МЕТОД УЧЕТА РЕЛАКСАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ КОНУСА

В. Н. Архипов, К. С. Хорошко

(*Москва*)

Сжатие газа при прохождении через ударную волну вызывает отклонение газа от термодинамического равновесия. При этом в газе начинаются внутренние процессы, которые стремятся восстановить равновесие. В тех случаях, когда эти процессы протекают быстро (время релаксации мало), восстановление равновесия (в каждый момент и в каждой точке) успевает практически полностью следовать за ходом изменения объема газа, и отклонением от равновесия можно пренебречь. Если же время релаксации велико, отклонение газа от равновесия нужно учитывать.

Задача об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа без релаксации является автомодельной, так как в задаче отсутствует характерный линейный размер. В случае же, когда нужно учитывать отклонение от равновесия при прохождении газа через головную ударную волну, задача об обтекании конуса становится двумерной, так как появляется характерный линейный размер — величина зоны релаксации.

Ниже описывается способ учета релаксации в задаче о сверхзвуковом обтекании конуса.

1. Постановка задачи. Пусть на неподвижный полубесконечный конус набегает сверхзвуковой поток смеси газов, параллельный оси конуса. Предположим, что головная ударная волна является присоединенной, а за ней везде течение сверхзвуковое. Вязкостью, теплопроводностью и диффузией пренебрегаем. Будем считать, что газ не взаимодействует химически с поверхностью конуса.

Предположим далее, что набегающий на конус поток находится в равновесии и что равновесие нарушается при прохождении газа через ударную волну. Считаем, что сразу же за ударной волной поступательная, вращательная и колебательная энергии принимают свои равновесные значения, а реакции за ударной волной протекают неравновесно. Возбуждение электронов и ионизацию не учитываем.

2. Термодинамические соотношения. Пусть смесь состоит из N газов. Тогда ее термодинамическое состояние описывается $2N+5$ переменными, из которых только $N+2$ являются независимыми. Пусть h, p, S суть энтальпия, давление и энтропия смеси, а c_i — массовая доля i-й компоненты смеси. Тогда температура T смеси, плотность ρ смеси и химический потенциал μ_i i-й компоненты смеси определяются формулами

$$T = \frac{\partial h}{\partial S}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial p}, \qquad \mu_i = \frac{\partial h}{\partial c_i} \qquad (i = 1, \ldots, N;\ h = h(p, S, c_i))$$

Основное соотношение термодинамики имеет вид

$$TdS = dh - \frac{1}{\rho}dp - \sum_{i=1}^{N} \mu_i dc_i \tag{2.1}$$

Будем считать каждую компоненту смеси и всю смесь идеальными газами. Тогда

$$p_i = \frac{R_0}{M_i}\rho_i T, \qquad p = \frac{R_0}{M}\rho T, \qquad \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{M_i} \tag{2.2}$$

где p_i и ρ_i — парциальные давление и плотность i-й компоненты смеси, M_i и M — молекулярные веса i-й компоненты смеси и всей смеси соответственно, R_0 — универсальная газовая постоянная.

3. Газодинамические уравнения и граничные условия. Уравнения неразрывности i-й компоненты смеси, уравнение неразрывности всей смеси, уравнения количества движения и уравнение энергии запишем в сферических полярных координатах с началом отсчета в вершине конуса. Они имеют вид

$$Ru\frac{\partial c_i}{\partial R} + v\frac{\partial c_i}{\partial \theta} = R\frac{\sigma_i}{\rho} \qquad (i = 1 \ldots N)$$

$$Ru\frac{\partial \rho}{\partial R} + R\rho\frac{\partial u}{\partial R} + 2\rho u + v\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho\frac{\partial v}{\partial \theta} + \rho v \operatorname{ctg}\theta = 0$$

$$R\rho u\frac{\partial u}{\partial R} - \rho v^2 + \rho v\frac{\partial u}{\partial \theta} + R\frac{\partial p}{\partial R} = 0$$

$$\rho v\frac{\partial v}{\partial \theta} + \rho uv + R\rho u\frac{\partial v}{\partial R} + \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \tag{3.1}$$

$$Ra_f^2 u\frac{\partial \rho}{\partial R} + a_f^2 v\frac{\partial \rho}{\partial \theta} - Ru\frac{\partial p}{\partial R} - v\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{Ra_f^2}{\partial h/\partial \rho}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial h}{\partial c_i}\frac{\sigma_i}{\rho}$$

Здесь R — расстояние от вершины конуса; θ — угол, отсчитываемый в меридиональной плоскости от оси конуса; u, v — радиальная и трансверсальная компоненты скорости; σ_i — функция химического источника i-й компоненты, т. е. массовая скорость образования вследствие химических реакций i-й компоненты в единице объема; a_f —«замороженная» скорость звука, определяемая соотношением

$$a_f^2 = \gamma_f(T, c_i)\frac{p}{\rho} \tag{3.2}$$

где $\gamma_f(T, c_i)$ — отношение «замороженных» удельных теплоемкостей.

На поверхности конуса $v = 0$. Присоединенная ударная волна является криволинейной. Ее форма определяется в процессе решения задачи.

4. Функция химического источника. Рассмотрим s-ю химическую реакцию в смеси

$$\sum_{i=1}^{N} \nu'_{is} A_i \rightleftarrows \sum_{i=1}^{N} \nu''_{is} A_i \qquad (s = 1, \ldots, N_m) \tag{4.1}$$

где A_i — символ i-й компоненты смеси, ν'_{is} и ν''_{is} — стехиометрические коэффициенты веществ, вступающих в реакцию, и продуктов реакции; для прямой ($\rightarrow$) и обратной ($\leftarrow$) реакций константы скоростей обозначим через K_{fs} и K_{rs}.

Скорость протекания s-й реакции выражается следующим образом:

$$L_s = K_{fs}\prod_{i=1}^{N}[A_i]^{\nu'_{is}} - K_{rs}\prod_{i=1}^{N}[A_i]^{\nu''_{is}}, \qquad [A_i] = \frac{\rho c_i}{M_i} \tag{4.2}$$

где $[A_i]$ — молярная концентрация i-й компоненты смеси.

Массовая скорость образования i-й компоненты в процессе s-й реакции тогда будет равна

$$\sigma_{is} = M_i(\nu''_{is} - \nu'_{is})L_s \tag{4.3}$$

а суммарная массовая скорость образования i-й компоненты в ходе всех N_m реакций

$$\sigma_i = \sigma_{i1} + \ldots + \sigma_{iN_m} \tag{4.4}$$

5. Характеристики. В меридиональной плоскости имеется два семейства характеристик, уравнения которых в цилиндрических координатах r, z суть

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{\pm} = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha) \tag{5.1}$$

Вдоль характеристик выполняются условия

$$\mp d\beta_{\pm} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\rho V^2}dp_{\pm} + \frac{a_f \sin\beta}{Vr\cos(\beta\pm\alpha)}dz_{\pm} - \frac{a_f}{\rho V^2(\partial h/\partial\rho)}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial h}{\partial c_i}\frac{\sigma_i}{\rho}\frac{dz_{\pm}}{\cos(\beta\pm\alpha)} \tag{5.2}$$

Здесь V — модуль скорости, β — угол между осью конуса и вектором скорости, $\alpha = \arcsin a_f/V$. Индекс плюс относится к характеристикам первого семейства, а индекс минус — к характеристикам второго семейства. Ось z совпадает с осью конуса, ось r ей перпендикулярна, начало отсчета совпадает с вершиной конуса.

Линии тока также обладают некоторыми характеристическими свойствами. Вдоль них выполняются соотношения

$$dc_i - \frac{\sigma_i}{\rho V}\frac{dz}{\cos\beta}, \qquad VdV + \frac{1}{\rho}dp = 0, \qquad TdS = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i\sigma_i}{\rho V}\frac{dz}{\cos\beta} \tag{5.3}$$

6. Решение для малых R. Перейдя в уравнениях (3.1) к пределу при $R \to 0$, получим систему уравнений, содержащих только производные по θ. Этой системе не удовлетворяют постоянные значения параметров, откуда следует, что параметры потока в вершине конуса суть функции только угла θ.

Система имеет вид

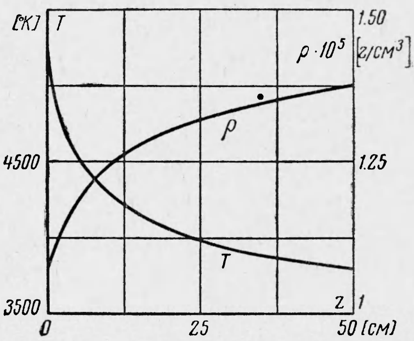
$$\begin{gathered} v_0\frac{dc_{i0}}{d\theta} = 0, \qquad 2\rho_0 u_0 + v_0\frac{d\rho_0}{d\theta} + \rho_0\frac{dv_0}{d\theta} + \rho_0 v_0 \operatorname{ctg}\theta = 0 \\ -\rho_0 v_0^2 + \rho_0 v_0\frac{du_0}{d\theta} = 0, \qquad \rho_0 v_0\frac{dv_0}{d\theta} + \rho_0 u_0 v_0 + \frac{dp_0}{d\theta} = 0, \qquad a_{f0}^2 v_0\frac{d\rho_0}{d\theta} - v_0\frac{dp_0}{d\theta} = 0 \end{gathered} \tag{6.1}$$

Индекс 0 означает, что параметры вычисляются при $R = 0$.

Первое уравнение системы (6.1) дает $c_{i0} = \mathrm{const}$, т. е. получаются параметры «замороженного» течения. Остальные уравнения системы можно проинтегрировать способом, описанным в работе [1], подбирая угол θ_0 наклона скачка в точке $R = 0$ так, чтобы на поверхности конуса выполнялось условие непротекания $v_0 = 0$.

В окрестности точки $R = 0$ параметры потока можно определить в виде рядов, зная производные $(\partial f / \partial R)_0$, $(\partial^2 f / \partial R^2)_0$ и т. д. в точке $R = 0$ (f — любой из параметров c_i, u, v, ρ, p).

Уравнения для определения производных $(\partial f / \partial R)_0 = f_1(\theta)$ получим, продифференцировав систему (3.1) по R и перейдя к пределу при $R \to 0$. Получим



$$v_0 \frac{dc_{i1}}{d\theta} = \frac{\sigma_{i0}}{\rho_0} - u_0 c_{i1} \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$v_0 \frac{d\rho_1}{d\theta} + \rho_0 \frac{dv_1}{d\theta} = F_1 \qquad (6.2)$$

$$\rho_0 v_0 \frac{du_1}{d\theta} = F_2, \qquad \rho_0 v_0 \frac{dv_1}{d\theta} + \frac{dp_1}{d\theta} = F_3$$

$$a_{f0}^2 v_0 \frac{d\rho_1}{d\theta} - v_0 \frac{dp_1}{d\theta} = F_4$$

Правые части этих уравнений F_1, F_2, F_3, F_4 — функции f_0, f_1, $df_0 / d\theta$, θ. Система (6.2) решается численным интегрированием.

В первом приближении уравнение ударной волны в окрестности вершины конуса можно задать в виде

$$R = a(\theta_0 - \theta) \qquad (6.3)$$

Если β — угол наклона криволинейной ударной волны (6.3) к оси конуса в меридиональной плоскости, то в вершине конуса имеет место зависимость

$$\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)_0 = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_0 - 2\left(\frac{d}{d\beta}\right)_0\right] \qquad (6.4)$$

которая дает граничные условия для системы (6.2) при $\theta = \theta_0$. Производные в квадратных скобках известны. Коэффициент a подбирается так, чтобы на поверхности конуса выполнялось условие непротекания $v_1 = 0$.

Второе приближение можно найти, определив вторые производные из уравнений, полученных двукратным дифференцированием системы (3.1) по R и последующим переходом к пределу при $R \to 0$. При этом ударная волна задается полиномом второй степени с двумя коэффициентами a и b, которые нужно подобрать так, чтобы выполнялись условия непротекания на поверхности конуса ($v_1 = 0$, $v_2 = 0$). Аналогично определяются более высокие приближения.

7. Численные результаты. Расчет был проведен для случая обтекания конуса с углом полураствора 30° потоком воздуха, причем число Маха набегающего потока $M_{f\infty} = 16.7$ ($M_f = V / a_f$), температура набегающего потока $T_\infty = 300°$ K, плотность $\rho_\infty = 1.808 \cdot 10^{-6}$ *г / см*^{3}, давление $p_\infty = 1.564 \cdot 10^3$ *г / см·сек*^{2}. Воздух считался смесью, состоящей из 78.847% молекулярного азота N_2 и 21.153% молекулярного кислорода O_2. Предполагалось, что за ударной волной происходят реакции, рассмотренные Даффом и Дэвидсоном [2]. Была учтена и колебательная релаксация по схеме, предложенной Даффом и Дэвидсоном. Константы скоростей были заимствованы также из работы [2].

Так как учитывалась колебательная релаксация, считалось, что в присоединенной ударной волне равновесные значения принимают только поступательная и вращательная энергии. В этом случае $\gamma_f = 1.4$.

Для каждой из рассмотренных реакций известна лишь одна из констант скоростей K_{fs}, K_{rs}. Вторая вычислялась, как обычно [3], из условия равновесия $K_{fs}/K_{rs} = K_{es}$, где K_{es} — константа равновесия, являющаяся известной функцией температуры.

Параметры потока в вершине конуса определялись решением системы (6.1). Расчет методом характеристик от вершины конуса невозможен из-за наличия в условиях (5.2) слагаемого, пропорционального $1 / r$. Поэтому для определения концентраций, компонент скоростей, плотности и давления в окрестности вершины в первом приближении использовалась система (6.2). Начиная от дуги окружности, расположенной на расстоянии $R = 0.02$ *см* от вершины конуса, расчет проводился методом характеристик. Условия (5.2) давали возможность определить угол β наклона скорости и давление p в точках пересечения характеристик разных семейств. Условия вдоль линий тока (5.3) позволяли рассчитать в этих точках концентрации c_i и модуль скорости V. Затем из условия сохранения полной энтальпии определялась температура T, после чего из уравнения состояния — плотность ρ. Параметры на ударной волне и наклон ее находились совместным решением условий на ударной волне и на характеристике, пересекающей ударную волну.

Проведенные расчеты показывают (фигура), что на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 50$ *см* температура на поверхности конуса в рассматриваемом случае уменьшается от 5240°К до 3800°К, а плотность увеличивается от $0.1 \cdot 10^{-4}$ *г* / *см*^{3} до $0.14 \cdot 10^{-4}$ *г* / *см*^{3}. Равновесные (без учета релаксации) значения температуры 3200° К и плотности $0.17 \cdot 10^{-4}$ *г* / *см*^{3}.

Описанный метод, по-видимому, неприменим в области малых изменений параметров, где параметры мало отличаются от своих равновесных значений.

Авторы благодарят Т. Я. Гришаненко, которая составила программу и провела расчеты на электронно-счетной машине, и Л. И. Северинова за полезное обсуждение работы.

Поступила 9 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Л. Хоуарта, т. I, М., ИЛ, 1955.
2. Duff R. E., Davidson N. Calculation of Reaction Profiles Behind Steady Shock Waves; II, The Dissotiation of Air, Journ. of the Chemical Physics, 1959, vol. 31, 4, p. 1018—1027. (Русск. пер.: Дафф и Дэвидсон. Расчет неравновесной диссоциации воздуха за стационарными ударными волнами. Сб. пер. Вопросы ракетной техники, 1960, № 5 (65), стр. 40—57.)
3. Lick W. Inwiscid Flow of a Reacting Mixture of Gases around a Blunt Body. Journal of Fluid Mechanics, 1960, vol. 7, 1, p. 128—144. (Русск. пер.: Лик. Невязкий поток реагирующей смеси около тупого тела. Сб. статей «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., ИЛ, 1962.)

ПЛОСКИЕ ВЗРЫВНЫЕ ВОЛНЫ В ГРУНТАХ

Г. М. Ляхов, З. В. Нарожная

(*Москва*)

Излагаются результаты экспериментальных исследований плоских волн в грунтах. Проводится сопоставление параметров плоских и сферических волн, соответствующих одним и тем же грунтам. Определена зависимость параметров волн в неводонасыщенном грунте от содержания воды и воздуха в порах.

1. Условия проведения опытов. Характеристики грунтов. Параметры волны в грунте, создаваемой при взрыве плоского заряда, в соответствии с принципом подобия, зависят от отношения $R°$ плотности заряда C (т. е. веса заряда в *кг*, приходящегося на 1 *м*^{2} его площади) к расстоянию R в *м* от плоскости, в которой расположен заряд

$$R° = \frac{R}{C} \frac{м^3}{кг} \qquad (1.1)$$

В опытах волны создавались при помощи зарядов, укладываемых на поверхности грунта. Сверху заряды покрывались слоем грунтовой обсыпки. Как показывают результаты опытов, возрастание толщины h обсыпки приводит к увеличению интенсивности волны в грунте. Однако это возрастание происходит лишь в некотором интервале значений h. Увеличение h свыше h_k не влияет на параметры волны. Значение h_k, полученное в опытах, составляет

$$h_k = \varkappa C \qquad (1.2)$$

В исследованных песчаных грунтах коэффициент $\varkappa = 3 \div 4$ *м*^{3}/*кг*. Опыты проводились при $h > h_k$.

При взрыве плоского заряда ограниченных размеров (площади) от слоев грунта, над которыми заряд отсутствует, распространяется боковая волна разрежения, приводящая к ослаблению плоской волны. При достаточно большой площади заряда влияние волны разрежения не сказывается в некоторой центральной области под зарядом, так как давление в плоской волне здесь уменьшается до начального значения до прихода фронта боковой волны разрежения. Приводимые результаты опытов относятся к этой центральной области.

Опыты проводились в песчаных неводонасыщенных грунтах нарушенной структуры (насыпных песках) двух районов.

Пески обоих районов имели объемный вес скелета γ от 1.50 до 1.55 *г*/*см*^{3}