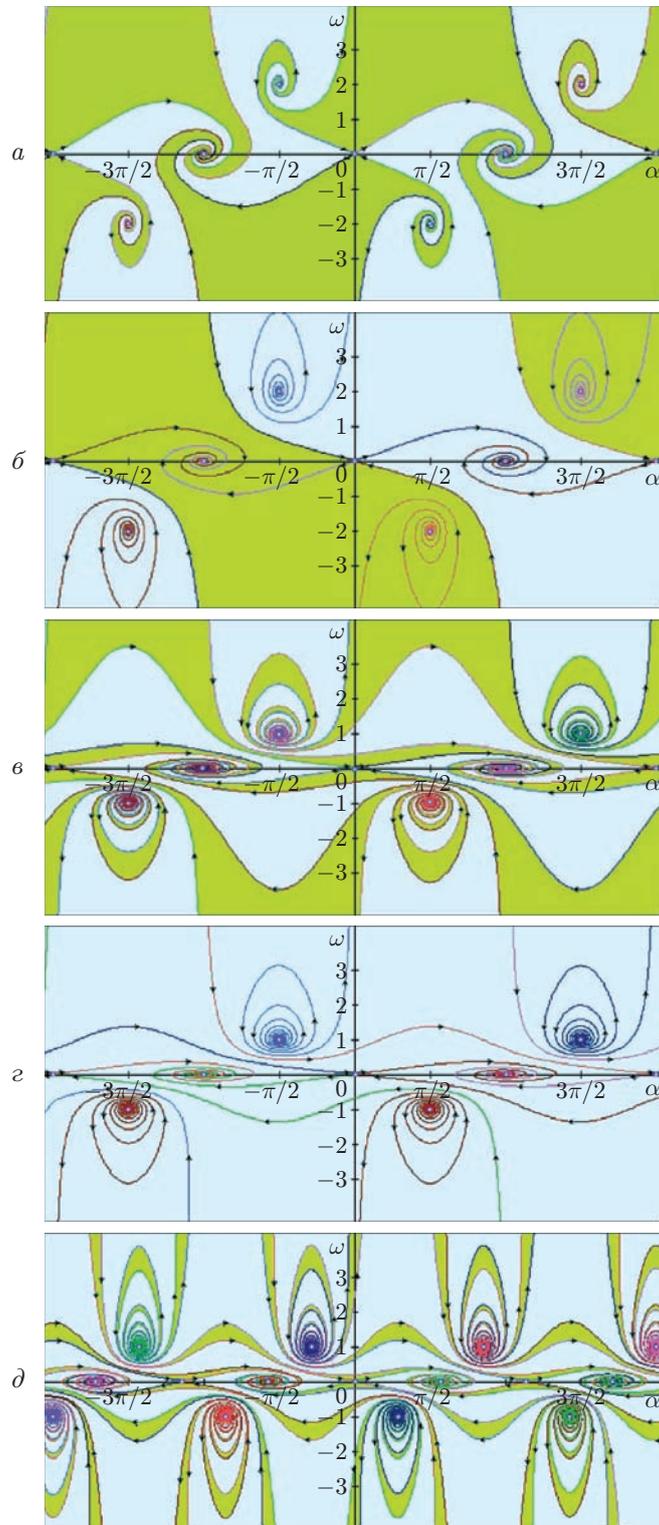


Рис. 2. Фазовый портрет без дополнительных седел при различных значениях параметров  $\beta_1, \beta_2$ :  
 $a - \beta_1 = 1,23, \beta_2 = 1,37, б - \beta_1 = 0,93, \beta_2 = 1,07, в - \beta_1 = 0,89, \beta_2 = 0,97, г - \beta_1 = 0,61, \beta_2 = 0,96, д - \beta_1 = 0,47, \beta_2 = 0,95$

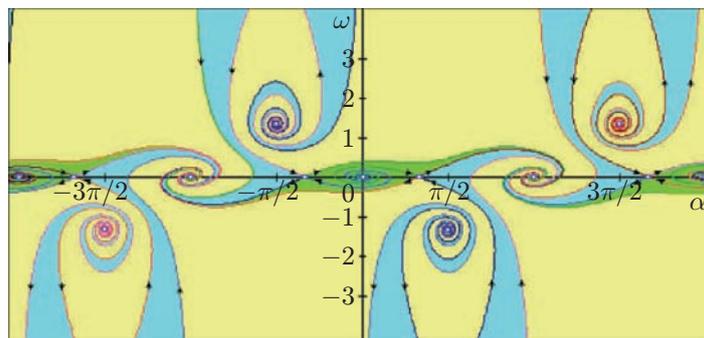


Рис. 3. Фазовый портрет с дополнительными седлами при  $\beta_1 = 1,23$ ,  $\beta_2 = 1,01$

**6. О достижении устойчивости основного режима.** При выполнении условия (15) характеристическое уравнение (14) принимает вид

$$\lambda^2 + (\beta_2 - \beta_1)\lambda + \beta_1 - \beta_2 = 0. \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует, что при выполнении условия (15) решение неустойчиво при любых значениях  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Например, при

$$\beta_1 < \beta_2 \quad (19)$$

тривиальное решение системы имеет неустойчивость, соответствующую седловидной точке, следовательно, путем выбора соответствующих начальных условий можно достигнуть условной устойчивости. Действительно, можно попытаться выбрать начальные условия вблизи устойчивых сепаратрис в окрестности начала координат, определив при этом в линейном приближении собственные направления.

Неустойчивость второго типа имеет тривиальное решение системы при условии

$$\beta_1 > \beta_2. \quad (20)$$

В этом случае начало координат является отталкивающей особой точкой и любой выбор начальных условий не обеспечивает устойчивости. В [8, 9] семейства портретов получены для случаев, когда можно обеспечить асимптотическую устойчивость начала координат. В настоящей работе семейство портретов получено для случаев, когда путем выбора начальных условий можно обеспечить условную устойчивость. Так, на рис. 2 показаны случаи, соответствующие выполнению неравенства (19) (начало координат — седло), на рис. 3 — случай, соответствующий выполнению неравенства (20) (начало координат — отталкивающая точка).

Авторы выражают благодарность А. П. Чупахину за ценные замечания и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shamolin M. V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. 2003. V. 114, N 1. P. 919–975.
2. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле. М.: ВИНТИ, 2013. (Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры; Т. 125).
3. Shamolin M. V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium // Proc. Appl. Math. Mech. 2009. V. 9. P. 139–140.

4. **Ерошин В. А.** Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1970. № 6. С. 99–104.
5. **Ерошин В. А.** Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 20–30.
6. **Михаськив В. В., Бутрак И. О., Лаушник И. П.** Взаимодействие дискового податливого включения с трещиной при падении упругой волны // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 3. С. 141–148.
7. **Пилюгин Н. Н.** Радиационный теплообмен при обтекании плоскости гиперзвуковым потоком газа от сферического источника // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 117–126.
8. **Шамолин М. В.** Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. АН. 1996. Т. 349, № 2. С. 193–197.
9. **Шамолин М. В.** Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. АН. 1994. Т. 337, № 5. С. 611–614.

*Поступила в редакцию 23/VI 2014 г.,  
в окончательном варианте — 27/VII 2014 г.*

---