5. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. Влияние температуры на критические условия откольного разрушения металлов.— ПМТФ, 1980, № 4.
6. Карташов Э. М., Бартенев Г. М. Теория изотермы долговечности и предельные характеристики разрушения хрупких твердых тел.— ФХММ, 1980, т. 16, № 5.

УДК 539.374

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

М. Ш. ШТЕЙН

(*Тернополь*)

1. Система уравнений идеально пластического тела. Рассмотрим тело вращения в координатной системе r, φ, z, считая, что компоненты тензора напряжений и скорости перемещений не зависят от угла φ.
Уравнения равновесия при этом имеют вид

$$\partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{rz}/\partial z + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0,\quad \partial\tau_{rz}/\partial r + \partial\sigma_z/\partial z + \tau_{rz}/r = 0. \tag{1.1}$$

Через u, v обозначим компоненты вектора скорости перемещений вдоль осей r, z соответственно. В качестве закона течения принимается ассоциированный закон [1, 2] с условиями пластичности Мизеса и Треска:

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 - 3/2 = 0; \tag{1.2}$$

$$(\sigma_r - \sigma_z - 2\sigma_\varphi + 2\varkappa)^2 - (\sigma_r - \sigma_z)^2 - 4\tau_{rz}^2 = 0, \tag{1.3}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_1 \text{ или } \sigma_2 > \sigma_\varphi, \\ -1, & \text{если } \sigma_1 \text{ или } \sigma_2 < \sigma_\varphi, \end{cases}$$

σ_1, σ_2 — главные компоненты тензора напряжений в плоскости r, z. Здесь и далее все компоненты напряжений отнесены к $2\tau_s$. Условия (1.3) соответствуют граням призмы пластичности Треска $|\sigma_1 - \sigma_\varphi| = 1$, $|\sigma_2 - \sigma_\varphi| = 1$*. Тогда ассоциированный закон течения с пластическим потенциалом (1.2) дает

$$\begin{gathered} \partial u/\partial r = \lambda(2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z),\quad \partial v/\partial z = \lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\varphi), \\ \partial u/\partial z + \partial v/\partial r = 6\lambda\tau_{rz},\quad u/r = \lambda(2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Аналогично для условия Треска

$$\begin{gathered} \partial u/\partial r = \lambda(\sigma_z - \sigma_\varphi + \varkappa),\quad \partial v/\partial z = \lambda(\sigma_r - \sigma_\varphi + \varkappa), \\ \partial u/\partial z + \partial v/\partial r = -2\lambda\tau_{rz},\quad u/r = \lambda(2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z - 2\varkappa). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Из (1.2), (1.3) и выражений для u/r в (1.4), (1.5) найдем окружное напряжение σ_φ и множитель λ:
для условия Мизеса

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} + \xi\Delta_1,\quad \lambda = \frac{u}{r}\frac{1}{2\xi\Delta_1}, \tag{1.6}$$

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{3}{4}\left\{1 - \left[(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2\right]\right\}},\quad \xi = \begin{cases} 1, & \sigma_\varphi > \sigma \\ -1, & \sigma_\varphi < \sigma \end{cases},\quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2};$$

для условия Треска

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \frac{\eta}{2}\Delta_2 - \varkappa,\quad \lambda = \frac{u}{r}\frac{\eta}{\Delta_2}, \tag{1.7}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2},$$

$\varkappa = 1$, $\eta = 1$, если $\sigma_1 - \sigma_\varphi = 1$, $\varkappa = -1$, $\eta = 1$, если $\sigma_\varphi - \sigma_1 = 1$,

---

* Грани $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$ из рассмотрения опущены, так как приводят к тривиальному случаю $u \equiv 0$ [2].

$$\varkappa = 1,\ \eta = -1,\ \text{если}\ \sigma_2 - \sigma_\varphi = 1,\ \varkappa = -1,\ \eta = -1,\ \text{если}\ \sigma_\varphi - \sigma_2 = 1.$$

Введем далее переменные Леви

$$\sigma_r = \sigma + \tau\cos 2\psi,\ \sigma_z = \sigma - \tau\cos 2\psi,\ \tau_{rz} = \tau\sin 2\psi;$$
$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = (\sigma_r + \sigma_z)/2,\ \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

(ψ — угол между первым главным направлением и осью r в плоскости r, z) и подставим значения σ_φ и λ (1.6), (1.7) в уравнения равновесия (1.1) и в равенства (1.4), (1.5) соответственно. После чего в результате некоторых преобразований получим квазилинейную систему уравнений первого порядка для определения пяти функций σ, ψ, τ, u, v в виде

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} - 2\tau\left(\sin 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial r} - \cos 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \cos 2\psi\frac{\partial\tau}{\partial r} + \sin 2\psi\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{f_1}{r}, \tag{1.8}$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\tau\left(\cos 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \sin 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \sin 2\psi\frac{\partial\tau}{\partial r} - \cos 2\psi\frac{\partial\tau}{\partial z} = -\frac{\tau\sin 2\psi}{r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{f_3}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u}{r},$$
$$-\sin 2\psi\frac{\partial u}{\partial r} + \cos 2\psi\frac{\partial v}{\partial r} + \cos 2\psi\frac{\partial u}{\partial z} + \sin 2\psi\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

где

$$f_1 = \begin{cases} -\tau\cos 2\psi + \xi\sqrt{\frac{3}{4}(1-4\tau^2)} & \text{для условия Мизеса,}\\ -\tau\cos 2\psi + \eta\tau - \varkappa & \text{для условия Треска;}\end{cases} \tag{1.9}$$

$$f_3 = \begin{cases} -\dfrac{3u\tau\sin 2\psi}{\xi\sqrt{\frac{3}{4}(1-4\tau^2)}} & \text{для условия Мизеса,}\\ -\eta u\sin 2\psi & \text{для условия Треска.}\end{cases} \tag{1.10}$$

Таким образом, дифференциальные операторы систем (1.8), отвечающие условиям пластичности Мизеса и Треска, совпадают, отличаются лишь правые части первого, третьего уравнений. Нетрудно заметить, что третье уравнение системы (1.8) — результат исключения множителя λ из последних соотношений (1.4), (1.5), четвертое уравнение представляет условие несжимаемости (результат сложения первых трех выражений (1.4) или (1.5)), а последнее уравнение системы следует как отношение разности первых двух к четвертому в (1.4), (1.5) и является условием соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций. В [3] получены точные автомодельные решения системы (1.8).

2. Гиперболическая регуляризация, соотношения на характеристиках. Подвергнем систему (1.8) характеристическому анализу, для чего запишем ее в матричном виде

$$A\mathbf{t}_r + B\mathbf{t}_z = \mathbf{f}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1\\ t_2\\ t_3\\ t_4\\ t_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma\\ \psi\\ \tau\\ u\\ v\end{bmatrix},\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1/r\\ -\tau\sin 2\psi/r\\ f_3/r\\ -u/r\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{t}_r = \frac{\partial\mathbf{t}}{\partial r},\quad \mathbf{t}_z = \frac{\partial\mathbf{t}}{\partial z},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2\tau c & d & 0 & 0\\ 0 & 2\tau d & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -c & d\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2\tau d & c & 0 & 0\\ 1 & 2\tau c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & d & c\end{bmatrix},$$

$$c = \sin 2\psi,\ d = \cos 2\psi,\ \mu = \nu = 0,$$

откуда видно, что матрицы A, B вырожденные для любых функций $\psi(r, z)$, $\tau(r, z)$ и система (1.8) не приводится к нормальному виду. Соответствующая характеристическая форма [4, 5] тождественно равна нулю для любых направлений $\mathbf{n}(n_1, n_2)$ в плоскости r, z

$$(n_1, n_2) = 2(\mu n_1 + \nu n_2)\left[\left(n_1^2 - n_2^2\right)\cos 2\psi + 2n_1n_2\sin 2\psi\right]^2 = 0, \tag{2.2}$$

и уравнения для напряжений и скоростей перемещений (1.8) в случае осевой симметрии, являющиеся прямым следствием ассоциированного закона течения с условиями пластичности Мизеса и Треска, не подлежат классификации (система без типа *).

Рассмотрим возможность регуляризации системы (1.8), считая, что последняя должна быть гиперболической с кратными характеристиками (характеристики поля напряжений совпадают с характеристиками поля скоростей).

Пусть в (2.2) $\mu \neq 0$ и $\nu \neq 0$, тогда

$$(2.3)\qquad \left[\left(n_1^2 - n_2^2\right)\cos 2\psi + 2n_1n_2 \sin 2\psi\right]^2 = 0 \text{ или } \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + 2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\operatorname{tg} 2\psi - 1 = 0,$$

откуда

$$(2.4)\qquad n_1/n_2 = -\operatorname{tg}(\psi - \pi/4),\ (n_1/n_2) = -\operatorname{tg}(\psi + \pi/4).$$

Введем в рассмотрение непрерывно дифференцируемые функции $\varphi^{\mp}(r, z) = \mathrm{const}$, определяющие в плоскости r, z гладкие кривые. А в качестве векторов направлений $\mathbf{n}^{\mp}(n_1^{\mp}, n_2^{\mp})$ возьмем $\mathbf{n}^{\mp} = \operatorname{grad} \varphi^{\mp}(r, z)$. Тогда вдоль линий $\varphi^{+}(r, z) = \mathrm{const}$ будем иметь соответственно

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} dr/dz &= \operatorname{ctg}(\psi - \pi/4) = a_1 = a_3 = a_4 \ (\alpha\text{-линия}),\\ dr/dz &= \operatorname{ctg}(\psi + \pi/4) = a_2 = a_5 \ (\beta\text{-линия}).\end{aligned}$$

Следовательно, если допустить, что $\mu, \nu \neq 0$, то характеристической форме (2.2) отвечают двукратные характеристики, определяемые уравнениями (2.5). Из (2.5) видно, что α-, β-линии ортогональны между собой и совпадают с линиями максимальных касательных напряжений в плоскости r, z, т. е. являются линиями скольжения. Заметим, что (2.3) соответствует первому, второму и четвертому, пятому уравнениям системы (1.8). Третьему уравнению отвечает множитель $\mu n_1 + \nu n_2$. Потребуем, чтобы n_1/n_2 равнялось $-\operatorname{tg}(\psi - \pi/4)$ или $-\operatorname{tg}(\psi + \pi/4)$, как в (2.4), т. е.

$$(2.6)\qquad \begin{gathered} \mu n_1 + \nu n_2 = 0 \Rightarrow n_1/n_2 = -\nu/\mu = -\operatorname{tg}(\psi + \gamma\pi/4) \Rightarrow\\ \nu = \varepsilon,\ \mu = \varepsilon \operatorname{ctg}(\psi + \gamma\pi/4).\end{gathered}$$

Здесь ε — малый параметр, а γ принимает значение 1 или -1. Итак, регуляризация системы (1.8), по существу, свелась к введению в левую часть третьего уравнения дополнительного малого слагаемого

$$(2.7)\qquad \varepsilon\left[\operatorname{ctg}\left(\psi + \gamma\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{\partial\tau}{\partial z}\right] + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{f_3}{r}.$$

Таким образом, в системе уравнений (1.8) вместо третьего уравнения предлагается использовать уравнение (2.7). Уравнения (1.8) превращаются при этом в гиперболическую квазилинейную систему с кратными характеристиками ($\gamma = -1 \Rightarrow \alpha$-линия трехкратная, β-линия двукратная; $\gamma = 1 \Rightarrow \alpha$-линия двукратная, β-линия трехкратная).

Можно заметить, что (2.7) допускает физическую интерпретацию. Действительно, согласно (1.4), (1.5), скорость сдвига γ_{rz} в произвольной точке области пластического течения пропорциональна касательному напряжению τ_{rz} в этой точке, что отражено правой частью равенства (2.7). В квадратных скобках слева выписана производная от максимального касательного напряжения τ в направлении одного из семейств линий скольжения. Таким образом, если допустить существование в пластической области некоторой системы линий скольжения с параметром дискретизации ε [7], то сдвиг γ_{rz} в каждой точке определяется касательным напряжением τ_{rz} и проекцией градиента максимального касательного напряжения τ со знаком — на активное семейство линий скольжения, так как элементы деформируются по линиям скольжения в направлении наибольшего роста максимального касательного напряжения.

Будем считать для определенности, что в (2.7) $\gamma = -1$, и введем операторы дифференцирования вдоль характеристик

$$\frac{d^-}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{ctg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\ \text{(вдоль } \alpha\text{-линии)},$$

$$\frac{d^+}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{ctg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\ \text{(вдоль } \beta\text{-линии)}.$$

* В [6] показывается, что осесимметричная задача с условием Мизеса эллиптическая, при этом дифференцированием осуществляется переход к системе второго порядка. Эквивалентность так полученной системы и исходной не исследовалась, а для нелинейных систем такой переход не тривиален [4] и в общем случае не правомерен. В [1] лишь подчеркивается, что осесимметричная задача с условием Мизеса не гиперболическая. Для условия Треска в [2] исследовались уравнения для скоростей (кинематически определимая задача). Они оказываются гиперболическими. Если из третьего уравнения (1.8) выразить $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$ и подставить в пятое уравнение, то приходим к системе, полученной в [2].

Тогда, согласно алгоритму приведения системы (1.8) с учетом (2.7) к характеристической форме [5], приходим к соотношениям на характеристиках:

$$d^-\sigma - 2\tau d^-\psi + k_1 d^-v = G_1 dr, \tag{2.8}$$

$$d^+\sigma + 2\tau d^+\psi + k_2 d^+v = G_2 dr, \quad d^-\tau + k_3 d^-v = G_3 dr;$$

$$d^-U - V d^-\psi = (a_4 U - V)dz/2r, \quad d^+V + U d^+\psi = (a_5 V + U)dz/2r. \tag{2.9}$$

Здесь

$$G_1 = \frac{1}{r}\left[f_1 - \frac{\tau \sin 2\psi}{a_1} - \frac{1}{\varepsilon}(-f_3 + u \operatorname{tg} 2\psi)\right],$$

$$G_2 = \frac{1}{r}\left[f_1 - \frac{\tau \sin 2\psi}{a_2} - \frac{1}{\varepsilon} f_3\right], \quad G_3 = \frac{1}{\varepsilon r}(-f_3 + u \operatorname{tg} 2\psi),$$

$$k_1 = \frac{2a_1}{\varepsilon} \operatorname{tg} 2\psi, \quad k_2 = -\frac{2a_2}{\varepsilon} \operatorname{tg} 2\psi, \quad k_3 = \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{tg} 2\psi,$$

U, V — скорости перемещений вдоль α-, β-линий соответственно, а f_1, f_3 определяются согласно условиям Мизеса и Треска из (1.9), (1.10). Заметим, что при r, $\varepsilon \to \infty$ уравнения (2.8) переходят в соотношения Генки, а (2.9) — в соотношения Гейрингер плоской задачи теории идеальной пластичности.

3. Итерационный подход к решению краевых задач для системы (2.8), (2.9). Математическая теория квазилинейных гиперболических систем первого порядка [4, 5] обеспечивает существование, единственность и корректность задачи Коши, характеристической и смешанной задач для таких систем. Однако решение реальных прикладных задач для системы (2.8), (2.9) затруднено из-за того, что краевые условия на граничных поверхностях для рассматриваемой системы должны одновременно содержать компоненты напряжений (вектор) и скоростей перемещений, при этом граница жесткой и пластической областей заранее не известна. Совместное задание на граничных поверхностях векторов напряжений и скоростей перемещений в реальных задачах не представляется возможным. Поэтому хотелось бы иметь алгоритм решения краевых задач для системы (2.8), (2.9), позволяющий напряжения и скорости искать раздельно (по аналогии с задачей о плоской деформации), но в определенной последовательности [8, 9]. Например, из уравнений (2.9) при известной функции ψ найдем U, V, а затем, подставляя их как известные в (2.8), определим σ, ψ, τ и т. д. Существование такого подхода обеспечивается совпадением областей определенности решений для напряжений и скоростей перемещений (характеристики (2.5) совпадают).

В соответствии со сказанным определим вектор-функции $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$, отвечающие напряженному и деформированному состоянию, в виде

$$\mathbf{S} = [S_1, S_2, S_3, 0, 0], \quad \mathbf{U} = [0, 0, 0, u_4, u_5], \tag{3.1}$$

где

$$S_1 = \sigma = t_1, \ S_2 = \psi = t_2, \ S_3 = \tau = t_3, \ u_4 = u = t_4, \ u_5 = v = t_5.$$

Тогда $\mathbf{t}$ из (2.1) представляется прямой суммой и систему (2.8), (2.9) можно записать как

$$\mathbf{l}_k \cdot \left[\frac{\partial(\mathbf{S}+\mathbf{U})}{\partial z} + a_k \frac{\partial(\mathbf{S}+\mathbf{U})}{\partial r}\right] = g_k(r, \mathbf{S}+\mathbf{U}) \quad (k = 1, 2, 3); \tag{3.2}$$

$$\mathbf{l}_k \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} + a_k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r}\right] = g_k(r, \mathbf{S}+\mathbf{U}) \quad (k = 4, 5), \tag{3.3}$$

где g_k — правые части соотношений (2.2) и (2.9), а $\mathbf{l}_k$ — собственные векторы характеристической матрицы системы (1.8), (2.7), отвечающие собственным числам a_k:

$$\mathbf{l}_1 = [1, -2S_3, 0, 0, k_1], \ \mathbf{l}_2 = [1, 2S_3, 0, 0, k_2],$$

$$\mathbf{l}_3 = [0, 0, 1, 0, -k_3], \ \mathbf{l}_4 = [0, 0, 0, a_4, 1], \ \mathbf{l}_5 = [0, 0, 0, a_5, 1].$$

Будем считать, что начальные условия задачи Коши для системы (1.8) с регуляризацией (2.7) заданы на отрезке оси $z = 0$, $a \leqslant r \leqslant b$ (общая задача Коши сводится к рассматриваемой заменой независимых переменных r, z, что не меняет вида уравнений (1.8)):

$$\sigma(r, 0) = \sigma_0(r), \ \psi(r, 0) = \psi_0(r), \ \tau(r, 0) = \tau_0(r),$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \ v(r, 0) = v_0(r).$$

Это соответствует, согласно введенным вектор-функциям (3.1), следующим начальным условиям для характеристической системы (3.2), (3.3):

$$\mathbf{S}_0(r) = \left[\mathbf{S}_1^0(r), \mathbf{S}_2^0(r), \mathbf{S}_3^0(r), 0, 0\right], \quad \mathbf{U}_0(r) = \left[0, 0, 0, u_4^0(r), u_5^0(r)\right]. \tag{3.4}$$

Предполагается, что $\mathbf{S}_0(r)$, $\mathbf{U}_0(r) \in G^1_{[a,b]}$. Гладкость же остальных входных данных g_k, k_k, a_k следует из (1.9), (1.10), (2.5), (2.8), (2.9) при r, $\varepsilon > 0$.

Для построения решения задачи (3.2) — (3.4) определим итерационный процесс. Пусть $\mathbf{U}^{(1)}$ — вектор-функция, принадлежащая $C^{(1)}$ и такая, что $\mathbf{U}^{(1)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r)$. Подставляя $\mathbf{U}^{(1)}(r, z)$ в систему (3.2), определим $\mathbf{S}^{(1)}$ как решение задачи Коши с начальными условиями $\mathbf{S}^{(1)}(r, 0) = \mathbf{S}_0(r)$. После чего найденное решение $\mathbf{S}^{(1)}(r, z)$ подставляется в уравнения (3.3) и решается задача Коши $\mathbf{U}^{(2)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r)$ уже для линейной системы. Затем определенное приближение $\mathbf{U}^{(2)}(r, z)$ подставляется в уравнения (3.2) и определяется $\mathbf{S}^{(2)}(r, 0) = \mathbf{S}_0(r)$. И так этот процесс повторяется неоднократно.

Пусть построено приближение $\mathbf{U}^{(i)} \in C^1$, тогда для $\mathbf{S}^{(i)}$ имеем

$$\mathbf{l}_k^{(i)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial z} + a_k^{(i)} \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial r}\right] = g_k^{(i)} - \mathbf{l}_k^{(i)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{U}^{(i)}}{\partial z} + a_k^{(i)} \frac{\partial \mathbf{U}^{(i)}}{\partial r}\right] \quad (k = 1, 2, 3), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{S}^{(i)}(r, 0) = \mathbf{S}_0(r),$$

а $\mathbf{U}^{(i+1)}$ определим из решения задачи Коши для линейной системы

$$\mathbf{l}_k^{(i)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{U}^{(i+1)}}{\partial z} + a_k^{(i)} \frac{\partial \mathbf{U}^{(i+1)}}{\partial r}\right] = g_k^{(i)} \quad (k = 4, 5), \quad \mathbf{U}^{(i+1)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r). \tag{3.6}$$

Из теорем существования решения для квазилинейных и линейных систем [3, 4] следует, что в области определенности $G^{(i)}$ задач (3.5), (3.6) существует решение $\mathbf{S}^{(i)}$, $\mathbf{U}^{(i+1)} \in C^{(i)}$. Так что все приближения определены и непрерывно дифференцируемы в областях $G^{(i)}$ (области определенности задач (3.5), (3.6) совпадают, так как характеристики системы (3.5) являются и характеристиками (3.6)). Кроме того, так как исходная задача (3.2) — (3.4) квазилинейна, то область G определенности ее решения отыскивается одновременно с решением $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$ и, вообще говоря, заранее не известна. Согласно [4, 5], можно указать область $G_0 \subseteq G$ переменных r, z, в которой решение и его первые производные остаются заведомо ограниченными.

4. Ограниченность последовательных приближений и их первых производных. Покажем, что существует некоторая область G_1, принадлежащая области G_0 и всем областям $G^{(i)}$, такая, что в ней имеет место ограниченность $\mathbf{S}^{(i)}$, $\mathbf{U}^{(i)}$ и их первых производных. Для этого выпишем продолженную систему для уравнений (3.2), (3.3). Продолженная система для квазилинейных гиперболических уравнений определяется дифференцированием исходной по независимым переменным [5] и приводима к инвариантам Римана, которые в нашем случае имеют вид

$$T_k = \mathbf{l}_k \cdot \frac{\partial (\mathbf{S} + \mathbf{U})}{\partial r} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5).$$

Тогда продолженная система для уравнений (3.2), (3.3) принимает вид

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} + a_k \frac{\partial T_k}{\partial r} = L^k + L_\alpha^k T_\alpha + L_{\alpha\beta}^k T_\alpha T_\beta, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial t_k}{\partial z} = F^k + F_\alpha^k T_\alpha \quad (k, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 5).$$

Здесь

$$L^k = \frac{\partial f_k}{\partial r} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5); \quad F^k = \frac{f_2 + (-1)^{k+1} f_1}{\Delta} c \quad (k = 1, 2); \quad \Delta = \begin{cases} 2, & k = 1, \\ 4t_3, & k = 2; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$F^3 = f_3, \quad F^4 = \frac{f_4 - f_5}{a_4 - a_5}; \quad F^5 = c;$$

$$L_\alpha^k - \frac{(-1)^{\alpha+k}}{4t_3}\left[\left(2 + \frac{\partial k_k}{\partial t_2}\right) c + (-1)^k \frac{\partial f_k}{\partial t_2} + 2f_3\right] \quad (\alpha, k = 1, 2);$$

$$L_\alpha^3 = (-1)^\alpha \left[\frac{\partial h_3}{\partial t_2} c + \frac{\partial f_3}{\partial t_2}\right] \quad (\alpha = 1, 2); \quad L_\alpha^k = \frac{(-1)^\alpha}{4t_3} \frac{\partial f_k}{\partial t_2} \quad (\alpha = 1, 2, \ k = 4, 5);$$

$$L_3^k = 2\left[\frac{1}{2} \frac{\partial f_k}{\partial t_2} + (-1)^{k+1} g + (-1)^{k+1} cd\right] \quad (k = 1, 2); \quad L_3^3 = \frac{\partial f_3}{\partial t_3}, \quad L_3^4 = L_3^5 = 0;$$

$$L_\alpha^k = \frac{a}{a_4 - a_5}\left[\left((-1)^{\alpha+k+1} 2f_3 + (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial f_k}{\partial t_2}\right) d + \left((-1)^{k+1} k_3 + (-1)^{\alpha+k} \frac{\partial k_k}{\partial t_3}\right) g + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\alpha-1} k_3 \frac{\partial f_k}{\partial t_3} + \frac{(-1)^{\alpha+k}}{a} \frac{\partial f_k}{\partial t_5}\right] \quad (k = 1, 2, \ \alpha = 4, 5); \quad a = \begin{cases} a_5, & k = 4, \\ a_4, & k = 5; \end{cases}$$

$$L_\alpha^k = \frac{a}{a_4 - a_5}\left[(-1)^{\alpha+1}\left(\frac{\partial f_k}{\partial t_2} d + \frac{\partial f_k}{\partial t_5}\right) + \frac{(-1)^\alpha}{a} (cd + g) \frac{\partial a_k}{\partial t_2}\right] \quad (\alpha, k = 4, 5);$$

$$L_\alpha^3 = \frac{a}{a_4 - a_5}\left[(-1)^{\alpha+1} \frac{\partial f_3}{\partial t_2} d + (-1)^\alpha \frac{\partial k_3}{\partial t_2} g + (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial f_3}{\partial t_3} k_3 + \frac{(-1)^\alpha}{a} \frac{\partial f_3}{\partial t_5}\right] \quad (\alpha = 4, 5);$$

$$F^1_\alpha = (-1)^\alpha \frac{a_1}{2}, \quad F^2_\alpha = (-1)\frac{a_\alpha}{4t_3} \ (\alpha = 1, 2); \quad F^k_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, 2, \ k = 3, 4, 5);$$

$$F^3_3 = -a_3; \quad F^k_3 = 0 \ (k = 1, 2, 4, 5);$$

$$F^1_\alpha = (-1)^\alpha \frac{k_2 - k_1}{2}\frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5}; \quad F^2_\alpha = (-1)^\alpha d\frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5}; \quad F^3_\alpha = (-1)^\alpha k_3 \frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5},$$

$$F^5_\alpha = (-1)^\alpha \frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5} \ (\alpha = 4, 5); \quad F^4_4 = \frac{2a_4 + a_5}{a_4 - a_5}; \quad F^4_5 = \frac{a_4 + 2a_5}{a_4 - a_5};$$

$$L^k_{\alpha\beta} = L^k_{\alpha\beta}\left(t_3, a_i, k_i, \frac{\partial a_i}{\partial t_2}, \frac{\partial k_i}{\partial t_2}\right) \ (i, k, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 5);$$

$$c = \frac{a_4 f_5 - a_5 f_4}{a_4 - a_5}; \quad d = \frac{k_1 + k_2}{4t_3}; \quad g = \frac{f_2 - f_1}{4t_3}.$$

Суммирование производится по греческим индексам (по индексу k оно отсутствует).

Наряду с системой (4.1) запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

(4.3) $$dP/dz = L_0(N) + L_1(N)P + L_2(N)P^2, \quad dN/dz = F_0(N) + F_1(N)P,$$

в которой коэффициенты правых частей определяются как

(4.4) $$L_0(N) = \max_{G_0(N)} \|\mathbf{L}\|, \quad \mathbf{L} = [L^1, L^2, \ldots, L^5],$$

$$L_1(N) = \max_{G_0(N)} \left\|L^k_\alpha\right\|, \quad L_2(N) = \max_{G_0(N)} \max_{\beta=1,\ldots,5} \left\|L^k_{\alpha\beta}\right\|,$$

$$F_0(N) = \max_{G_0(N)} \|\mathbf{F}\|, \quad \mathbf{F} = [F^1, F^2, \ldots, F^5],$$

$$F_1(N) = \max_{G_0(N)} \left\|F^k_\alpha\right\|, \quad G_0(N) = \{a \leqslant r \leqslant b, \ 0 \leqslant z \leqslant z_0; \ \|\mathbf{t}\| \leqslant N\}.$$

Обозначим через N_0, P_0 величины

$$N_0 = \max_{a \leqslant r \leqslant b} \|\mathbf{S}_0(r) + \mathbf{U}_0(r)\|, \quad P_0 = \max_{a \leqslant r \leqslant b} \left\|\mathbf{l}^0_k \cdot \frac{\partial(\mathbf{S}_0 + \mathbf{U}_0)}{\partial r}\right\|$$

и для системы (4.3) зададим начальные условия

(4.5) $$P(0) = P_0, \quad N(0) = N_0.$$

Систему уравнений (4.3), (4.4) будем называть мажорантной, и, следуя [5], можно показать, что функции $N(z)$, $P(z)$, являясь решением задачи (4.3) — (4.5) и оставаясь при этом ограниченными в промежутке $0 \leqslant z \leqslant z_0$, мажорируют рост решения $\mathbf{t} = \mathbf{S} + \mathbf{U}$. По функции $N(z)$ строится область G_0.

Выпишем продолженную систему для уравнений (3.5), (3.6) (в (3.5) вместо (i) напишем $(i+1)$) в виде

(4.6) $$\frac{\partial T^{(i+1)}_k}{\partial z} + a^{(i+1)}_k \frac{\partial T^{(i+1)}_k}{\partial r} = L^k + \Lambda^k_\alpha T^{(i)}_\alpha + M^k_\alpha T^{(i+1)}_\alpha + L^k_{\alpha\beta} T^{(i)}_\alpha T^{(i+1)}_\beta,$$

$$\frac{\partial t^{(i+1)}_k}{\partial z} = F^k + F^k_\alpha T^{(i+1)}_\alpha \quad (k, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 5),$$

где $$T^{(i+1)}_k = \mathbf{l}_k \cdot \frac{\partial(\mathbf{S} + \mathbf{U})^{(i+1)}}{\partial r}, \quad \mathbf{l}_k = \begin{cases} \mathbf{l}^{(i+1)}_k & (k = 1, 2, 3), \\ \mathbf{l}^{(i)}_k & (k = 4, 5), \end{cases}$$

а L^k, F^k, F^k_α, $L^k_{\alpha\beta}$ определяются в соответствии с (4.2), лишь вместо $\mathbf{t}$ следует подставить $\mathbf{t}^{(i)}$, $\mathbf{t}^{(i+1)}$ либо $\mathbf{t}^{(i-1)}$, $\mathbf{t}^{(i)}$. Отличными являются лишь коэффициенты Λ^k_α, M^k_α:

(4.7) $$\Lambda^k_\alpha = \frac{a}{a^{(i-1)}_4 - a^{(i-1)}_5}\left[(-1)^{\alpha+1}\left(\frac{\partial f^{(i)}_k}{\partial t_2} d^{(i)} + \frac{\partial f^{(i)}_k}{\partial t_5}\right)\right],$$

$$M^k_\alpha = \frac{a}{a^{(i-1)}_4 - a^{(i-1)}_5}\left[\frac{(-1)^\alpha}{a}\left(c^{(i)} d^{(i)} + g^{(i)}\right)\frac{\partial a^{(i)}_k}{\partial t_2}\right]$$

$$(k, \alpha = 4, 5), \quad a = \begin{cases} a^{(i-1)}_5, & k = 4, \\ a^{(i-1)}_4, & k = 5. \end{cases}$$

Сравнивая коэффициенты (4.7) с аналогичными в (4.2), получим

$$L_{\alpha}^{k}(r, \mathbf{t}) = \Lambda_{\alpha}^{k}(r, \mathbf{t}, \mathbf{t}) + M_{\alpha}^{k}(r, \mathbf{t}, \mathbf{t}) \quad (k, \alpha - 4, 5), \tag{4.8}$$

$$L_{\alpha\beta}^{k}(r, \mathbf{t}) = L_{\alpha\beta}^{k}(r, \mathbf{t}, \mathbf{t}) \quad (k, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 5).$$

По аналогии с (4.3), (4.4) определим мажорантную систему для продолженной (4.6)

$$\frac{d\widetilde{P}}{dz} = L_0(\widetilde{N}) + K_1(\widetilde{N})\widetilde{P} + K_2(\widetilde{N})\widetilde{P}^2, \quad \frac{d\widetilde{N}}{dz} = F_0(\widetilde{N}) + F_1(\widetilde{N})\widetilde{P}, \tag{4.9}$$

где L_0, F_0, F_1 определяются, как и в (4.4), а

$$K_1(\widetilde{N}) = K'(\widetilde{N}) + K''(\widetilde{N}), \quad K'(\widetilde{N}) = \max_{G_0(\widetilde{N})} \Lambda_{\alpha}^{k}(r, \mathbf{x}, \mathbf{t}),$$

$$\|\mathbf{t}\| \leqslant \widetilde{N}, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant \widetilde{N},$$

$$K''(\widetilde{N}) = \max_{G_0(\widetilde{N})} \max_{\beta=1,2,\ldots,5} \left\| L_{\alpha\beta}^{k}(r, \mathbf{x}, \mathbf{t}) \right\|,$$

$$\|\mathbf{t}\| \leqslant \widetilde{N}, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant \widetilde{N}.$$

Для системы (4.9) зададим начальные условия

$$\widetilde{P}(0) = P_0, \quad \widetilde{N}(0) = N_0. \tag{4.10}$$

Сравнивая коэффициенты систем (4.3), (4.9) и учитывая равенства (4.8), имеем

$$L_1(N) \leqslant K_1(N), \quad L_2(N) \leqslant K_2(N).$$

Следовательно, решение задачи (4.9), (4.10) мажорирует рост решения мажорантной задачи (4.3) — (4.5):

$$N(z) \leqslant \widetilde{N}(z), \quad P(z) \leqslant \widetilde{P}(z).$$

Таким образом, если область G_1 построить по функции $\widetilde{N}(z)$, как строится G_0 по $N(z)$ [5], то $G_1 \subseteq G_0$.

Предположим, что все последовательные приближения $(\mathrm{S} + \mathrm{U})^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, i)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{t}^{(j)}\| \leqslant \widetilde{N}(z), \quad \|T^{(j)}\| \leqslant \widetilde{P}(z), \tag{4.11}$$

и покажем, что (4.11) имеет место и для $(i + 1)$-го приближения. Обозначим

$$t_{i+1}(z) = \sup_r \|\mathbf{t}^{(i+1)}\|, \quad T_{i+1}(z) = \sup_r \|T^{(i+1)}\|,$$

тогда из системы (4.6) будем иметь

$$\frac{dT_{i+1}}{dz} \leqslant L_0(\widetilde{N}) + K'(\widetilde{N})\widetilde{P} + K''(\widetilde{N})T_{i+1} + K_2(\widetilde{N})\widetilde{P}T_{i+1},$$

$$\frac{dt_{i+1}}{dz} \leqslant F_0(\widetilde{N}) + F_1(\widetilde{N})\widetilde{P},$$

так что, очевидно,

$$t_{i+1}(z) \leqslant \widetilde{N}(z), \quad T_{i+1}(z) \leqslant \widetilde{P}(z).$$

Так как начальное приближение можно выбрать, чтобы (4.11) удовлетворялось, то тем самым доказано, что все приближения $(\mathrm{S} + \mathrm{U})^{(i)}$ удовлетворяют (4.11) и, следовательно, область G_1 существует, принадлежит всем областям $G^{(i)}$ и G_0.

5. Равномерная сходимость в G_1 последовательных приближений. Если ввести в рассмотрение невязку

$$\rho_k^{(i+1)} = \mathrm{l}_k^{(i)} \cdot (\mathrm{U}^{(i+1)} - \mathrm{U}^{(i)}) \quad (k = 4, 5), \tag{5.1}$$

то, следуя [8], можно показать, что при малых $0 \leqslant z \leqslant z_0$ имеет место оценка

$$R_{i+1}(z) = \max_{\tau, r \in G_1, \tau \leqslant r} \|\rho^{(i+1)}\| \leqslant (\exp(qz) - 1)\|\mathrm{S}^{(i)} - \mathrm{S}^{(i-1)}\|, \quad q = \mathrm{const}. \tag{5.2}$$

Далее, используя (5.2), докажем равномерную сходимость последовательных приближений $\{\mathrm{S}^{(i)}\}$. Для этого аналогично (5.1) определим

$$\delta_k^i = \mathrm{l}_k^{(i)} \cdot (\mathrm{S}^{(i)} - \mathrm{S}^{(i-1)}) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{5.3}$$

и запишем систему (3.5), отвечающую $(i-1)$-му приближению:

$$\mathbf{l}_k^{(i-1)}\cdot\left[\frac{\partial \mathbf{S}^{(i-1)}}{\partial z}+a_k^{(i-1)}\cdot\frac{\partial \mathbf{S}^{(i-1)}}{\partial r}\right]=f_k^{(i-1)}-\mathbf{l}_k^{(i-1)}\cdot\left[\frac{\partial \mathbf{U}^{(i-1)}}{\partial z}+a_k^{(i-1)}\frac{\partial \mathbf{U}^{(i-1)}}{\partial r}\right]. \tag{5.4}$$

Используя теорему о конечных приращениях, имеем, например,

$$f_k^{(i)}-f_k^{(i-1)}=\int\limits_0^1\frac{\partial f_k}{\partial t_\beta}\left(\mathbf{t}^{(i-1)}+\lambda\left(\mathbf{t}^{(i)}-\mathbf{t}^{(i-1)}\right)\right)d\lambda\left(t_\beta^{(i)}-t_\beta^{(i-1)}\right). \tag{5.5}$$

Вычтем теперь уравнение (5.4) из уравнений (3.5) соответственно, воспользовавшись при этом соотношением (5.5) и подобными для $\mathbf{l}_k^{(i)}-\mathbf{l}_k^{(i-1)}$, $a_k^{(i)}\mathbf{l}_k^{(i)}-a_k^{(i-1)}\mathbf{l}_k^{(i-1)}$, а также учитывая возможность разрешения (5.1), (5.3) относительно $u_k^{(i+1)}-u_k^{(i)}$ $(k=4,5)$, $S_k^{(i)}-S_k^{(i-1)}$ $(k=1,2,3)$, приходим к линейной системе для

$$\frac{\partial\delta_k^{(i)}}{\partial z}+a_k^{(i)}\frac{\partial\delta_k^{(i)}}{\partial r}=\Pi_k^\beta\delta_\beta^{(i)}+X_k^\alpha\rho_\alpha^{(i)}\quad(k,\beta=1,2,3,\ \alpha=4,5). \tag{5.6}$$

Здесь Π_k^β, X_k^α определяются через функции f_k, $\mathbf{l}_k$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}$ и первые производные от них. Интегрируя (5.6) вдоль характеристик, лежащих в G_1, получим для каждой точки G_1

$$\left|\delta_k^{(i)}\right|\leqslant\int\limits_0^z\left|\Pi_k^\beta\delta_\beta^{(i)}+X_k^\alpha\rho_\alpha^{(i)}\right|d\tau,$$

где в силу (4.11) имеют место неравенства

$$\left\|\Pi_k^\beta\right\|\leqslant E,\quad\left\|X_k^\alpha\right\|\leqslant E,\quad E=\mathrm{const}.$$

Тогда, если ввести

$$D_i(z)=\max_{\tau,r\in G_1,\tau\leqslant z}\left\|\delta^{(i)}\right\|$$

и воспользоваться оценочным неравенством (5.2), записанным для $R_i(z)$, получим

$$D_i(z)\leqslant E\int\limits_0^z\left[D_{i-1}(\tau)+D_i(\tau)\right]d\tau,\quad D_i(z)\leqslant C\int\limits_0^z D_{i-1}(\tau)\,d\tau$$

или

$$D_i(z)\leqslant\mathrm{const}\frac{(Cz)^{(i-1)}}{(i-1)!},\quad C=\mathrm{const}, \tag{5.7}$$

что и доказывает равномерную сходимость в G_1 последовательных приближений $\{\mathbf{S}^{(i)}\}$. Очевидно, что из (5.2), (5.7) следует равномерная сходимость в G_1 и последовательности $\{\mathbf{U}^{(i)}\}$. Наконец, рассматривая продолженную систему (4.6) и используя непрерывную зависимость решения задачи Коши от входных данных, приходим к равномерной сходимости последовательностей $\{T^{(i)}\}$, $\{\partial\mathbf{t}^{(i)}/\partial z\}$, а следовательно, и $\{\partial\mathbf{t}^{(i)}/\partial r\}$. По известной теореме анализа это означает, что вектор-функции $\mathbf{S}=\lim\mathbf{S}^{(i)}$, $\mathbf{U}=\lim\mathbf{U}^{(i)}$ $(i\to\infty)$ непрерывно дифференцируемы в G_1. Переходя в уравнениях (3.5), (3.6) к пределу, заключаем, что $\mathbf{t}=\mathbf{S}+\mathbf{U}$ — решение задачи (3.2) — (3.4). Так как доказательство сходимости рассмотренного выше метода решения задачи Коши для системы (3.2), (3.3) основывалось на характеристическом подходе, то оно без существенных изменений переносится на случай характеристической и смешанной задач.

Таким образом, предложенная гиперболическая регуляризация уравнений идеальной пластичности и итерационный метод решения краевых задач для системы (2.7), (2.8) позволяют решать в жесткопластической постановке осесимметричные задачи с условиями Мизеса и Треска для любого сколь угодно малого $\varepsilon=\varepsilon_0>0$. Причем скорость диссипации механической энергии всюду в области течения будет неотрицательной. В качестве первого приближения поля скоростей удобно использовать решение уравнений (2.3) на сетке линий скольжения состояния полной пластичности [2, 9]. При этом будет выполнено условие вложенности областей определенности каждого из последующих приближений, начиная с первого, что оказывается существенным при численной реализации метода характеристик в конкретных задачах, так как они являются нелинейными.

В заключение отметим следующее.

1) Можно показать, что конечно-разностные уравнения, соответствующие системе (2.8), (2.9), удовлетворяют условиям регуляризирующего оператора [10], для чего достаточно при определении матриц A, B линеаризовать систему (2.1), используя итера-

цию предыдущего шага. При этом A и B определяются приближенно и являются плохо обусловленными, что допускает введение малого параметра ε и укладывается в схему построения регуляризирующего оператора [10] (сходимость по ε в данной работе не рассматривается).

2) Присутствие в уравнении (2.7) параметра γ позволяет получать качественное и количественное описание явлений образования мертвых зон, сводов, пульсаций в задачах конического истечения, волочения, прессования и внедрения. Полагая γ случайной функцией со значениями ± 1 в зависимости от геометрии процесса течения, граничных условий и других факторов, приходим к течению с областями, в которых кратность характеристик α, β меняется. Тем самым активные поверхности течения, вдоль которых выполняется третье из соотношений (2.8), могут попеременно быть α и β поверхностями. Чередование таких областей носит, вообще говоря, случайный характер, чем, может быть, и объяснены явления, упомянутые выше.

Поступила 21 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. **Штейн М. Ш.** О некоторых точных решениях уравнений идеальной пластичности в случае осевой симметрии. —ПМ, 1983, т. 19, № 10.
4. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
6. **Symond P. S.** On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity.— Quart. J. Appl. Math., 1949, vol. 6, p. 448.
7. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Некоторые постановки краевых задач пластичности.— ПМТФ, 1979, № 2.
8. **Штейн М. Ш.** Об одном приближенном методе решения уравнений теории идеальной пластичности.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
9. **Штейн М. Ш.** Напряженное и деформированное состояние полупространства в окрестности торца круговой цилиндрической выемки.— ФТПРПИ, 1975, № 4.
10. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

УДК 539.3

КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ НЕИДЕАЛЬНЫХ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н. С. АСТАПОВ, В. М. КОРНЕВ

(Новосибирск)

Наличие малых начальных геометрических неправильностей оболочечных конструкций вызывает преждевременное выпучивание. Большое внимание к исследованиям по чувствительности критической нагрузки к начальным геометрическим неправильностям уделено в [1]. В работах П. Сейда, И. Арбоша, Э. Каплана и Ч. Д. Бэбкока мл. [2] указывается, что именно начальные прогибы являются главной причиной громадного разброса экспериментальных данных и обусловливают плохую корреляцию между теоретическими и экспериментальными результатами. Важность вопроса о степени чувствительности к начальным неправильностям отмечается и в работе Р. Ш. Ферпта [2].

В данной работе методами теории возмущений исследуются задачи линейной теории потери устойчивости неидеальных пологих цилиндрических оболочек. Рассматриваются оболочки, нагруженные поперечным и гидростатическим давлением, а также продольно сжатые оболочки. Собственные числа (критические нагрузки) и собственные функции (формы потери устойчивости) неидеальных оболочек разыскиваются в виде асимптотических рядов по малому параметру, характеризующему амплитуду начальных неправильностей. Для первых членов разложений получены явные формулы. В предлагаемой методике построения упомянутых собственных чисел и функций используется только исходная линейная система уравнений теории пологих оболочек.

1. Формулировка задачи. Построение асимптотических разложений собственных функций и чисел. Изучается искажение спектра в линейных задачах устойчивости неидеальных цилиндрических оболочек, за основу принят спектр в задачах устойчивости идеальных цилиндрических оболочек; система уравнений при безразмерных обозначениях для неидеальных оболочек имеет вид [3]

$$\varepsilon^2\Delta\Delta w + f_{xx} - \lambda\left(a_1 w_{xx} + a_2 w_{yy}\right) - \mu\,(h/R)\left(f_{yy}w^0_{xx} + f_{xx}w^0_{yy} - 2f_{xy}w^0_{xy}\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta\Delta f = w_{xx} - \mu\,(h/R)\left(w_{xx}w^0_{yy} + w_{yy}w^0_{xx} - 2w_{xy}w^0_{xy}\right),$$