УДК 536.25

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Батищев, В. В. Колесов, С. К. Слитинская, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Изучается устойчивость двумерного стационарного течения в горизонтальном слое вязкой теплопроводной жидкости, содержащей примесь.

При постоянных температурах границ слоя уравнения конвекции допускают стационарное решение (механическое равновесие), которое устойчиво, если температурный градиент не слишком велик. Наличие пространственной модуляции температурного поля приводит к тому, что жидкость не может находиться в равновесии и в ней при сколь угодно малых градиентах температуры устанавливается пространственно-периодический конвективный режим [1, 2]. Цель данной работы — отыскание критических значений температурного градиента, при которых этот основной режим теряет устойчивость и в жидкости возникает вторичный режим. Аналогичная задача для случая, когда жидкость однородна и обе границы слоя — свободные поверхности, была решена в [2].

1. Постановка задачи. Пусть вязкая теплопроводная жидкость, содержащая примесь, заполняет бесконечный плоский горизонтальный слой толщины h. Нижняя граница слоя — твердая поверхность, температура которой модулируется периодическими вдоль слоя возмущениями малой амплитуды. Свободная верхняя граница слоя не деформируется (учет деформируемости существен лишь для тонких слоев жидкости и в слабых гравитационных полях [3]), и на ней отсутствуют касательные напряжения. Над слоем находится атмосфера — неподвижный газ, имеющий квазистационарное распределение температуры. Поток тепла Q по вертикали в атмосфере вдали от свободной поверхности считается заданным (подогреву снизу соответствует случай $Q > 0$). Предполагается, что температура и нормальная составляющая потока тепла непрерывны при переходе через свободную поверхность. Поток примеси через границы слоя отсутствует. Жидкость как единое целое не может перемещаться параллельно дну. Количество примеси, содержащейся в жидкости, задано.

Задача для определения вектора скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, давления Π, температуры жидкости T, температуры атмосферы Θ и концентрации примеси S, приведенная к безразмерной форме и записанная в приближении Буссинеска, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\, \mathbf{v} = -\nabla\Pi + \Delta\mathbf{v} + \mathbf{e}\,(\mathrm{G}T - \mathrm{G}_s S), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\, T = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \Delta\Theta = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\, S = \frac{1}{\mathrm{Pr}_d}\operatorname{div}(\nabla S + \xi S \nabla T),$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = \varepsilon\cos\omega x, \quad \frac{\partial S}{\partial z} + \xi S\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (z = 0),$$

$$v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = T - \Theta = \frac{\partial T}{\partial z} - m\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} + \xi S\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (z = 1),$$

$$\nabla\Theta \to \{0,\ 0,\ -1/m\} \quad (z \to \infty),$$

где x, y, z — декартовы координаты (ось x направлена вдоль слоя, ось z — перпендикулярно границам слоя); t — время; $\mathbf{e} = \{0, 0, 1\}$ — орт оси z; $\mathrm{G} = g\beta h^4 Q/\varkappa\nu^2$ и $\mathrm{G}_S = g\beta_S h^3\overline{S}/\nu^2$ — число Грасгофа и его концентрационный аналог; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ и $\mathrm{Pr} = \nu/d$ — число Прандтля и его диффузионный аналог; $\xi = khQ/\varkappa$ — параметр, характеризующий термодиффузию; $m = \varkappa_0/\varkappa$ — отношение коэффициентов теплопроводности атмосферы $\varkappa_0$ и жидкости $\varkappa$; g — ускорение силы тяжести; $\bar{S}$ — средняя концентрация примеси в изотермических условиях; ν, χ, β, β_S, d и k — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения, концентрационного сжатия, диффузии примеси и термодиффузии; ε и ω — амплитуда и частота модуляции температуры на нижней границе слоя.

Требуется найти двумерное (не зависящее от y) стационарное $2\pi/\omega$-периодическое вдоль оси x решение задачи (1.1) (основной стационарный режим) и исследовать его устойчивость в классе двухчастотных по x двумерных возмущений с базисными частотами ω и α, где α — произвольное фиксированное волновое число.

2. Основной стационарный режим. Если модуляция температурного поля отсутствует ($\varepsilon = 0$), то задача (1.1) допускает стационарное решение (механическое равновесие):

$$\mathbf{v}^0 = 0,\ T^0 = -z,\ S^0 = \xi \exp(\xi z)/[\exp(\xi) - 1], \tag{2.1}$$

$$\Theta^0 = \frac{1 - m - z}{m},\quad \Pi^0 = \int_0^z (\mathrm{G}T^0 - \mathrm{G}_S S^0)\, dz + \text{const}.$$

Малоамплитудная модуляция температуры превращает одномерное решение (2.1) в двумерное стационарное решение, которое в нерезонансном случае будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \varepsilon u_{01}(z) \sin \omega x + \varepsilon^2 u_{02}(z) \sin 2\omega x + \ldots, \\ v_{z0} &= \varepsilon w_{01}(z) \cos \omega x + \varepsilon^2 w_{02}(z) \cos 2\omega x + \ldots, \\ \Pi_0 &= \Pi^0 + \varepsilon p_{01}(z) \cos \omega x + \varepsilon^2 [p_{02}(z) \cos 2\omega x + p_{00}(z)] + \ldots, \\ T_0 &= T^0 + \mathrm{Pr}\, \varepsilon \tau_{01}(z) \cos \omega x + \mathrm{Pr}\, \varepsilon^2 [\tau_{02}(z) \cos 2\omega x + \tau_{00}(z)] + \ldots, \\ \Theta_0 &= \Theta^0 + \mathrm{Pr}\, \varepsilon \theta_{01}(z) \cos \omega x + \mathrm{Pr}\, \varepsilon^2 \theta_{02}(z) \cos 2\omega x + \ldots, \\ S_0 &= S^0 + \xi\, \mathrm{Pr}_d \varepsilon s_{01}(z) \cos \omega x + \xi\, \mathrm{Pr}_d \varepsilon^2 [s_{02}(z) \cos 2\omega x + s_{00}(z)] + \ldots \end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.1), приравнивая выражения, стоящие при одинаковых степенях ε, и разделяя переменные, получаем рекуррентную цепочку линейных краевых задач для определения коэффициентов рядов (2.2). Выписывать эти краевые задачи не будем ввиду их громоздкости.

3. Устойчивость основного стационарного режима. Решение (2.2) задачи (1.1) существует при любом значении числа Рэлея $\mathrm{R} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{G}$, однако при переходе числа Рэлея через критическое значение R_0 решение (2.2) может потерять устойчивость. Будем искать R_0 в виде ряда

$$\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_0^{(0)} + \varepsilon \mathrm{R}_0^{(1)} + \varepsilon^2 \mathrm{R}_0^{(2)} + \ldots \tag{3.1}$$

Для определения коэффициентов ряда (3.1) наложим на основной режим (2.2) бесконечно малые двумерные возмущения, т. е. будем искать решение задачи (1.1), отличное от (2.2), в виде

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + v_x', \quad v_z = v_{z0} + v_z', \quad \Pi = \Pi_0 + \Pi', \\ T &= T_0 + \mathrm{Pr}\, T',\ \Theta = \Theta_0 + \mathrm{Pr}\, \Theta',\ S = S_0 + \xi\, \mathrm{Pr}_d S'. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ввиду инвариантности задачи (1.1) относительно инверсии $x \to -x$, $v_x \to -v_x$ собственные решения (нормальные моды) линеаризованной задачи устойчивости для режима (2.2) разделяются на четные (v_z', Π', T', Θ', S' — четные функции x, а v_x' — нечетная) и нечетные (v_z', Π', T', Θ', S' — нечетные функции x, а v_x' — четная).

Рассмотрим случай четных возмущений. Подставляя (3.2) в (1.1), линеаризуя полученную задачу в окрестности режима (2.2) и разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned} v_x' = u_1(z) \sin \alpha x &+ \varepsilon [u_{11}(z) \sin(\omega + \alpha) x + u_{12}(z) \sin(\omega - \alpha) x] + \\ &+ \varepsilon^2 [u_{21}(z) \sin(2\omega + \alpha) x + u_{22}(z) \sin(2\omega - \alpha) x + u_{20}(z) \sin \alpha x] + \ldots, \end{aligned}$$

$$v_z' = w_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon\,[w_{11}(z)\cos(\omega+\alpha)x + w_{12}(z)\cos(\omega-\alpha)x] +$$
$$+ \varepsilon^2 [w_{21}(z)\cos(2\omega+\alpha)x + w_{22}(z)\cos(2\omega-\alpha)x + w_{20}(z)\cos\alpha x] + \ldots,$$

где α — волновое число возмущений ($\alpha \neq \omega$).

Аналогичные разложения (по косинусам) имеют место и для функций Π', T', Θ' и S'. Характерно, что в фурье-разложения возмущений вошли лишь гармоники $\sin(k\omega+\alpha)x$ и $\cos(k\omega+\alpha)x$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$), возникающие при взаимодействии гармоник $\sin k\omega x$ и $\cos k\omega x$ режима (2.2) с базисными гармониками $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ возмущений.

Подставляя (3.2) в (1.1), линеаризуя полученную задачу в окрестности двумерного стационарного режима (2.2), приравнивая выражения, стоящие при одинаковых степенях ε, и разделяя переменные, приходим к рекуррентной цепочке линейных краевых задач. Первая из этих задач служит для определения главного члена $R_0^{(0)}$ разложения критического значения R_0 числа Рэлея в ряд (3.1) и соответствующих ему собственных функций. Последующие краевые задачи являются неоднородными. Условия их разрешимости позволяют найти остальные коэффициенты разложения (3.1).

Опуская громоздкие выкладки, приведем только результаты:

$$\text{(3.3)} \qquad R_0^{(1)} = 0, \quad R_0^{(2)} = I_2/2\alpha I_1, \quad I_1 = \int_0^1 (\mu s_1 - \tau_1)\, w_1 dz,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[f_1 w_1 + \alpha^2 R_0^{(0)} \Pr\left(1 + \mu\frac{\Pr}{\Pr_d}\right) f_2 \tau_1 + \alpha^2 R_0^{(0)} \mu \Pr_d f_3 \left(s_1 + \frac{\Pr}{\Pr_d}\tau_1\right)\right] dz,$$

$$f_1 = [(w_{12} - w_{11})(D^3 w_{01} + \alpha^2 D w_{01}) - (D^2 w_{12} - D^2 w_{11}) D w_{01}]/\omega +$$
$$+ [w_{01} D^3 w_{11} - \alpha(\alpha + 2\omega) w_{01} D w_{11} - D^2 w_{01} D w_{11}]/(\alpha + \omega) + [w_{01} D^3 w_{12} -$$
$$- \alpha(\alpha - 2\omega) w_{01} D w_{12} - D^2 w_{01} D w_{12}]/(\alpha - \omega) - 2\alpha(w_{12} + w_{11}) D w_{01},$$
$$f_2 = D w_{01}[(\alpha - \omega)\tau_{12} - (\alpha + \omega)\tau_{11}]/\omega - w_{01}(D\tau_{12} + D\tau_{11}) + \omega\tau_{01} \times$$
$$\times [D w_{12}/(\alpha - \omega) - D w_{11}(\alpha + \omega)] - D\tau_{01}(w_{12} + w_{11}) - 2 w_1 D\tau_{00},$$
$$f_3 = D w_{01}[(\alpha - \omega) s_{12} - (\alpha + \omega) s_{11}]/\omega - w_{01}(D s_{12} + D s_{11}) + \omega s_{01} \times$$
$$\times [D w_{12}/(\alpha - \omega) - D w_{11}/(\alpha + \omega)] - D s_{01}(w_{12} + w_{11}) - 2 w_1 D s_{00}.$$

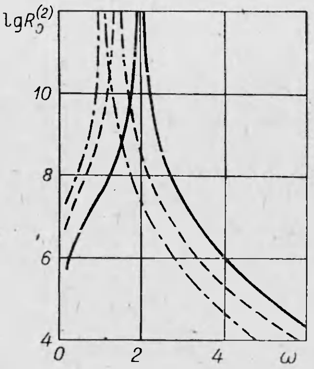
Здесь $D = d/dz$; $\mu = \beta_S k \chi \bar{S}/\beta d$ — термоконцентрационный параметр.

При выводе формул (3.3) предполагалось, что $\xi = khQ/\varkappa \approx 0$. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением случая не слишком толстого слоя и таких жидкостей, у которых коэффициент термодиффузии k мал по сравнению с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$. Не составляет, разумеется, труда рассмотреть и случай $\xi \neq 0$, при этом, однако, формулы (3.3) становятся существенно более громоздкими. Для нечетных возмущений вид формул (3.3) сохраняется.

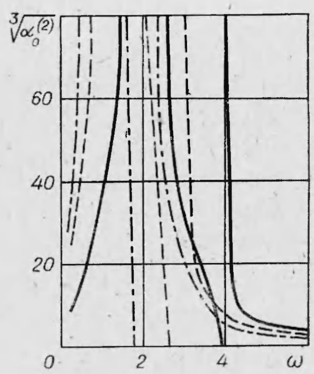
4. Численные результаты. Для отыскания первых двух ненулевых коэффициентов разложения критического значения числа Рэлея в ряд (3.1) требуется решить спектральную задачу для определения $R_0^{(0)}$, w_1, τ_1, s_1 и три неоднородные краевые задачи для определения функций w_{01}, τ_{01}, s_{01}; w_{11}, τ_{11}, s_{11}; w_{12}, τ_{12}, s_{12}. Каждая из этих задач сводилась к краевой задаче для системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решалась методом пристрелки на ЭВМ БЭСМ-6.

Расчеты проводились для случая $\Pr = 7$, $\Pr_d = 813$, $m = 0{,}0436$, $\mu > 0$, что соответствует слою морской воды (примесь, содержащаяся в жидкости,— соль), свободная поверхность которого соприкасается с воздухом.

С физической точки зрения наибольший интерес представляет значение α_0 волнового числа возмущений α, доставляющее минимум критическому значению числа Рэлея, поэтому при вычислениях проводилась чис-



Фиг. 1



Фиг. 2

ленная минимизация $R_0(\alpha)$ по α. Нетрудно убедиться, что α_0 раскладывается в ряд

$$\alpha_0 = \alpha_0^{(0)} + \varepsilon^2\alpha_0^{(2)} + \ldots,$$

где $\alpha_0^{(0)}$ — значение волнового числа α, доставляющее минимум функции $R_0^{(0)}(\alpha)$, а поправка $\alpha_0^{(2)}$ определяется по формуле

$$\alpha_0^{(2)} = -\left[\frac{dR_0^{(2)}}{d\alpha}\Big/\frac{d^2R_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=\alpha_0^{(0)}}.$$

Результаты вычислений зависимостей поправок $R_0^{(2)}$ и $\alpha_0^{(2)}$ к критическим значениям $R_0^{(0)}$ и $\alpha_0^{(0)}$ числа Рэлея и волнового числа возмущений от частоты модуляции температурного поля ω при различных значениях термоконцентрационного параметра μ представлены на фиг. 1, 2. Сплошные линии соответствуют $\mu = 0{,}1\,(\alpha_0^{(0)} = 2{,}00,\ R_0^{(0)} = 592)$, штриховые — $\mu = 1\ (\alpha_0^{(0)} = 1{,}45,\ R_0^{(0)} = 256)$, штрихпунктирные — $\mu = 2(\alpha_0^{(0)} = 1{,}09,\ R_0^{(0)} = 150)$. Кривые $R_0^{(2)}(\omega)$ и $\alpha_0^{(2)}(\omega)$ претерпевают разрывы в точках $\omega = \alpha_0^{(0)}$ и $\omega = 2\alpha_0^{(0)}$, так как при взаимодействии возмущений с базисной частотой $\alpha_0^{(0)}$ и гармонических колебаний температуры с частотами ω, близкими к $\alpha_0^{(0)}$ и $2\alpha_0^{(0)}$, возникают резонансы. В этих двух исключительных точках разложение (3.1) теряет силу.

В заключение отметим, что в случае, когда волновое число возмущений не является критическим $(\alpha \neq \alpha_0^{(0)})$, число резонансов увеличивается. Если отбросить в разложениях(2.2) и (3.3) члены $O(\varepsilon^3)$, то общее число резонансов не превосходит пяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. **Возовой Л. П., Непомнящий А. А.** Конвекция в горизонтальном слое при наличии пространственной модуляции температуры на границах.— В кн.: Гидродинамика. Пермь, 1974, вып. 7.
3. **Изаксон В. Х., Юдович В. И.** О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.

Поступила 13/II 1984 г.