УДК 534.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ РЕШЕТОК ЛОПАСТЕЙ ОСЕВЫХ ТУРБОМАШИН, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ОКРУЖНОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТЬЮ ПОТОКА

В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kurzin@hydro.nsc.ru

Построена система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающая аэроупругие колебания решеток лопастей в неравномерном потоке. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости и с помощью гипотезы цилиндрических сечений определение аэродинамических сил, действующих на лопасти, сведено к решению задач с использованием методов, достаточно хорошо развитых в теории решеток в нестационарном потоке. Проведен анализ возможности возникновения параметрического резонанса. Показано, что окружная неравномерность потока в проточной части турбомашин может привести к существенному уменьшению критической скорости флаттера решеток.

Ключевые слова: решетка лопастей, аэроупругие колебания, флаттер, неравномерность потока, параметрический резонанс.

Введение. В проточной части осевых турбомашин всегда имеет место окружная неравномерность поля скоростей течения рабочей среды, возникающая вследствие возмущения потока различными элементами конструкций турбомашин, например рабочими колесами, направляющими и спрямляющими аппаратами. При вращении рабочего колеса в неравномерном по окружности потоке на его лопасти действуют периодические нестационарные силы, возбуждающие их колебания. В случае если рабочей средой является газ, нестационарные аэродинамические силы, действующие на лопасти решетки рабочего колеса, достаточно малы по сравнению с упругими и инерционными силами, возникающими при их колебаниях. Поэтому в линейном приближении общая задача об аэроупругих колебаниях решетки лопастей распадается на три подзадачи: 1) о собственных колебаниях решетки лопастей в вакууме; 2) об определении нестационарных аэродинамических характеристик решетки, соответствующих ее собственным модам в вакууме; 3) о колебаниях решетки с учетом аэродинамического взаимодействия лопастей.

Наиболее полно решена первая из указанных подзадач [1, 2]. При исследовании проблем аэроупругих колебаний решеток лопастей в неравномерном потоке вторая подзадача достаточно полно решена лишь для плоской модели нестационарного обтекания решетки [3–6].

Большое количество работ посвящено также решению третьей подзадачи в рамках модели аэроупругих колебаний решеток лопастей, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами [3, 4, 7–9]. В реальных условиях в силу окружной неравномерности потока в проточной части турбомашин коэффициенты

Работа выполнена в рамках Интеграционных проектов СО РАН № 5, 40, 2.12.

аэродинамических сил в соответствующих дифференциальных уравнениях зависят от времени. Наличие таких сил может привести к возникновению параметрического резонанса, вероятность появления которого при обтекании решеток анализировалась ранее в работах [10–12]. Однако вопрос об условиях, при которых его возникновение возможно, в этих работах, по сути, не исследован.

В данной работе для решения проблемы аэроупругих колебаний решетки лопастей осевых турбомашин, обусловленных окружной неравномерностью потока, получена система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающая эти колебания, создана методика определения нестационарных аэродинамических сил, действующих на лопасти, проведен анализ возможности возникновения параметрического резонанса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания решетки лопастей осевых турбомашин, вращающейся в потоке несжимаемой жидкости с неравномерной окружной скоростью. В общем случае допускается малая геометрическая неоднородность решетки, обусловленная технологической неточностью изготовления лопастей и сборки рабочего колеса, так как возникающая при этом неоднородность динамических характеристик лопастей оказывает существенное влияние на их аэроупругие колебания [7–9]. Предполагается, что влиянием этой неоднородности на нестационарную составляющую аэродинамических сил можно пренебречь. Поэтому будем считать, что собственные частоты и собственные формы колебаний лопастей в вакууме удовлетворяют условию

$$\begin{gathered}|\omega_{sn} - \omega_{s0}| \ll \omega_{00}, \qquad \psi_{sn} = \psi_s \\ (n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1, \quad s = 1, 2, 3, \ldots),\end{gathered} \tag{1.1}$$

где ω_{sn}, ψ_s — собственная частота и собственная форма n-й лопасти, которые соответствуют s-й моде колебаний и полагаются известными.

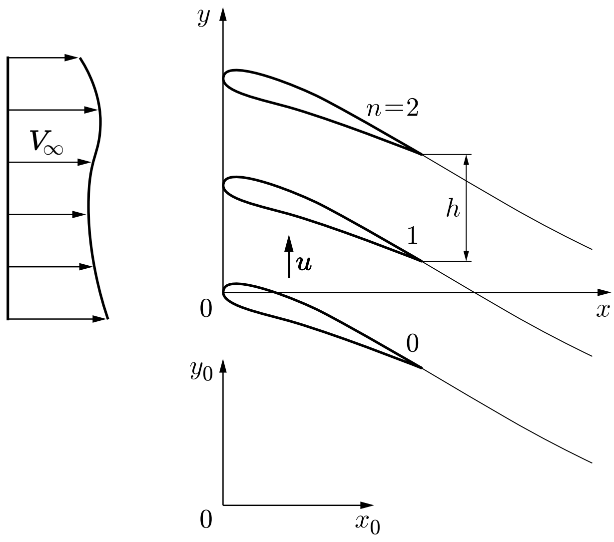
Поскольку силы трения газа не оказывают существенного влияния на колебания лопастей, нестационарные аэродинамические силы, действующие на лопасти, будем искать в рамках модели идеальной жидкости, аналогично тому как это принято в задачах аэроупругости крыла самолета и решеток турбомашин. В рассматриваемом случае для определения этих сил используем гипотезу цилиндрических сечений, которая состоит в следующем: течение жидкости в радиальном направлении проточной части осевых турбомашин оказывает незначительное влияние на интегральные характеристики аэродинамического взаимодействия решеток лопастей с потоком. Согласно этой гипотезе определение указанных характеристик сводится к решению задач обтекания прямых решеток профилей, представляющих собой развертку на плоскость цилиндрических сечений осевой решетки.

Рассмотрим обтекание прямой решетки профилей, являющейся разверткой цилиндрического сечения радиусом z решетки лопастей осевой турбомашины, вращающейся с угловой скоростью Ω в неравномерном по окружности потоке жидкости (см. рисунок). В неподвижной системе координат (x_0, y_0), относительно которой рассматриваемая решетка перемещается в направлении оси y_0 со скоростью $u = \Omega z$, вектор скорости набегающего потока представим в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{V}_\infty(x_0, y_0) = \boldsymbol{V}_0 + \varepsilon_1 \boldsymbol{V}_1(x_0, y_0), \qquad \boldsymbol{V}_0 = \mathrm{const}, \\ \max|\boldsymbol{V}_1| = |\boldsymbol{V}_0|, \qquad \varepsilon_1 \ll 1, \qquad \boldsymbol{V}_1(x_0, y_0) = \boldsymbol{V}_1(x_0, y_0 + H),\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{V}_1$ — вектор-функция, определяющая неравномерность набегающего потока; $H = Nh$ — период этой функции; h — шаг решетки; N — натуральное число, которому, очевидно, кратно число лопастей в решетке N_0. Представим периодическую векторную функцию $\boldsymbol{V}_1(x_0, y_0)$ в виде ряда Фурье

$$\boldsymbol{V}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}_0 + \sum_{r=1}^{\infty}\Big[\boldsymbol{a}_r(x_0)\cos\Big(\frac{2\pi r y_0}{H}\Big) + \boldsymbol{b}_r(x_0)\sin\Big(\frac{2\pi r y_0}{H}\Big)\Big] \tag{1.3}$$



Прямая решетка профилей

и введем подвижную систему координат (x, y), жестко связанную с решеткой:

$$x = x_0, \qquad y = y_0 - ut. \tag{1.4}$$

С учетом (1.2)–(1.4) для упрощения решения задачи о течении жидкости через решетку относительная скорость набегающего потока может быть представлена в комплексной форме:

$$\boldsymbol{W}_\infty(x, y, t) = \boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{W}_1(x, y, t); \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{W}_1(x, y, t) = \varepsilon_1 |\boldsymbol{W}_0| \sum_{r=1}^{\infty} [\boldsymbol{W}_{1r} \exp{(j\omega_r t)} + \bar{\boldsymbol{W}}_{1r} \exp{(-j\omega_r t)}]. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\boldsymbol{W}_{1r} = \frac{1}{2|\boldsymbol{W}_0|}\, [\boldsymbol{a}_r(x) - j\boldsymbol{b}_r(x)] \exp\Big(j\, \frac{2\pi r y}{H}\Big);$$

$\bar{\boldsymbol{W}}_{1r}$ — функция, комплексно сопряженная с $\boldsymbol{W}_{1r}$; $\omega_r = \omega r$; $\omega = 2\pi u/H$; $\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{u} = \mathrm{const}$; j — временная мнимая единица.

Из (1.5), (1.6) следует, что относительная скорость набегающего на решетку потока содержит периодическую по времени нестационарную составляющую, поэтому возмущение потока, возникающее в результате его взаимодействия с решеткой, в относительной системе координат также будет содержать нестационарную составляющую. Под действием аэродинамических сил, возникающих вследствие этого возмущения, лопасти решетки совершают вынужденные колебания, которые, в свою очередь, создают дополнительное возмущение потока, зависящее от характера колебаний лопастей. При этом зависимость от времени коэффициентов соответствующих аэродинамических сил в обобщенных координатах, определяющих закон колебаний лопастей, является периодической. Таким образом, при обтекании решетки потоком, скорость которого содержит периодическую по времени составляющую, лопасти решетки будут совершать не только вынужденные, но и параметрические колебания. Задача состоит в определении действующих на лопасти решетки нестационарных аэродинамических сил, которые обусловлены периодической неравномерностью набегающего потока, и в определении влияния этой неравномерности на характер колебаний лопастей, в частности на их устойчивость.

2. К определению возмущенной составляющей скорости потока. Относительная скорость потока в окрестности решетки может быть представлена в виде суммы четырех составляющих

$$\boldsymbol{W}(x,y,t)=\boldsymbol{W}_\infty(x,y,t)+\boldsymbol{w}_0(x,y)+\boldsymbol{w}_1(x,y,t)+\boldsymbol{w}(x,y,t),$$

где $\boldsymbol{W}_\infty$ — функция, заданная в виде (1.5), (1.6); $\boldsymbol{w}_0$ — стационарная составляющая возмущения скорости потока, которую будем считать известной величиной; $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}$ — нестационарные составляющие возмущенной скорости жидкости, обусловленные взаимодействием решетки неподвижных профилей с неравномерным потоком и колебаниями профилей соответственно.

В силу предположений, сделанных при постановке задачи, ограничимся определением нестационарных составляющих возмущения скорости течения жидкости в линейном приближении и в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Отметим, что порядок величины соответствующих составляющих этого возмущения и зависимость их от времени определяются граничными условиями непротекания набегающего потока через профили решетки. Для удобства преобразований все линейные размеры в дальнейшем будем считать отнесенными к величине средней хорды профилей лопастей решетки b.

Согласно принципу суперпозиции с учетом (1.6) потенциал скорости нестационарной составляющей течения жидкости, возникновение которой обусловлено неравномерностью набегающего потока при неподвижных профилях решетки, представим в виде

$$\varphi_1=\varepsilon_1|\boldsymbol{W}_0|b\sum_{r=1}^{\infty}[\varphi_{1r}(x,y)\exp{(j\omega_r t)}+\bar{\varphi}_{1r}(x,y)\exp{(-j\omega_r t)}], \tag{2.1}$$

где φ_{1r} — амплитудная функция потенциала скорости колебаний жидкости с частотой ω_r; $\bar{\varphi}_{1r}$ — функция, комплексно сопряженная с функцией φ_{1r}. Согласно (1.6) функция φ_{1r} должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial\varphi_{1r}(x,y+nh)}{\partial\nu_n}=-W_{1r\nu_0}(x,y)\exp{(j\mu_r n)},\qquad (x,y)\in L_0$$
$$(n=0,1,2,\ldots,N_0-1),$$

где ν_n — направление нормали к контуру профиля L_n.

Следовательно, условия для соседних профилей различаются лишь постоянным сдвигом фаз $\mu_r=2\pi r/N$. Это обстоятельство позволяет использовать при определении искомой функции φ_{1r} хорошо развитые методы в теории решеток в нестационарном потоке [3–6]. Таким образом, эта функция обладает свойством обобщенной периодичности вида

$$\varphi_{1r}(x,y+nh)=\varphi_{1r}(x,y)\exp{(j\mu_r n)},\qquad (x,y)\in L_0. \tag{2.2}$$

Согласно (2.1) функция $\boldsymbol{w}_1$, которая определяется через φ_1, имеет вид

$$\boldsymbol{w}_1(x,y,t)=\varepsilon_1|\boldsymbol{W}_0|\sum_{r=1}^{\infty}[\boldsymbol{w}_{1r}(x,y)\exp{(j\omega_r t)}+\bar{\boldsymbol{w}}_{1r}(x,y)\exp{(-j\omega_r t)}]. \tag{2.3}$$

Для определения возмущения потока, обусловленного колебаниями лопастей, общий закон их колебаний с учетом (1.1) представим в комплексной форме

$$z_n=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{N_1}x_{nrs}\psi_s(x,y)\exp{(j\omega_r t)}\qquad (n=1,2,\ldots,N_0), \tag{2.4}$$

где x_{nrs} — безразмерное значение обобщенной координаты, определяющей уровень колебаний n-й лопасти по r-й гармонике и s-й моде; N_1 — число учитываемых степеней свободы колебаний лопастей. В этом случае потенциал возмущенной составляющей скорости жидкости с учетом (2.4) можно представить в виде

$$\varphi(x,y) = |\boldsymbol{W}_0| b \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_{nrs} \varphi_{nrs}(x,y) \exp(j\omega_r t). \tag{2.5}$$

Здесь φ_{nrs} — безразмерное значение амплитудной функции нестационарной составляющей потенциала скорости течения, возникающей при колебаниях профиля n-й лопасти по r-й гармонике и s-й моде с единичной амплитудой. Функция φ_{nrs} определяется при решении краевой задачи с условиями на контурах профилей вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi_{nrs}}{\partial \nu_n} = \Big[jk_r \psi_s(x,y) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\Big(\frac{|\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{w}_0|}{|\boldsymbol{W}_0|}\, \psi_s(x,y)\Big)\Big], \qquad (x,y) \in L_n, \\ \frac{\partial \varphi_{mrs}}{\partial \nu_m} = 0, \qquad (x,y) \in L_m, \quad m \neq n,\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $k_r = \omega_r b/|\boldsymbol{W}_0|$. Следует отметить, что решение задач с краевым условием в форме (2.6) является достаточно сложным. Покажем, что определение искомых функций φ_{nrs} может быть сведено к решению более простых задач о возмущении жидкости, возникающем при синхронных колебаниях профилей решетки с одинаковыми амплитудами и одинаковым сдвигом фаз колебаний соседних профилей. С этой целью введем функции $\tilde{\varphi}_{lrs}$, обладающие свойством обобщенной периодичности:

$$\tilde{\varphi}_{lrs}(x, y+mh) = \tilde{\varphi}_{lrs}(x,y) \exp\Big(j\,\frac{2\pi ml}{N_0}\Big)$$
$$(m = 1, 2, \ldots, N_0 - 1, \quad l = 1, 2, \ldots, N_0 - 1),$$

которые являются решением соответствующих краевых задач при условии

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_{lrs}(x, y+mh)}{\partial \nu_m} = \Big[jk_r \psi_s(x,y) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\Big(\frac{|\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{w}_0|}{|\boldsymbol{W}_0|}\, \psi_s(x,y)\Big)\Big] \exp\Big(j\,\frac{2\pi ml}{N_0}\Big),$$
$$(x,y) \in L_0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1).$$

Тогда функции φ_{nrs} можно представить в виде

$$\varphi_{nrs} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{N_0-1} \exp\Big(-j\,\frac{2\pi nl}{N_0}\Big) \tilde{\varphi}_{lrs},$$

так как выражения для их производных по нормали к контурам профилей

$$\frac{\partial \varphi_{nrs}}{\partial \nu_m} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{N_0-1} \exp\Big(-j\,\frac{2\pi nl}{N_0}\Big) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{lrs}}{\partial \nu_m},$$
$$(x,y) \in L_0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1)$$

эквивалентны условиям непротекания (2.6).

С учетом (2.5) возмущенная составляющая скорости, обусловленная колебаниями лопастей решетки, может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{w}(x,y,t) = |\boldsymbol{W}_0| \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N_1} x_{nrs} \boldsymbol{w}_{nrs}(x,y) \exp(j\omega_r t). \tag{2.7}$$

3. К определению нестационарной составляющей аэродинамических сил. Для определения нестационарных аэродинамических сил, действующих на лопасти решетки, необходимо знать нестационарную составляющую статического давления жидкости на их поверхностях. В рамках гипотезы цилиндрических сечений выражение для давления на поверхностях лопастей $(x, y) \in L_n$ получим из уравнения Ламба — Громеки в виде

$$p_0 = -\rho\Big(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1) + \boldsymbol{W}_0\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w} + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1)^2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{w}^2\Big),$$

где ρ — плотность жидкости. Составляющая этого давления, равная

$$p_1(x, y, z) = -\rho\Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1) + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1)^2\Big), \qquad (3.1)$$

не зависит от колебаний лопастей и определяет погонные аэродинамические силы, приходящиеся на единицу длины лопасти в цилиндрическом сечении решетки радиусом z и возбуждающие их вынужденные колебания. Так как согласно (1.6) и (2.3) последний член в правой части (3.1) является величиной второго порядка малости, в дальнейшем этим членом будем пренебрегать.

Выражение для статического давления, возникновение которого обусловлено колебаниями профилей, имеет вид

$$p(x, y, z) = -\rho\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{W}_0\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{w}^2\Big). \qquad (3.2)$$

Ниже показано, что величина $\boldsymbol{w}$ на рассматриваемых режимах имеет более высокий порядок малости, чем величина $\boldsymbol{W}_1$, поэтому последним членом в правой части (3.2) также будем пренебрегать.

Второй член выражения (3.2) представляет собой произведение двух комплексных функций. Реальный процесс описывают лишь их вещественные части. Поэтому для определения аэродинамических сил, действующих на лопасти, необходимо перейти к вещественной форме их выражений. В вещественной форме целесообразно представить также обобщенные координаты, в которых описываются установившиеся колебания лопастей:

$$y_{nrs} = \operatorname{Re}\,[x_{nrs}\exp\,(j\omega_r t)] = \alpha_{nrs}\cos\,(\omega_r t + \beta_{nrs}). \qquad (3.3)$$

Здесь $\alpha_{nrs} = |x_{nrs}|$, $\beta_{nrs} = \operatorname{arctg}\,[\operatorname{Im}\,(x_{nrs})/\operatorname{Re}\,(x_{nrs})]$ — амплитуды и фазы колебаний. Следует отметить, что $\operatorname{Im}\,[x_{nrs}\exp\,(j\omega_r t)] = -\dot{y}_{nrs}/\omega_r$.

С учетом (2.1)–(2.3), (3.1) вещественные части обобщенных аэродинамических сил, возбуждающих вынужденные колебания n-й лопасти решетки, можно представить в векторной форме

$$\boldsymbol{Q}_{0n} = -\varepsilon_1 q b^2 \boldsymbol{F}_n,$$
$$\boldsymbol{F}_n = \sum_{r=1}^{\infty}\big[\operatorname{Re}\,(\boldsymbol{F}_{0r}\,\mathrm{e}^{j\mu_r n})\cos\,(\omega_r t) - \operatorname{Im}\,(\boldsymbol{F}_{0r}\,\mathrm{e}^{j\mu_r n})\sin\,(\omega_r t)\big]. \qquad (3.4)$$

Здесь $q = \rho W_0^2/2$ — скоростной напор набегающего потока; $\boldsymbol{F}_{0r}$ — вектор, компоненты f_s^{0r} которого определяют в комплексной форме величины аэродинамических сил, возбуждающих колебания исходной лопасти $(n = 0)$ с частотами ω_r и s-ми модами:

$$f_s^{0r} = 2\int\limits_{R_0}^{R_{end}}\oint\limits_{L_0(z)}\Big(jk_r\varphi_{1r} + \frac{\boldsymbol{W}_0 + \boldsymbol{w}_0}{|\boldsymbol{W}_0|}\,(\boldsymbol{W}_{1r} + \boldsymbol{w}_{1r})\Big)\psi_s\,d\sigma\,dz$$

(R_0, R_{end} — отнесенные к величине b радиусы цилиндрических сечений решетки, определяющие начальную и конечную точки лопастей).

Обобщенные аэродинамические силы, возникающие на n-й лопасти при колебаниях решетки и возбуждающие ее колебания по s-й моде, в вещественной форме с учетом (3.2) определяются по формуле

$$Q_{ns} = -\rho b^2 \sum_{s=1}^{N_1} \int\limits_{R_0}^{R_{end}} \int\limits_{L_n(z)} \Big[\operatorname{Re}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{W}_0\boldsymbol{w}\Big) + \varepsilon_1 \operatorname{Re}(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{w}_1)\operatorname{Re}\boldsymbol{w}\Big]\psi_s\,d\sigma\,dz. \qquad (3.5)$$

Подставляя (1.6), (2.3), (2.5), (2.7) в (3.5), получим выражение, которое может быть представлено в матричной форме:

$$\boldsymbol{Q}_n = -qb^2 \sum_{m=0}^{N_0-1}\sum_{r=1}^{\infty}\Big[\Big(A_{nmr}Y_{mr} + \frac{1}{\omega_r}\,B_{nmr}\dot{\boldsymbol{Y}}_{mr}\Big) + {}$$
$$+ \varepsilon_1 \sum_{l=1}^{N_2}\Big(C_{nmrl}(t)\boldsymbol{Y}_{mr} + \frac{1}{\omega_r}\,D_{nmrl}(t)\dot{\boldsymbol{Y}}_{mr}\Big)\Big] \qquad (3.6)$$

($\boldsymbol{Q}_n$, $\boldsymbol{Y}_{mr}$ — векторы с компонентами $q_s^n = Q_{ns}$ и $y_u^{mr} = y_{mru}$). Элементы матриц выражения (3.6) в соответствующих обозначениях определяются следующим образом:

$$a_{su}^{nmr} = 2\int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{L_n(z)} \operatorname{Re}(jk_r\varphi_{mur} + w_{mur})\psi_s\,d\sigma\,dz,$$

$$b_{su}^{nmr} = 2\int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{L_n(z)} \operatorname{Im}(jk_r\varphi_{mur} + w_{mur})\psi_s\,d\sigma\,dz,$$

$$c_{su}^{nml} = 2\int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{L_n(z)} W_l(t)\operatorname{Re}(w_{mur})\psi_s\,d\sigma\,dz,$$

$$d_{su}^{nml} = 2\int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{L_n(z)} W_l(t)\operatorname{Im}(w_{mur})\psi_s\,d\sigma\,dz.$$

Здесь $W_l = 2\operatorname{Re}[(\boldsymbol{W}_{1l} + \boldsymbol{w}_{1l})\exp(j\omega_l t)]$.

4. Дифференциальные уравнения колебаний лопастей, обусловленных периодической неравномерностью набегающего потока. В рамках рассматриваемой модели аэродинамического взаимодействия решетки с жидкостью запишем систему дифференциальных уравнений колебаний ее лопастей. Согласно [13] с учетом (3.4) и (3.6) эта система может быть представлена в виде

$$\operatorname{diag}(M_s)\ddot{\boldsymbol{Y}}_n + \operatorname{diag}(\omega_{ns}^2 M_s)\boldsymbol{Y}_n - qb\sum_{m=0}^{N_0-1}\sum_{r=1}^{\infty}\Big[\Big(A_{nmr}\boldsymbol{Y}_{mr} + \frac{1}{\omega_r}\,B_{nmr}\dot{\boldsymbol{Y}}_{mr}\Big) + {}$$
$$+ \varepsilon_1\sum_{l=1}^{N_2}\Big(C_{nmrl}(t)\boldsymbol{Y}_{mr} + \frac{1}{\omega_r}\,D_{nmrl}(t)\dot{\boldsymbol{Y}}_{mr}\Big)\Big] = \varepsilon_1 qb\boldsymbol{F}_n \qquad (4.1)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1),$$

где $\boldsymbol{Y}_n = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{Y}_{nr}$; M_s — обобщенная масса, соответствующая s-й моде колебаний; ω_{ns} — собственная частота колебаний n-й лопасти по s-й моде в вакууме. Наличие в этой системе членов с переменными коэффициентами свидетельствует о возможности возникновения параметрического резонанса (потери устойчивости колебаний при определенном сочетании параметров). Согласно [14] необходимым условием возникновения параметрического резонанса является выполнение одного из следующих соотношений:

$$\omega_{0s} = n_1\omega_r(1+\delta)/2, \qquad |\delta| \leqslant \delta_{n_1 s} \qquad (n_1 = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.2}$$

(ω_{0s} — собственная частота колебаний решетки лопастей в потоке по s-й моде; $\delta_{n_1 s}$ — малые величины, значения которых определяют границы области устойчивости параметрических колебаний).

5. Вынужденные колебания решетки. Вынужденные колебания решетки лопастей, обусловленные неравномерностью набегающего потока, описывает частное решение неоднородной системы уравнений (4.1). Если в этой системе условие (4.2) не выполняется, то членами правой части, содержащими переменные коэффициенты, можно пренебречь. Кроме того, учитывая, что аэродинамические силы малы по сравнению с упругими и инерционными силами, действующими на лопасти в потоке газа, введем малый параметр $\varepsilon_0 = qb/(M\omega_{0s}^2)$, где M — масса лопасти. Тогда система (4.1) преобразуется к виду

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}_n + \operatorname{diag}(\omega_{ns}^2)\boldsymbol{Y}_n = \varepsilon_0\omega_{0s}^2 \operatorname{diag}\Big(\frac{M}{M_s}\Big)\Big[\sum_{m=0}^{N_0-1}\sum_{r=1}^{\infty}\Big(A_{nmr}\boldsymbol{Y}_{mr} + \frac{1}{\omega_r}B_{nmr}\dot{\boldsymbol{Y}}_{mr}\Big) + \varepsilon_1\boldsymbol{F}_n\Big] \tag{5.1}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1).$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (5.1) и приравнивая по отдельности коэффициенты при $\sin(\omega_r t)$ и $\cos(\omega_r t)$ в левой и правой частях соответствующих равенств, для каждой временной гармоники получим систему матричных уравнений вида

$$\begin{gathered}
\operatorname{diag}\Big(1 - \frac{\omega_{ns}^2}{\omega_r^2}\Big)\boldsymbol{Y}'_{nr} = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\operatorname{diag}\Big(\frac{M}{M_s}\Big)\Big[\sum_{m=0}^{N_0-1}(A_{nmr}\boldsymbol{Y}'_{mr} + B_{nmr}\boldsymbol{Y}''_{mr}) + \varepsilon_1 \operatorname{Re}(\boldsymbol{F}_{0r}\,\mathrm{e}^{j\mu_r n})\Big], \\
\operatorname{diag}\Big(1 - \frac{\omega_{ns}^2}{\omega_r^2}\Big)\boldsymbol{Y}''_{nr} = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\operatorname{diag}\Big(\frac{M}{M_s}\Big)\Big[\sum_{m=0}^{N_0-1}(A_{nmr}\boldsymbol{Y}''_{mr} - B_{nmr}\boldsymbol{Y}'_{mr}) + \varepsilon_1 \operatorname{Im}(\boldsymbol{F}_{0r}\,\mathrm{e}^{j\mu_r n})\Big] \\
(n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1),
\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $\boldsymbol{Y}'_{nr}$, $\boldsymbol{Y}''_{nr}$ — векторы, компонентами которых являются значения $y'_{nrs} = \alpha_{nrs}\cos\beta_{nrs}$, $y''_{nrs} = -\alpha_{nrs}\sin\beta_{nrs}$ соответственно.

6. Параметрические колебания решетки лопастей. Параметрические колебания решетки лопастей, обусловленные неравномерностью набегающего потока, описываются соответствующей (4.1) однородной системой дифференциальных уравнений, решение которой согласно [14] ищется в виде

$$\boldsymbol{Y}_n = \mathrm{e}^{ht}\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}'_{n0} + \sum_{r=1}^{\infty}(\boldsymbol{Y}'_{nr}\cos(r\omega t) + \boldsymbol{Y}''_{nr}\sin(r\omega t))\Big],$$

где h — характеристический показатель решения; $\boldsymbol{Y}'_{rn}$, $\boldsymbol{Y}''_{rn}$ — векторы, аналогичные векторам в выражении (5.2).

Для консервативных систем при выполнении условия (4.2) $\operatorname{Re}(h) > 0$, т. е. колебания теряют устойчивость. Однако для систем с затуханием, которое в рассматриваемом случае имеет место вследствие аэродинамического демпфирования, это условие является недостаточным для потери устойчивости колебаний. При этом граница области устойчивости параметрических колебаний определяется из условия баланса энергии параметрического возбуждения колебаний и энергии, затрачиваемой на преодоление демпфирования. В частности, при малой неравномерности набегающего потока на рабочих режимах эксплуатации решеток лопастей вероятность возникновения параметрического резонанса невелика, так как переменные по времени коэффициенты системы (4.1) малы по сравнению с коэффициентами, определяющими аэродинамическое демпфирование. Однако при скоростях обтекания решеток, близких к критической скорости классического флаттера $\boldsymbol{W}_*$, которая определяется в равномерном набегающем потоке, аэродинамическое демпфирование стремится к нулю. Поэтому в некоторой окрестности среднего значения скорости неравномерного набегающего потока $\boldsymbol{W}_{01} = \boldsymbol{W}_* - \Delta \boldsymbol{W}$, в которой аэродинамическое демпфирование еще достаточно мало, условие (4.2) может являться достаточным для возникновения неустойчивости колебаний решетки.

Следует отметить, что если указанный режим соответствует области резонанса, т. е.

$$|1 - \omega_{0s}^2/\omega_r^2| < \varepsilon_0, \qquad \omega_r = \omega r, \tag{6.1}$$

то амплитуды вынужденных колебаний лопастей будут достаточно велики. В этом случае отсутствует необходимость более подробного исследования процесса их колебаний, так как работа соответствующей конструкции на этих режимах недопустима. Поэтому явление параметрического резонанса, описываемое условием (4.2) при четных значениях n_1, может быть исключено из рассмотрения. В случае если условие (6.1) не выполняется, из (5.2) следует оценка $\alpha_{nrs} = O(\varepsilon_0\varepsilon_1)$, что и доказывает утверждение, приведенное в п. **3**.

Как известно, наиболее опасная область неустойчивости параметрических колебаний расположена в окрестности значений

$$\omega_r = 2\omega_{0s}. \tag{6.2}$$

Согласно [14] при определении границ этой области в случае малых значений переменных коэффициентов в уравнении колебаний искомое решение в первом приближении может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{Y}'_{n1} \cos{(\omega t/2)} + \boldsymbol{Y}''_{n1} \sin{(\omega t/2)}. \tag{6.3}$$

Подставляя (6.2) с учетом (4.2) в соответствующую (4.1) однородную систему дифференциальных уравнений и приравнивая коэффициенты при $\sin{(\omega t/2)}$ и $\cos{(\omega t/2)}$, получим алгебраическую систему матричных уравнений вида

$$\begin{gathered}
-(2\delta_{1s} + \delta_{1s}^2)\boldsymbol{Y}'_{n1} + \varepsilon_0 \operatorname{diag}\Big(\frac{M}{M_s}\Big) \sum_{m=0}^{N_0-1} \big[(A_{nm1} + \varepsilon_1 G_{nm11})\boldsymbol{Y}'_{m1} + (B_{nm1} + \varepsilon_1 H_{nm11})\boldsymbol{Y}''_{m1}\big] = 0,\\
-(2\delta_{1s} + \delta_{1s}^2)\boldsymbol{Y}''_{n1} + \varepsilon_0 \operatorname{diag}\Big(\frac{M}{M_s}\Big) \sum_{m=0}^{N_0-1} \big[(A_{nm1} - \varepsilon_1 G_{nm11})\boldsymbol{Y}''_{m1} - (B_{nm1} - \varepsilon_1 H_{nm11})\boldsymbol{Y}'_{m1}\big] = 0\\
(n = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1),
\end{gathered} \tag{6.4}$$

где G_{nm11}, H_{nm11} — матрицы, элементы которых с учетом (1.6), (2.3) определяются следующим образом:

$$g_{su}^{nml} = \int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{Ln(z)} \operatorname{Re}{(\bar{\boldsymbol{W}}_{11}\boldsymbol{w}_{mu1})}\psi_s \, d\sigma \, dz, \qquad h^{nmll} = \int\limits_{R_0}^{R_{end}} \oint\limits_{Ln(z)} \operatorname{Im}{(\bar{\boldsymbol{W}}_{11}\boldsymbol{w}_{mu1})}\psi_s \, d\sigma \, dz.$$

Условием существования решения системы (6.4) в виде (6.3) является уравнение критических частот, которое следует из равенства нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных векторах $\boldsymbol{Y}'_{n1}$, $\boldsymbol{Y}''_{n1}$ в этой системе. Помимо величины δ_{1s} неизвестной величиной является число Струхаля $k_{01} = \omega b/|\boldsymbol{W}_{01}|$, от которого зависят коэффициенты аэродинамических сил. Это число содержит среднюю скорость набегающего потока $\boldsymbol{W}_{01}$ на границах области устойчивости параметрических колебаний, определение которой представляет практический интерес при решении проблем флаттера решеток лопастей. Согласно изложенному выше значения k_{01} следует определять в окрестности значения $k_* = \omega b/|\boldsymbol{W}_*|$ с учетом условия баланса сил, возбуждающих параметрические колебания лопастей, и сил аэродинамического демпфирования. Существование значения $k_{01} > k_*$, удовлетворяющего этому условию, означает, что при условиях (4.1) вследствие неравномерности набегающего потока критическая скорость флаттера может уменьшиться на величину

$$|\Delta \boldsymbol{W}| = \omega b(1/k_* - 1/k_{01}). \tag{6.5}$$

7. Уменьшение критической скорости флаттера решетки, обусловленное неравномерностью набегающего потока. В качестве примера рассмотрим обтекание плоской однородной решетки лопастей неравномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости с периодом $T = 2\pi/\omega$. Предположим, что лопасти решетки могут совершать колебания с одной степенью свободы, собственная частота которых равна ω_{01}. С учетом (6.3) закон колебаний лопастей на границе устойчивости параметрических колебаний будем искать в виде

$$z_n = \alpha_{01r} \exp j(\omega t/2 + \mu_r n), \qquad \mu_r = 2\pi r/N_0 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1). \tag{7.1}$$

Тогда выражения для величин y'_{n1r}, y''_{n1r}, введенных в (5.2), принимают вид

$$y'_{n1r} = \alpha_{01r} \cos(n\mu_r), \qquad y''_{n1r} = -\alpha_{01r} \sin(n\mu_r). \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (6.4) с учетом (4.2), (7.1) и (6.2), получим

$$\begin{gathered}\Big(\delta_{11r}(2 + \delta_{11r}) - \varepsilon_0 \frac{M}{M_1} \operatorname{Re}(c_0^r + d_0^r)\Big)\alpha_{01r} = 0,\\ \operatorname{Im}(c_0^r - d_0^r)\alpha_{01r} = 0,\end{gathered} \tag{7.3}$$

где c_0^r, d_0^r — комплексные коэффициенты обобщенных сил, действующих на исходный профиль ($n = 0$) при синхронных колебаниях лопастей с одинаковыми амплитудами и постоянным сдвигом фаз:

$$c_0^r = \sum_{m=0}^{N_0-1} c_{0m} \exp(j\mu_r m), \qquad d_0^r = \varepsilon_1 \sum_{m=0}^{N_0-1} d_{0m} \exp(j\mu_r m),$$

$c_{0m} = a_{11}^{0m1} + jb_{11}^{0m1}$ — аэродинамические коэффициенты влияния колебаний m-го профиля в равномерном набегающем потоке на величину обобщенной силы, действующей на исходный профиль; $d_{0m} = \varepsilon_1(g_{11}^{0m1} + jh_{11}^{0m1})$ — соответствующие коэффициенты, обусловленные неравномерностью потока.

Для существования нетривиального решения вида (6.3) необходимо, чтобы коэффициенты при α_{01r} в уравнениях (7.3) были равны нулю. В первом из этих уравнений равенство нулю коэффициента при α_{01r} представляет собой уравнение критических частот, а во втором — условие баланса аэродинамических сил, возбуждающих параметрические колебания лопастей, и сил их аэродинамического демпфирования.

Следует отметить, что уравнение критических частот справедливо при любом значении числа Струхаля, от которого зависят аэродинамические коэффициенты влияния.

Число Струхаля, при котором возможно возникновение параметрического резонанса, с учетом (7.3) находится из условия

$$\mathrm{Im}\,(c_0^r - d_0^r) = 0. \tag{7.4}$$

Для определения k_{01} согласно (6.5) введем величину $\Delta k = k_{01} - k_*$ и представим приближенно зависимости значений c_0^r, d_0^r от числа Струхаля в окрестности k_* в виде

$$c_0^r = c_{01}^r \Delta k_r, \qquad d_0^r = \varepsilon_1 (d_{00}^r + d_{01}^r \Delta k_r).$$

Подставляя эти выражения в (7.4), получим

$$\Delta k_r = \frac{\varepsilon_1 d_{00}^r}{c_{01}^1 - \varepsilon_1 d_{01}^r}. \tag{7.5}$$

С учетом (6.5), (7.5) приведенная величина уменьшения критической скорости флаттера, обусловленного неравномерностью потока, приближенно может быть определена по формуле

$$\eta_r = \frac{|\Delta \boldsymbol{W}_r|}{|\boldsymbol{W}_*|} = \frac{\varepsilon_1 d_{00}^r}{k_* c_{01}^r + \varepsilon_1 (d_{00}^r - k_* d_{01}^r)}. \tag{7.6}$$

Определим зависимость критической скорости флаттера решетки (густота $\tau = b/h = 0{,}5$, угол установки $\beta = -30^\circ$, значение параметра прогиба профилей $\bar{f} = 0{,}1$) от степени неравномерности потока при крутильных колебаниях ее лопастей с использованием результатов расчета аэродинамических коэффициентов влияния, приведенных в [5]. В случае колебаний лопастей со сдвигом фаз $\mu_r = \pi/2$ при наиболее неблагоприятных начальных данных, определяющих фазу колебаний лопастей относительно фазы первой гармоники неравномерности набегающего потока, получим следующие значения коэффициентов в выражении (7.6): $k_* = 0{,}265$, $c_{01}^r = 2{,}4$, $d_{00}^r = 0{,}9$, $d_{01}^r = -0{,}62$. Подставляя эти значения в (7.6), в рассматриваемом случае имеем

$$\eta_r = \frac{0{,}9\varepsilon_1}{0{,}636 + 1{,}064\varepsilon_1}.$$

Отсюда следует, что неравномерность поля скоростей при обтекании решетки может оказывать существенное влияние на критическую скорость флаттера ее лопастей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов В. П.** Колебания рабочего колеса турбомашин. М.: Машиностроение, 1983.
2. **Воробьев Ю. С.** Колебания лопаточного аппарата турбомашин. Киев: Наук. думка, 1988.
3. **Самойлович Г. С.** Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М.: Наука, 1969.
4. **Горелов Д. Н.** Аэродинамика решеток в нестационарном потоке / Д. Н. Горелов, В. Б. Курзин, В. Э. Сарен. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1971.
5. **Горелов Д. Н.** Атлас нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей / Д. Н. Горелов, В. Б. Курзин, В. Э. Сарен. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1974.
6. **Рябченко В. П.** Нестационарные аэродинамические характеристики решеток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 1. С. 15–20.
7. **Курзин В. Б.** О динамической устойчивости лопаток в решетке при малой расстройке собственных частот // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 142–144.

8. **Bendiksen O. O.** Flutter of mistuned turbo machinery rotors // Trans. ASME. J. Engng Gas Turbines Power. 1984. V. 106. P. 25–33.
9. **Курзин В. Б., Коробейников С. Н., Рябченко В. П., Ткачева Л. А.** Собственные колебания решеток гидротурбин, имеющих малую геометрическую неоднородность // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 72–84.
10. **Sabatink A., Sisto F. A.** A survey of aerodynamic excitation problems in turbomachines // Trans. ASME. 1956. V. 78, N 3.
11. **Горелов Д. Н.** О колебаниях профилей решетки в неравномерном потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 4. С. 32–40.
12. **Дидковский В. Н.** Параметрические колебания лопаток турбомашин в потоке // Пробл. прочности. 1976. № 8. С. 9–13.
13. **Фершинг Г.** Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984.
14. **Болотин В. В.** Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

Поступила в редакцию 11/XII 2008 г.,
в окончательном варианте — 4/II 2009 г.