

УДК 532.595:519.633.6

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАСТЯЖИМОГО ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА: ВЫВОД И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко

Вычислительный центр ДВО РАН, 680021 Хабаровск

Изучено медленное движение трубопровода как изогнутого стержня в вязкой среде. Перемещения осевой линии считаются конечными, деформации стержня — малыми. Учитывается взаимовлияние силы продольного натяжения и поперечных перемещений. Выведены уравнения движения и проведены тестовые расчеты. Дана приближенная оценка напряжений, возникающих в стенке трубопровода.

Ключевые слова: изогнутый трубопровод, вязкая среда, конечные перемещения, численный анализ.

Введение. Известно, что положение в грунте подземного трубопровода сложного профиля может изменяться под влиянием внутреннего потока жидкости, начального изгиба оси и свойств среды. Это медленный процесс, в котором перемещения осевой линии могут достигать значительной величины. Поэтому при проектировании необходимо прогнозировать движение подземного трубопровода под влиянием трех указанных факторов.

В литературе имеются различные постановки и решения задач о совместном движении трубопровода и потока жидкости в нем [1–6].

В данной работе рассматривается медленное движение изогнутого трубопровода как стержня под действием потока вязкой жидкости и нелинейного сопротивления внешней среды. При этом перемещения могут быть конечными, но деформации считаются малыми. При выводе уравнений движения учитывается сила продольного натяжения T , возникающая в результате поперечного перемещения трубопровода. Всеми колебательными процессами во внутреннем потоке жидкости пренебрегается, так как изучаемое явление имеет другой масштаб по времени.

1. Физическая постановка задачи. Будем рассматривать трубопровод как упругий полый стержень, в начальный момент времени имеющий форму плоской кривой $\Gamma_0 = \{x, y: x = x_0(s), y = y_0(s)\}$, где s — длина дуги.

Стержень погружен в сильновязкую внешнюю среду и нагружается стационарным внутренним потоком жидкости, имеющим скорость v_0 . В начальном состоянии без внешних нагрузок внутренние напряжения в стержне отсутствуют. Так как внешняя среда считается вязкой жидкостью, после нагружения потоком стержень начинает двигаться. Концы трубопровода полагаются жесткозакрепленными. Требуется определить его движение.

Сделаем следующие предположения: 1) деформации стержня малы, а поперечные перемещения могут быть конечными, но малыми по сравнению с длиной стержня и радиусом

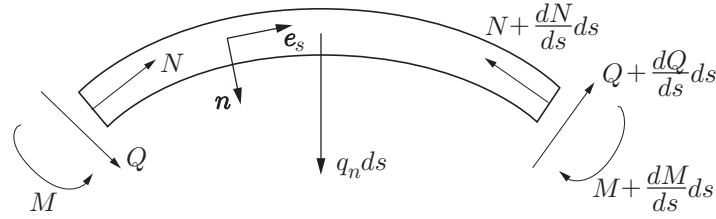


Рис. 1

кривизны осевой линии Γ_0 ; 2) сила натяжения стержня, возникающая в результате его изгиба, равномерно распределена по его длине; 3) на больших интервалах времени внешняя среда описывается уравнениями сильновязкой жидкости; 4) отношение $R_0/\min \rho_0$ мало (R_0 — радиус трубопровода; $\min \rho_0$ — минимальный радиус кривизны оси Γ_0); 5) силами инерции стенки и жидкости можно пренебречь.

2. Вывод уравнений движения и постановка начально-краевой задачи. Будем искать нормальные перемещения стержня w_n как функцию времени t и длины дуги s .

Пусть на элемент изогнутой трубы с кривизной \varkappa_0 действуют концевые и распределенные нагрузки (рис. 1). На рис. 1 Q — перерезывающая сила, M — изгибающий момент, N — растягивающая сила. Будем пренебрегать продольными распределенными нагрузками (продольными силами инерции, трением потока), кроме силы натяжения, по сравнению с поперечными нагрузками. Тогда распределенную нагрузку на трубопровод можно представить в виде

$$q_n = -\varkappa \rho_f S_f v_0^2 + q_{nr} + q_{ns},$$

где $\varkappa(s, t)$ — текущая кривизна трубопровода; v_0 — скорость потока жидкости; q_{nr} — сила сопротивления среды на единицу длины трубы; q_{ns} — поперечная сила, обусловленная продольным натяжением трубопровода, на единицу длины; ρ_f — плотность жидкости; S_f — площадь поперечного сечения потока.

Поскольку кривизна и деформации трубопровода малы, можно воспользоваться выражением для нагрузки, возникающей из-за действия силы натяжения:

$$q_{ns} = T \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2}.$$

Считаем, что для слабоизогнутой кривой продольная сила T постоянна вдоль трубопровода и вычисляется по формуле [7]

$$T = \frac{ES_t}{l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx \right], \quad (1)$$

где y, y_0 — текущие и начальные координаты точек Γ ; l — расстояние вдоль оси Ox между точками закрепления трубопровода; E — модуль Юнга; S_t — площадь поперечного сечения трубы. Если известны поперечные перемещения оси трубопровода w_n , то текущие координаты Γ можно найти по формулам

$$x(s, t) = x_0(s) - \frac{dy_0}{ds} w_n(s, t), \quad y(s, t) = y_0(s) + \frac{dx_0}{ds} w_n(s, t). \quad (2)$$

Заметим, что второй интеграл в (1) не изменяется и равен $l_0 - l$ (l_0 — первоначальная длина трубопровода вдоль Γ_0).

Следуя [8], получим уравнение движения относительно неизвестного перемещения w_n . Дифференциальные уравнения движения стержня в деформированном состоянии имеют вид (рис. 1)

$$\frac{\partial N}{\partial s} + \varkappa Q = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \varkappa N - q_n = 0, \quad Q = \frac{\partial M}{\partial s}.$$

В дальнейших выкладках используем известные выражения

$$M = EI(\varkappa - \varkappa_0), \quad \varkappa - \varkappa_0 = \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \varkappa_0^2 w_n, \quad (3)$$

где I — момент инерции поперечного сечения трубопровода. Ввиду малости деформаций пренебрежем произведениями искомой функции w_n и ее производных. Выразив текущую кривизну \varkappa через начальную \varkappa_0 и перемещение стенки w_n (3), после преобразований получим

$$EI \left(\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} + 2\varkappa_0^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \varkappa_0^4 w_n \right) + \rho_f S_f v_0^2 \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \varkappa_0^2 w_n + \varkappa_0 \right) - q_{nr} - q_{ns} = 0. \quad (4)$$

Чтобы определить силу сопротивления среды q_{nr} , необходимо рассмотреть движение бесконечного цилиндра в вязкой жидкости и решить уравнение Осеена [9]

$$(\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{gr}} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_{gr}}, \quad (5)$$

где p , \mathbf{v} — давление и скорость среды; μ , ρ_{gr} — вязкость и плотность среды; \mathbf{u}' — скорость среды на бесконечности относительно цилиндра. При краевых условиях прилипания решение (5) известно и сила сопротивления, отнесенная к единице длины, вычисляется по формуле

$$q_{nr} = -\frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/(\gamma\rho_{gr}R_0u)|}, \quad (6)$$

где u — скорость поперечного перемещения цилиндра; $\gamma = 1,7811$ — число Маскерони. Подставляя (6) и q_{ns} в (4), получим уравнения движения изогнутого трубопровода в вязкой среде

$$EI \frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} + (2EI\varkappa_0^2 + \rho_f S_f v_0^2 - T) \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + (EI\varkappa_0^2 + \rho_f S_f v_0^2) \varkappa_0^2 w_n + \varkappa_0 \rho_f S_f v_0^2 + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/(\gamma\rho_{gr}R_0u)|} = 0, \quad (7)$$

$$u = \frac{\partial w_n}{\partial t}.$$

Уравнения (7) дополним однородными начальными и краевыми условиями

$$w_n = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (8)$$

$$w_n = \frac{\partial w_n}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l_0.$$

Система (7), (8) представляет собой нелинейную начально-краевую задачу относительно неизвестных функций w_n , u . Решение системы (7), (8) описывает перемещения трубопровода только в том случае, если они малы по сравнению с начальным радиусом кривизны его оси, а также если допустима гипотеза плоских сечений. Первое ограничение накладывается использованием формул (3), второе — предположениями, сделанными при выводе уравнений [8].

3. Разностная схема и алгоритм численного решения задачи. Для решения задачи (1), (2), (7), (8) используется двухслойная явная разностная схема по времени

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h_s^4} (w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j) + \\ & + (2EI\alpha_{0i}^2 + \rho_f S_f v_0^2 - T^j) \frac{1}{h_s^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) + \\ & + (EI\alpha_{0i}^2 + \rho_f S_f v_0^2) \alpha_{0i}^2 w_i^j + \alpha_{0i} \rho_f S_f v_0^2 + \frac{4\pi\mu w_i^j}{0,5 + \ln(4\mu/(\gamma R_0 w_i^j \rho_{gr}))} = 0, \\ & w_i^j = \frac{1}{h_t} (w_i^{j+1} - w_i^j), \quad T^{j+1} = \frac{ES_t}{l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_i^{j+1} \right]^2 dx - (l_0 - l) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$y_i^{j+1} = y_{0i} + \left(\frac{dx_0}{ds} \right)_i w_i^{j+1}, \quad x_i^{j+1} = x_{0i} - \left(\frac{dy_0}{ds} \right)_i w_i^{j+1}.$$

Здесь j — номер слоя по времени; i — номер точки по координате s ; h_s, h_t — шаг сетки по координате и времени соответственно; u — скорость трубы; α_{0i} — начальная кривизна в i -й точке. Краевые и начальные условия учитываются обычным образом.

Расчет по схеме (9) проводился следующим образом. Вначале из первого разностного уравнения итерационным методом Ньютона находились скорости u_i^j на j -м слое по известным значениям w_i^j , затем по последним формулам (9) пересчитывались T^{j+1}, w_i^{j+1} . Шаг по времени выбирался опытным путем из требований устойчивости и точности.

4. Результаты численного анализа задачи. В качестве модельных взяты два профиля трубопровода:

$$y = C_1 \frac{A_1 - B_1(x - D)^2}{A_1 + B_1(x - D)^2} + C_1; \quad (10)$$

$$y = xB_2(x - A_2)(x - C_2), \quad (11)$$

где $C_1 = 10$, $A_1 = 2000$, $B_1 = 0,2$, $D = 1500$, $B_2 = 0,000\,002$, $A_2 = 1500$, $C_2 = 3000$; значение x изменялось от 0 до 3000 м. Выбраны следующие характеристики внешней среды, жидкости и материала стенки: скорость жидкости $v_0 = 1$ м/с, плотность жидкости $\rho_f = 800$ кг/м³, плотность грунта $\rho_{gr} = 1700$ кг/м³, вязкость грунта $\mu = 1000$ Па·с⁻¹, толщина стенки трубы $h = 0,005$ м, модуль Юнга материала трубы $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², радиус трубы $R_0 = 0,3$ м.

В результате расчета получены зависимости w_n от времени и длины дуги, представленные на рис. 2. Расчеты выполнены для интервала времени 1 год. Видно, что в случае профиля (10) (рис. 2,а) трубопровод прогибается сначала в направлении действия центробежных сил, затем в направлении максимальной центробежной силы, действующей со стороны жидкости, до тех пор пока ее не уравновесят силы упругости.

В случае профиля (11) (рис. 2,б) прогиб увеличивается в обоих направлениях из-за симметрии профиля. При этом максимальное перемещение для профиля (11) больше, чем для профиля (10). Заметим, что максимальная начальная кривизна профиля (10) $\alpha_{01} = 3,73 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹, профиля (11) $\alpha_{02} = 1,22 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹.

Варьирование скорости потока жидкости v_0 и вязкости среды μ показало, что скорость движения u уменьшается с ростом μ и увеличивается с ростом v_0 .

Проведены также численные расчеты для профилей (10), (11), в которых не учитывалась сила натяжения. В случае профиля (10) результаты оказались практически такими

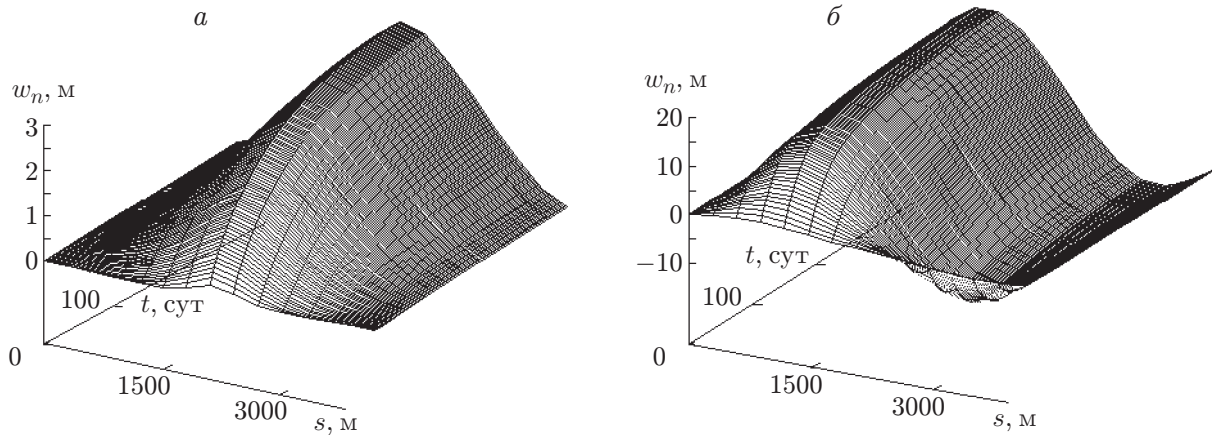


Рис. 2

же, как и при учете силы T , из-за малости величины максимального перемещения. В случае профиля (11) неучет силы натяжения привел к росту предельного максимального значения перемещения на 50 %. Такой результат подтверждает необходимость учета силы T в уравнениях движения. Заметим, что качественные различия поведения трубопровода отсутствуют.

5. Оценка напряжений в стенке трубопровода. Выше найдено нормальное перемещение w_n как функция координат и времени. Однако это не означает, что задача с точки зрения механики решена полностью. Для практических приложений необходимо знать величину максимальных напряжений, возникающих в стенке трубопровода в конечном положении осевой линии. Для получения такой оценки пренебрежем всеми компонентами тензора напряжений по сравнению с продольным напряжением σ_{ss} . Величина $\max |\sigma_{ss}|$ есть сумма изгибных напряжений $\tilde{\sigma}_{ss}$ и напряжений растяжения $\bar{\sigma}_{ss}$. При этом

$$\bar{\sigma}_{ss} = \frac{T}{S_t} = \frac{E}{l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - (l_0 - l) \right].$$

Для нахождения $\tilde{\sigma}_{ss}$ воспользуемся элементарной теорией изгиба балки, из которой следует (см., например, [10])

$$\tilde{\sigma}_{ss} = E\tilde{y}/\rho \quad (12)$$

(ρ — радиус кривизны изогнутой линии балки; \tilde{y} — расстояние от нейтральной линии до рассматриваемой точки в плоскости изгиба).

Пусть трубопровод изгибается в плоскости xOy . Тогда в соответствующих полярных координатах получим $\tilde{y} = R \cos \theta$. В формуле (12)

$$\frac{1}{\rho} = \varkappa - \varkappa_0 = \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \varkappa_0^2 w_n$$

(см., например, [8]).

Таким образом, формула для оценки напряжений принимает вид

$$\sigma_{ss} = ER \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \varkappa_0^2 w_n \right) + \frac{E}{l} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - (l_0 - l) \right]. \quad (13)$$

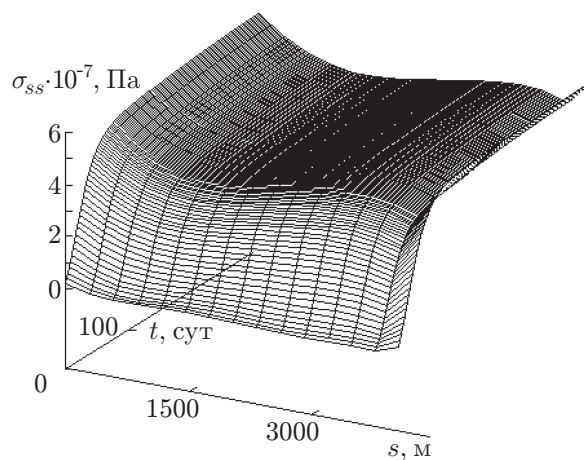


Рис. 3

Вычисленная по формуле (13) при $\cos \theta = 1$ зависимость напряжений от продольной координаты и времени приведена на рис. 3. Из расчетов следует, что максимальное напряжение для профиля (11) больше, чем для профиля (10). При этом для профиля (10) $\left| \max_{0 < s < l_0} \sigma_{ss} \right| \leq 60$ МПа. Величина этих напряжений существенно меньше предельно допустимого напряжения $[\sigma] = 140$ МПа для стали марки Ст.3. Величина предельно допустимых напряжений углеродистых конструкционных сталей, применяемых в машиностроении, изменяется в диапазоне $60 \div 250$ МПа (см., например, [11]). Следовательно, даже в модельной задаче напряжение приближается к критическому для некоторых материалов. Учитывая приближенный характер формулы (13), можно сделать вывод, что задача расчета напряжений в стенках трубопровода требует дальнейшего более детального анализа.

6. Выводы. Построена квазиодномерная математическая модель медленного движения изогнутого трубопровода в сильновязкой среде. Показано, что описание грунта уравнениями сильновязкой жидкости не приводит к противоречивым результатам. Проведены тестовые расчеты решения уравнений модели для двух профилей трубопровода и различных значений физических параметров системы. Получены приближенные формулы для оценки напряжений, возникающих в стенке трубопровода.

Авторы выражают благодарность В. П. Мясникову за ценные консультации на этапе постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Картвелишвили Л. Н.** Гидравлический удар: основные положения и современное состояние теории // Гидротехн. стр-во. 1994. № 9. С. 49–54.
2. **Клочков Б. Н., Кузнецова Е. А.** Нелинейные режимы изменения формы упругой трубки с потоком жидкости в ней // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 46–55.
3. **Lynch D. G., Waters S. L., Pedley T. J.** Flow in a tube with non-uniform, time-dependent curvature: governing equations and simple examples // J. Fluid Mech. 1996. V. 323. P. 237–265.
4. **Lee U., Pak C. H., Hong S. C.** The dynamics of a piping system with internal unsteady flow // J. Sound Vibr. 1995. V. 180, N 2. P. 297–311.
5. **Berger S. A., Talbot L., Yao L. S.** Flow in curved pipes // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 461–512.

6. **Рукавишников В. А., Ткаченко О. П.** Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 161–169.
7. **Тимошенко С. П.** Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин // Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 662–669.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 2.
10. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1979.
11. **Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.** Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1988.

*Поступила в редакцию 18/VI 2002 г.,
в окончательном варианте — 23/I 2003 г.*
