

УДК 626.4:53.072.12

ВОЛНЫ В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ, ОБРАЗУЮЩИЕСЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПРЕРЫВНОЙ ВОЛНЫ НАД СТУПЕНЬКОЙ ДНА

А. В. Гусев, В. В. Остапенко, А. А. Малышева, И. А. Малышева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

Приведены результаты теоретического и экспериментального исследования волн, образующихся в открытом канале при прохождении над ступенькой дна прерывной волны, возникающей в результате разрушения плотины. Рассмотрен случай, когда значение начального уровня воды в нижнем бьефе больше высоты ступеньки (ступенька находится под водой), а также случай, когда это значение меньше высоты ступеньки (в начальный момент времени вода на ступеньке отсутствует). Точные решения построены на основе модифицированных уравнений первого приближения теории мелкой воды, допускающих распространение прерывных волн по сухому руслу. При этом использовалось предположение о том, что на неподвижном гидравлическом прыжке, возникающем над ступенькой дна, сохраняется полная энергия набегающего потока. Эти решения согласуются с экспериментальными данными по различным параметрам (типы волн, скорость их распространения, асимптотические глубины за их фронтами).

Ключевые слова: прерывная волна, ступенька дна, уравнения теории мелкой воды, экспериментальные данные.

Введение. Уравнения первого приближения теории мелкой воды [1–3] широко применяются при моделировании процесса распространения прерывных волн [4–7] (гидравлических боров [8, 9]), возникающих при полном или частичном разрушении плотины гидросооружения либо при выходе крупных морских волн типа цунами [10] на мелководье. Однако классическая система базисных законов сохранения теории мелкой воды (состоящая из законов сохранения массы и полного импульса [3]), правильно передавая параметры прерывных волн, распространяющихся по жидкости конечной глубины над ровным дном [1], не позволяет описывать волновые течения над различными особенностями рельефа дна, в частности прохождение прерывной волны над ступенькой или уступом дна. Это обусловлено тем, что уравнение для полного импульса является точным законом сохранения только в случае горизонтального дна, поэтому его нельзя использовать для получения условий Гюгонио на разрывах, возникающих над скачком отметки дна.

В [11] предложен, а в [12] обоснован метод, позволяющий в рамках уравнений теории мелкой воды получать соотношения на неподвижном разрыве, возникающем над скачком отметки дна. В основе этого метода лежит предположение о том, что если на такой разрыв приходят две характеристики, то на нем наряду с непрерывностью расхода, вытекающей из закона сохранения массы, необходимо требовать непрерывность функции Бернулли,

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № 5873.2006.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609) и в рамках Проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 16.2.

которая следует из закона сохранения локального импульса, а также из закона сохранения полной энергии набегающего потока. Если же на разрыв над скачком отметки дна приходят три характеристики, то непрерывности расхода достаточно для определения всех параметров течения на этом разрыве. Полная энергия на таком разрыве теряется, что служит критерием его устойчивости [3]. В рамках этих предположений с использованием обобщенного метода адиабат [13] исследована однозначная разрешимость задач о разрушении плотины над ступенькой [14] и уступом [15] дна. Построенные автомодельные решения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [16–18] по различным параметрам (типы волн, скорость их распространения, асимптотические глубины за их фронтами).

Классическая система базисных законов сохранения теории мелкой воды не позволяет моделировать процесс распространения прерывных волн по сухому руслу. Точные решения, описывающие в рамках этой системы течение воды по сухому руслу, являются непрерывными волнами понижения [1, 5]. Учет донного трения, которое представляет собой распределенный источниковый член, не вносящий вклад в условия Гюгонио на фронте прерывной волны, не может изменить эту ситуацию [19, 20]. В то же время многочисленные лабораторные эксперименты показали, что данные непрерывные решения существенно завышают скорость распространения передней кромки волны и искажают ее профиль [21–24]. В опытах фронт волны, распространяющейся по сухому руслу, является существенно более крутым, и на нем происходят обрушения, характерные для прерывных волн.

В [25] предложен метод, позволяющий в рамках уравнений теории мелкой воды моделировать процесс распространения прерывных волн по сухому руслу. В основе этого метода лежит модифицированный закон сохранения полного импульса, полученный в [26] при выводе уравнений мелкой воды в классе обобщенных решений с прерывными волнами. При этом применяется двойной предельный переход, учитывающий влияние турбулентной вязкости внутри переходной области, соответствующей прерывной волне. С помощью такого перехода предпринята попытка учесть сосредоточенные потери импульса, обусловленные образованием локальных турбулентно-вихревых структур в поверхностном слое жидкости на фронте прерывной волны. В [20] на основе модифицированных уравнений теории мелкой воды разработана явная разностная схема сквозного счета, позволяющая в одно- и двумерной (плановой) постановках рассчитывать распространение прерывных волн по сухому руслу, их натекание на берег и перетекание через различные береговые препятствия.

В настоящей работе приведены результаты теоретического и экспериментального исследования волн, образующихся в открытом канале при прохождении над ступенькой дна прерывной волны, возникающей в результате разрушения плотины. В экспериментах начальный уровень воды в верхнем бьефе был постоянным, а в нижнем бьефе постепенно понижался. В результате в первой серии экспериментов значение начального уровня воды в нижнем бьефе было больше высоты ступеньки (ступенька находилась под водой), а во второй серии это значение было меньше высоты ступеньки (в начальный момент времени вода на ступеньке отсутствовала). Для единообразного воспроизведения в теории результатов этих экспериментов использована предложенная в [20, 26] модифицированная система базисных законов сохранения теории мелкой воды, которая, с одной стороны, допускает распространение прерывных волн по сухому руслу, а с другой — правильно передает параметры этих волн при их движении по руслу конечной глубины. Точные решения построены с помощью методов, предложенных в [14, 15], и на основе результатов работы [27], в которой для случая, когда в начальный момент времени ступенька находится под водой, однозначная разрешимость данной задачи изучалась в рамках классической системы

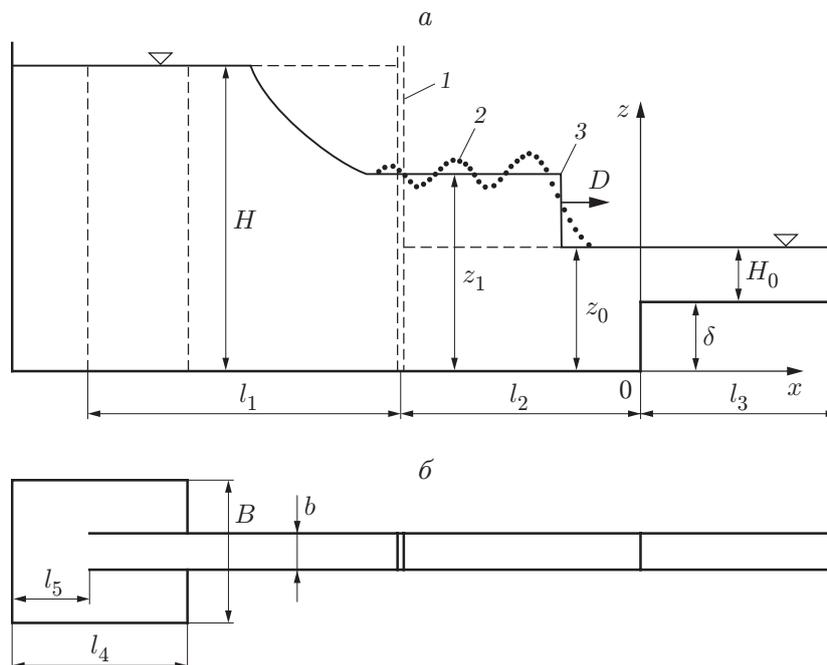


Рис. 1. Схема эксперимента:
a — вид сбоку; *б* — вид сверху; 1 — начальное положение щита; 2 — волна, набегающая на ступеньку после удаления щита; 3 — прерывная волна, моделирующая (в рамках уравнений теории мелкой воды) набегающую волну

базисных законов сохранения теории мелкой воды. Проведено сравнение с результатами лабораторных экспериментов.

1. Схема эксперимента. Схема эксперимента, основные обозначения и используемая далее система координат представлены на рис. 1. Опыты проводились в прямоугольном канале шириной $b = 20,2$ см и длиной $l_1 + l_2 + l_3 = 706,5$ см, левая часть которого располагалась в лотке шириной $B = 100$ см и длиной $l_4 = 330$ см. Левый открытый конец канала находился на расстоянии $l_5 = 130$ см от левой торцевой стенки лотка. Дно канала состоит из двух горизонтальных участков, соединенных вертикальной ступенькой высотой $\delta = 5,5$ см, расположенной на расстоянии $l_3 = 238,5$ см от правой торцевой стенки. Начальный перепад уровней $\Delta z = H - z_0$ создавался с помощью плоского щита, который находился на расстоянии $l_2 = 122$ см от ступеньки дна вверх по потоку. В экспериментах глубина верхнего бьефа $H = 20,5$ см была неизменной, а уровень воды в нижнем бьефе изменялся от $z_0 = H$ до $z_0 = z_{\min} = 1$ см. Если $z_0 > \delta$, то глубина слоя воды на ступеньке $H_0 = z_0 - \delta > 0$ и в начальный момент времени ступенька находится под водой, в силу чего начальные уровни воды в нижнем бьефе перед ступенькой и за ней совпадают. Если $z_0 < \delta$, то в начальный момент времени на ступеньке имеет место сухое дно.

Начальные уровни свободной поверхности определялись мерными иглами с абсолютной погрешностью не более 0,05 см. В момент времени $t_0 = 0$ щит удалялся из канала вручную. Закон его движения регистрировался реохордным датчиком. Время удаления щита не превышало 0,05 с. В результате удаления щита, которым моделировался процесс разрушения плотины, в положительном направлении оси x начинает распространяться прерывная волна (гидравлический бор), показанная точками на рис. 1. После прохождения начальной прерывной волны над ступенькой образуются вторичные прерывные волны, движущиеся в противоположных направлениях. В экспериментах измерялись скорости распространения этих волн и асимптотические глубины за их фронтами.

Колебания уровня свободной поверхности как функции времени t в заданных точках по продольной координате x измерялись волномерами, принцип работы которых основан на различии электрической проводимости воды и воздуха. Разрешающая способность волномеров составляла 0,2 мм. Частота колебаний, отслеживаемая волномерами с погрешностью не более 10 %, не превышала 10 Гц. Использовалась также фото- и видеосъемка. Ниже результаты экспериментов приводятся для моментов времени, в которые волны, отраженные от правой торцевой стенки канала и от левой торцевой стенки лотка, еще не достигают рассматриваемого поперечного сечения канала.

2. Постановка задачи в рамках теории мелкой воды. В случае прямоугольного канала постоянной ширины без учета влияния трения модифицированная система базисных законов сохранения теории мелкой воды имеет вид [20, 26]

$$h_t + q_x = 0; \quad (2.1)$$

$$(q + \gamma u)_t + (qu + gh^2/2 + \gamma(u^2/2 + gh))_x = -g(h + \gamma)b_x, \quad (2.2)$$

где $h(x, t)$ — глубина потока; $q(x, t)$ — удельный расход (на единицу ширины канала); $u = q/h$ — скорость потока; $z(x, t) = b(x) + h(x, t)$ — отметка уровня свободной поверхности; $b(x)$ — вертикальная координата дна (отметка дна); g — ускорение свободного падения; $\gamma = \gamma^* H$ — размерный параметр; H — характерная глубина потока, которая для рассматриваемой задачи принимается равной начальной глубине воды в верхнем бьефе плотины; γ^* — безразмерный параметр, выбираемый путем согласования с результатами лабораторных экспериментов [23]. Уравнение (2.1) представляет собой закон сохранения массы, а уравнение (2.2) — модифицированный закон сохранения полного импульса, вывод которого приведен в [26]. Классический закон сохранения полного импульса

$$qt + (qu + gh^2/2)_x = -ghb_x \quad (2.3)$$

следует из уравнения (2.2) при $\gamma = 0$. Формально модифицированный закон сохранения полного импульса (2.2) получается в результате линейной комбинации уравнения (2.3) и уравнения

$$u_t + (u^2/2 + gz)_x = 0,$$

представляющего собой закон сохранения локального импульса [3].

В отличие от классической системы (2.1), (2.3) модифицированная система (2.1), (2.2) допускает распространение прерывных волн по сухому руслу. Соответствующие ей условия Гюгонно над горизонтальным дном $b(x) = \text{const}$ имеют вид

$$D[h] = [q]; \quad (2.4)$$

$$D([q] + \gamma[u]) = [qu + gh^2/2] + \gamma[u^2/2 + gh], \quad (2.5)$$

где D — скорость распространения прерывной волны; $[f] = f_1 - f_0$ — скачок функции f на ее фронте. Из условий (2.4) и (2.5) следует, что при движении прерывной волны по неподвижному фону ($u_0 = 0$) уравнение модифицированной ударной s -адиабаты и скорость распространения фронта волны задаются следующими формулами:

$$u = u_s(h, h_0, \gamma) = (h - h_0)\sqrt{g(\bar{h} + \gamma)/(hh_0 + \gamma\bar{h})}; \quad (2.6)$$

$$D = D(h, h_0, \gamma) = h\sqrt{g(\bar{h} + \gamma)/(hh_0 + \gamma\bar{h})} \quad (2.7)$$

($\bar{h} = (h + h_0)/2$, $h > h_0$). При $h_0 = 0$ эти формулы переходят в конечное соотношение

$$u = D = \sqrt{gh(h + 2\gamma)/\gamma} = \sqrt{\theta gh}, \quad (2.8)$$

где

$$\theta = u^2/(gh) = 2 + h/\gamma \quad (2.9)$$

число Фруда за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу.

В результате построения для модифицированной системы (2.1), (2.2) классического автомодельного решения задачи о разрушении плотины над горизонтальным дном, т. е. задачи Коши с начальными данными

$$h(x, 0) = \begin{cases} H, & x < -l_2, \\ h_0, & x > -l_2, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0, \quad (2.10)$$

где $h_0 = z_0$, получают прерывная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью $D = D(h_1, h_0, \gamma) > 0$, и центрированная волна понижения, соединенные областью постоянного течения $h_1 = z_1$, $u_1 > 0$ (линия 3 на рис. 1). Параметры постоянного течения находятся как координаты (h_1, u_1) точки пересечения монотонно возрастающей ударной s -адиабаты (2.6) и монотонно убывающей волновой r -адиабаты:

$$u = v_r(h, H) = 2\sqrt{g}(\sqrt{H} - \sqrt{h}), \quad h < H.$$

В частности, при $h_0 = 0$ с учетом (2.8) величины h_1 и u_1 связаны соотношением

$$u_1 = \sqrt{\theta gh_1} = 2\sqrt{g}(\sqrt{H} - \sqrt{h_1}),$$

из которого следует $h_1 = 4H/(\sqrt{\theta} + 2)^2$. Отсюда с учетом (2.9) получаем формулу

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{H} = \frac{h_1}{(\theta - 2)H} = \frac{4}{(\theta - 2)(\sqrt{\theta} + 2)^2}, \quad (2.11)$$

где безразмерный параметр γ^* выражается через число Фруда θ .

Из результатов работы [23], в которой задача о разрушении плотины (2.10) моделировалась экспериментально, следует, что в случае сухого русла в нижнем бьефе, т. е. при $h_0 = 0$, характерное значение числа Фруда за фронтом прерывной волны задается равенством $\theta = \theta_1 = 6,7$, откуда в силу (2.11) получаем $\gamma^* = \gamma_1^* = 0,05 \Rightarrow \gamma = \gamma_1 = \gamma_1^* H = 1,03$. Это значение γ используется в формулах (2.6) и (2.7) при вычислении параметров течения на фронте начальной прерывной волны, возникающей после разрушения плотины.

На рис. 2 приведена зависимость $h_1^*(h_0^*)$ ($h^* = h/H$ — безразмерная глубина), полученная при решении задачи (2.10) для классической системы (2.1), (2.3) (сплошная линия) и для модифицированной системы (2.1), (2.2) при $\gamma^* = \gamma_1^* = 0,05$ (штриховая линия). Видно, что существенные различия между классическим и модифицированным решениями имеют место только при $h_0^* < h_c^* \approx 0,14$, когда течение (h_1, u_1) за фронтом прерывной волны является сверхкритическим [12]. Этим объясняется тот факт, что решения, получаемые для классической системы (2.1), (2.3), достаточно точно воспроизводят экспериментальную картину течения в случае, когда начальные глубины воды в нижнем и верхнем бьефах удовлетворяют неравенству $h_0 > h_c^* H \approx 0,14H$, в силу чего формирующееся за фронтом прерывной волны постоянное течение (h_1, u_1) является докритическим [1, 21, 23].

Для построения решения при $t > t_0 = l_2/D$, т. е. после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой, для системы (2.1), (2.2) необходимо решить задачу о распаде разрыва

$$z(x, t_0) = \begin{cases} z_1, & x \leq 0, \\ z_0^*, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, t_0) = \begin{cases} u_1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

над скачком отметки дна

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \delta, & x > 0, \end{cases} \quad \delta > 0, \quad (2.13)$$

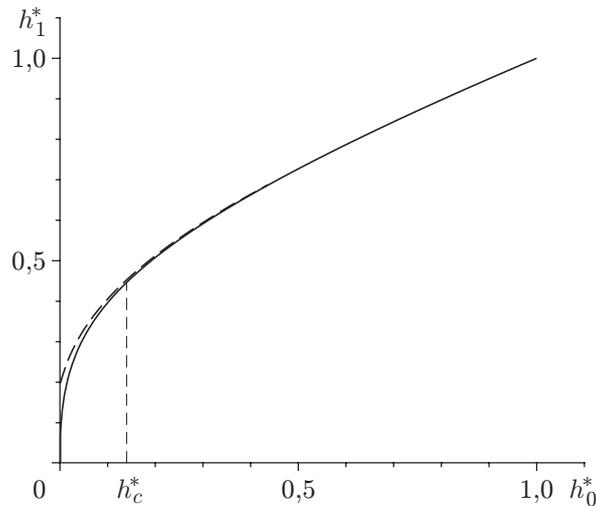


Рис. 2. Относительные глубины за фронтом прерывной волны, полученные при решении задачи о разрушении плотины для классической (сплошная линия) и модифицированной (штриховая линия) систем базисных законов сохранения теории мелкой воды

где $z_0^* = \delta$ при $z_0 \leq \delta$ и $z_0^* = z_0$ при $z_0 \geq \delta$. Точки с координатами $z_1 = h_1$ и u_1 (см. формулу (2.12)) лежат на ударной адиабате (2.6), т. е.

$$u_1 = u_s(z_1, z_0, \gamma_1). \quad (2.14)$$

Следуя [11, 12], решение для системы (2.1), (2.2) обобщенной задачи о распаде разрыва (2.12)–(2.14) будем искать в виде комбинации простых волн, стационарного скачка, расположенного в начале координат над ступенькой дна, и соединяющих их зон постоянного течения.

3. Автономные решения задачи о распаде разрыва над скачком отметки дна. Для построения автономных решений обобщенной задачи о распаде разрыва (2.12)–(2.14) необходимо задать соотношения, которым удовлетворяют параметры потока на разрыве, возникающем над ступенькой дна (2.13). Следуя [14, 15], будем считать, что если на этот разрыв приходят две характеристики, то на нем наряду с непрерывностью расхода

$$[q] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_0, \quad (3.1)$$

вытекающей при $D = 0$ из условия Гюгонио (2.4) для закона сохранения массы (2.1), необходимо требовать непрерывность функции Бернулли

$$[u^2/2 + gz] = 0 \quad \Rightarrow \quad (u_1^2 - u_0^2)/2 + g(z_1 - z_0) = 0, \quad (3.2)$$

которая при $D = 0$ следует из условия Гюгонио для закона сохранения локального импульса.

Решение обобщенной задачи о распаде разрыва (2.12)–(2.14) на основе модифицированной системы базисных законов сохранения (2.1), (2.2) строится обобщенным методом адиабат [13]. При этом используются результаты работы [27], в которой аналогичная задача в случае $z_0 \geq \delta$ (когда ступенька в начальный момент времени находится под водой) решается с помощью классической системы базисных законов сохранения (2.1), (2.3). С учетом этих результатов можно показать, что в проведенных экспериментах возможна реализация только двух режимов течений типа А и Б (сплошная и штриховая линии на

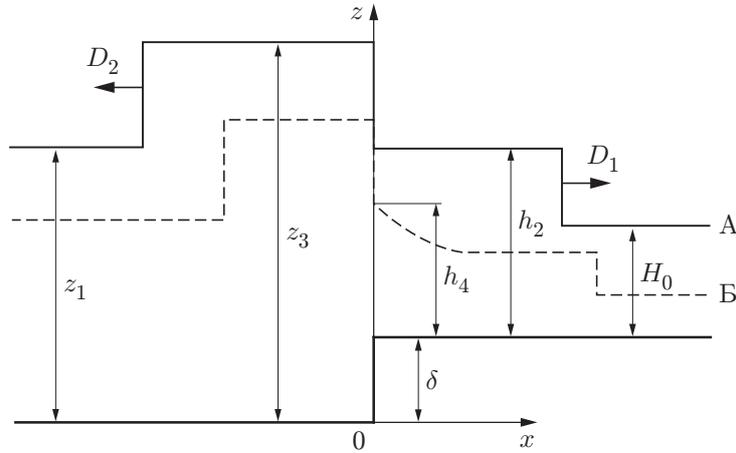


Рис. 3. Теоретические профили волн, возникающих после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна

рис. 3). При описании этих течений в рамках уравнений теории мелкой воды на разрыв, возникающий над ступенькой дна, приходят две характеристики, в силу чего на таком разрыве должны выполняться соотношения (3.1) и (3.2).

Автомодельное решение типа А, показанное на рис. 3 сплошной линией, состоит из прерывной волны, распространяющейся со скоростью $D_1 > 0$ за ступенькой, отраженной прерывной волны, распространяющейся со скоростью $D_2 < 0$ перед ступенькой, стоячего скачка над ступенькой и соединяющих их зон постоянного течения (h_2, u_2) и (z_3, u_3) . Автомодельное решение типа Б, показанное на рис. 3 штриховой линией, отличается от решения типа А только тем, что в нем постоянное течение (h_2, u_2) за ступенькой непрерывно переходит в центрированную r -волну понижения, на левой границе которой формируется критическое течение (h_4, u_4) . В случае если $z_0 \leq \delta$, т. е. если ступенька в начальный момент времени находится над водой, реализуется решение типа Б.

Эксперименты, проведенные в данной работе, показали, что при $z_0 \leq \delta$ число Фруда за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу за ступенькой, слабо зависит от величины z_0 и его характерное значение определяется равенством $\theta = \theta_2 = 15,4$. Из анализа решения типа Б следует, что такое число Фруда θ_2 достигается при $\gamma = \gamma_2 = 0,135$. Это значение γ используется в формулах (2.6) и (2.7) при получении параметров течения на фронте прерывной волны, распространяющейся за ступенькой. Поскольку отраженная от ступеньки прерывная волна распространяется по руслу конечной глубины $h_1 > 10$ см, она с достаточно высокой точностью описывается классическими условиями Гюгонио, получаемыми из формул (2.4) и (2.5) при $\gamma = 0$.

С учетом сделанных предположений параметры постоянных течений (h_2, u_2) и (z_3, u_3) в решении типа А находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} u_2 &= u_s(h_2, H_0, \gamma_2), & u_3 &= u_r(z_3, z_1, u_1), \\ J(z_3, q) &= J(h_2, q) + \delta, & q &= h_2 u_2 = z_3 u_3, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $u_s(h, H_0, \gamma)$ — модифицированная ударная s -адиабата (2.6);

$$u = u_r(z, z_1, u_1) = u_1 - (z - z_1) \sqrt{g(z + z_1)/(2z z_1)} \quad (z > z_1) —$$

классическая ударная r -адиабата [3], выходящая из точки (z_1, u_1) ; $J(h, q) = q^2/(2gh^2) + h$. Определив из системы (3.3) величины $h_2, u_2, z_3 = h_3, u_3$, вычислим скорости распростра-

нения прерывных волн D_1 и D_2 по формулам

$$D_1 = D(h_2, H_0, \gamma_2) = h_2 \sqrt{\frac{g((1 + 2\gamma_2)h_2 + (1 - 2\gamma_2)H_0)}{2h_2H_0 + \gamma_2(h_2^2 - H_0^2)}}, \quad (3.4)$$

$$D_2 = D_2(h_3, h_1, u_1) = u_1 - \sqrt{gh_3(h_3 + h_1)/(2h_1)}.$$

В решении типа Б глубина и скорость потока в центрированной r -волне понижения за ступенькой (штриховая линия на рис. 3) определяются по формулам [3]

$$h = (\xi - s)^2/(9g), \quad u = (2\xi + s)/3, \quad \xi = x/t \in [0, u_2 - c_2], \quad (3.5)$$

где $s = u_2 + 2c_2$ — постоянное значение s -инварианта в r -волне понижения; $c_2 = \sqrt{gh_2}$ — скорость распространения малых возмущений (скорость звука) в зоне постоянного течения (h_2, u_2) . Поскольку на левой границе волны понижения (3.5), расположенной на ступеньке, течение является критическим, его параметры (h_4, u_4) , с учетом того, что $u_4 = c_4 = \sqrt{gh_4}$, находятся из системы уравнений

$$u_3 = u_r(z_3, z_1, u_1), \quad J(z_3, q) = J(h_4, q) + \delta, \quad q = z_3 u_3 = \sqrt{gh_4^3} \quad (3.6)$$

одновременно с параметрами (z_3, u_3) постоянного течения за фронтом отраженной прерывной волны.

Определив величины h_4 и u_4 , параметры (h_2, u_2) постоянного течения между прерывной волной, распространяющейся за ступенькой, и r -волной понижения (3.5) можно вычислить из системы

$$u_2 = u_s(h_2, H_0, \gamma_2) = v_r(h_2, h_4, u_4), \quad (3.7)$$

где $u_s(h, H_0, \gamma)$ — модифицированная ударная s -адиабата (2.6);

$$u = v_r(h, h_4, u_4) = u_4 + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_4} - \sqrt{h}) \quad (h < h_4) —$$

волновая r -адиабата, выходящая из точки (h_4, u_4) , расположенной на линии критических течений $u = \sqrt{gh}$. Система (3.7) получается в результате решения для уравнений теории мелкой воды классической задачи о распаде разрыва над горизонтальным дном [3] со следующими начальными данными:

$$h(x, t_0) = \begin{cases} h_4, & x \leq 0, \\ H_0, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, t_0) = \begin{cases} u_4, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Определив из систем (3.6) и (3.7) величины $h_2, u_2, z_3 = h_3, u_3, h_4, u_4$, скорости распространения прерывных волн D_1 и D_2 , как и в случае решения типа А, можно найти по формулам (3.4).

Промежуточное решение, разделяющее течения типа А и Б, представляет собой решение типа А, в котором постоянное течение (h_2, u_2) за ступенькой является критическим. Параметры $z_0^* = h_0^* = H_0^* + \delta, z_1^*, u_1^*, h_2^*, u_2^*, z_3^*, u_3^*$ этого промежуточного решения, однозначно определяемые начальной глубиной верхнего бьефа H и высотой ступеньки δ , вычисляются из следующей системы уравнений:

$$u_1^* = u_s(z_1^*, z_0^*, \gamma_1) = v_r(z_1^*, H),$$

$$u_2^* = \sqrt{gh_2^*} = u_s(h_2^*, z_0^* - \delta, \gamma_2), \quad u_3^* = u_r(z_3^*, z_1^*, u_1^*), \quad (3.8)$$

$$J(z_3^*, q^*) = J(h_2^*, q^*) + \delta, \quad q^* = h_2^* u_2^* = z_3^* u_3^*.$$

В эксперименте значения $H = 20,5$ см и $\delta = 5,5$ см не менялись. Решая систему (3.8) с этими значениями H и δ , получим $z_0^* = 7,7$ см, $H_0^* = 2,2$ см, $z_1^* = 13,3$ см, $u_1^* = 55,7$ см/с,

$h_2^* = 7,1$ см, $u_2^* = 82,6$ см/с, $z_3^* = 15,3$ см, $u_3^* = 38,3$ см/с. Подставляя данные значения в формулы (2.7), (3.4), получим следующие значения скоростей распространения прерывных волн в промежуточном решении: $D^* = 133$ см/с, $D_1^* = 120$ см/с, $D_2^* = 72$ см/с. При этом если начальный уровень воды в нижнем бьефе $z_0 \in [z_{\min}, z_0^*]$, то после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна имеет место решение типа Б; если $z_0 \in (z_0^*, H)$, то реализуется решение типа А. Поскольку $H_0^* > 0$, течения, в которых прерывная волна за ступенькой распространяется по сухому руслу ($H_0 = 0$), описываются решениями типа Б.

Автомодельные решения типа А и Б находились путем численного решения итерационным методом соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений. Точность этих численных решений на несколько порядков превышает точность экспериментальных данных.

4. Сравнение теории и эксперимента. На рис. 4–9 приведены результаты сравнения теоретически и экспериментально полученных параметров течений, возникающих после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна.

На рис. 4, 5 показано изменение во времени уровня свободной поверхности воды в фиксированном поперечном сечении канала. В теоретическом решении основное различие волн типа А и Б за ступенькой заключается в том, что уровень свободной поверхности за фронтом волны типа Б сначала выходит на постоянное значение, а затем монотонно повышается, в то время как уровень за фронтом волны типа А не меняется (см. рис. 3). Экспериментальные данные на рис. 4 качественно согласуются с теоретическим результатом. В то же время ондуляции, возникающие за фронтом волны типа А, первым при-

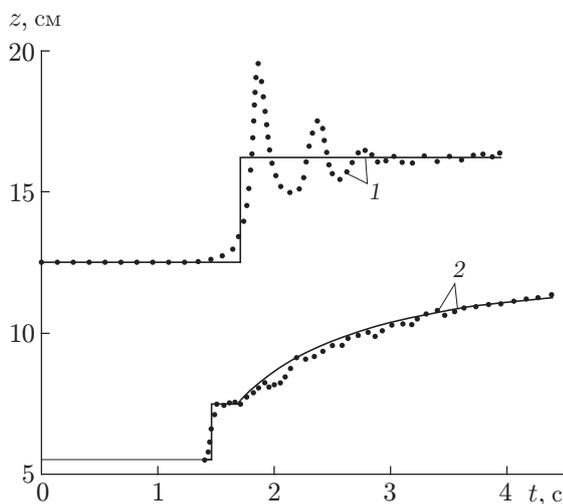


Рис. 4

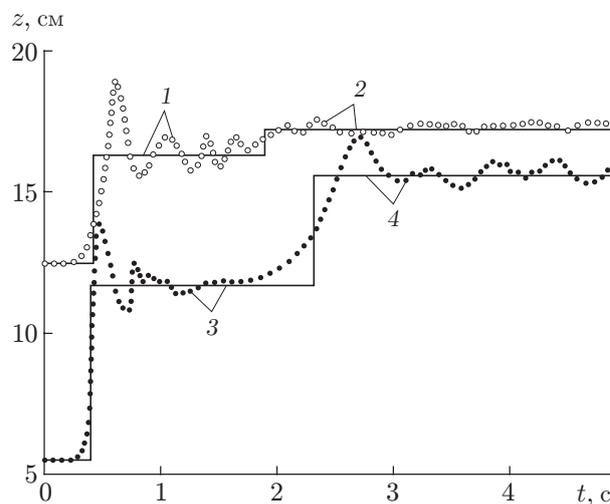


Рис. 5

Рис. 4. Изменение во времени уровня свободной поверхности за ступенькой при $x = 80$ см:

сплошная линия — теоретическое решение; точки — экспериментальные данные; 1 — волна типа А ($z_0 = 12,5$ см); 2 — волна типа Б ($z_0 = \delta = 5,5$ см)

Рис. 5. Изменение во времени уровня свободной поверхности перед ступенькой при $x = -82$ см:

сплошная линия — теоретическое решение; точки — экспериментальные данные; 1, 2 — волна типа А при $z_0 = 12,5$ см (1 — набегающая на ступеньку, 2 — отраженная от нее); 3, 4 — волна типа Б при $z_0 = \delta = 5,5$ см (3 — набегающая на ступеньку, 4 — отраженная от нее)

ближением теории мелкой воды не описываются. Появление ондуляций обусловлено тем, что на некотором интервале за фронтом волны типа А вертикальные скорости на поверхности жидкости сравнимы с горизонтальными. Для теоретического моделирования таких ондуляций необходимо использовать более точные приближения теории мелкой воды или полные уравнения гидродинамики.

В теоретическом решении уровень свободной поверхности за фронтом прерывной волны за ступенькой меняется скачкообразно, в том числе в случае распространения волны по сухому руслу (см. рис. 3–5). В опытах волны имеют вид движущегося гидравлического прыжка. Как известно, в стационарном течении в зависимости от значения числа Фруда существует пять разновидностей гидравлического прыжка [28]. Все они наблюдаются в рассматриваемой нестационарной задаче. Бор с вальцом в головной части и гладкий ондулярный бор являются основными разновидностями гидравлического прыжка. Другие формы переходные.

На рис. 4 экспериментальная волна типа А представляет собой гладкую ондулярную волну, первый гребень которой обрушился на расстоянии $x = 200$ см от ступеньки. Головная часть экспериментальной волны типа Б, распространяющейся по сухому руслу, характеризуется наличием ярко выраженного вальца. С ростом начальной глубины H_0 за вальцом возникают ондуляции, уменьшающиеся вверх по потоку. Из результатов экспериментов следует, что существует область значений x , t и H_0 , при которых волны за ступенькой имеют вид гладкого ондулярного бора. При дальнейшем увеличении начальной глубины H_0 , когда перепад уровней $\Delta z = z_1 - z_0$ становится достаточно малым, экспериментальные волны типа А за ступенькой становятся линейными, в силу чего их с достаточно высокой точностью можно моделировать на основе линейного приближения теории мелкой воды.

Зависимости, приведенные на рис. 5, представляют собой профили начальной прерывной волны, набегающей на ступеньку, и прерывной волны, отраженной от нее. Первое резкое повышение уровня свободной поверхности происходит, когда волномера достигает начальная прерывная волна, образующаяся при удалении щита над ровным дном, второе — когда волномера достигает волна, отраженная от ступеньки. При этом экспериментальные волны типа А, как начальная, так и отраженная от ступеньки, являются гладкими, а волны типа Б представляют собой движущийся гидравлический прыжок с постоянно обрушивающимся первым гребнем (бор с вальцом [28]).

На рис. 6, 7 представлены относительные уровни воды за фронтами прерывных волн, распространяющихся за ступенькой и перед ней соответственно. Случайная погрешность измерения этих уровней не превышает размера приведенных на рис. 6, 7 точек. В случае гладкого ондулярного бора и переходных форм бора с ондуляциями в качестве экспериментального значения уровня принималось его асимптотическое значение, т. е. значение уровня на достаточно большом расстоянии от фронта волны, где ондуляции вырождаются. Из рис. 6, 7 следует, что теоретические результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными по асимптотической глубине за фронтом волны. Ондуляции первое приближение теории мелкой воды не описывает.

На рис. 8, 9 приведены относительные скорости распространения прерывных волн за ступенькой и перед ней соответственно. В эксперименте в качестве такой скорости принимается скорость продольного перемещения некоторой точки, выбранной на профиле волны. Из-за обрушений на фронте волны определенная таким способом скорость может зависеть от выбора точки профиля. Экспериментальные данные на рис. 8, 9 соответствуют скорости перемещения средней по высоте точки на фронте волны. Эта скорость определялась по сигналам двух неподвижных волномеров, расположенных в точках с координатами x_1 и x_2 . Указанная скорость отнесена к значению $x = (x_2 - x_1)/2$, соответствующему сере-

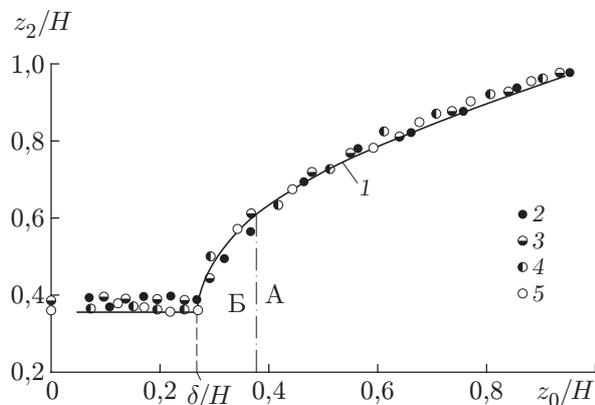


Рис. 6

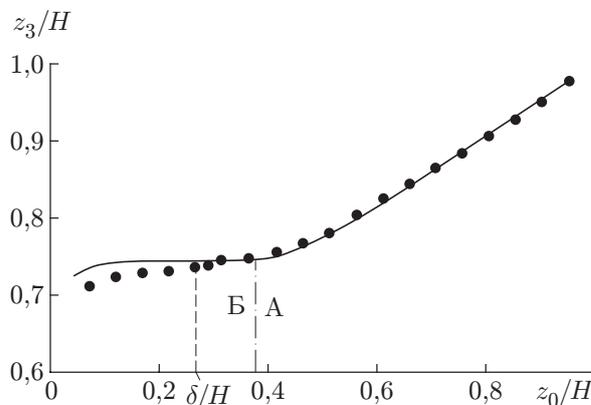


Рис. 7

Рис. 6. Уровень воды за фронтом волны, распространяющейся за ступенькой: 1 — теоретическое решение; 2–5 — экспериментальные данные (2 — $x = 40$ см; 3 — $x = 80$ см; 4 — $x = 120$ см; 5 — $x = 150$ см); штрихпунктирная линия — граница, разделяющая области существования волн типа А и Б

Рис. 7. Уровень воды за фронтом отраженной от ступеньки волны: сплошная линия — теоретическое решение; точки — экспериментальные данные; штрихпунктирная линия — граница, разделяющая области существования волн типа А и Б

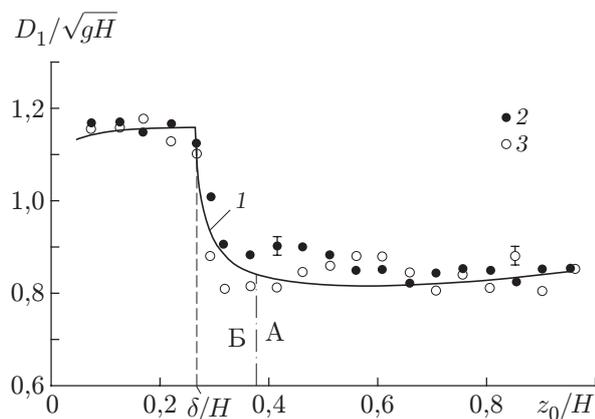


Рис. 8

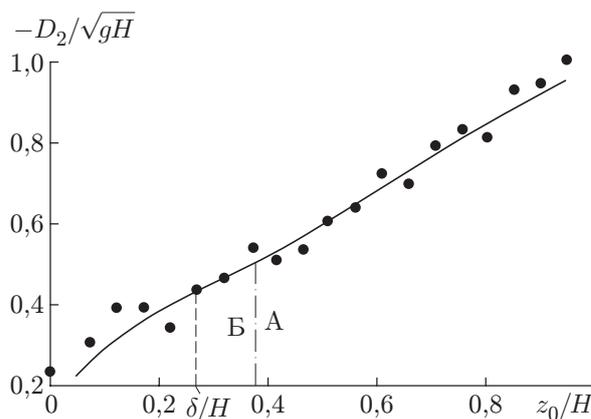


Рис. 9

Рис. 8. Скорость распространения фронта прерывной волны за ступенькой: 1 — теоретическое решение; 2, 3 — экспериментальные данные (2 — $x_1 = 45$ см, $x_2 = 75$ см, $x = 60$ см; 3 — $x_1 = 115$ см, $x_2 = 155$ см, $x = 135$ см); штрихпунктирная линия — граница, разделяющая области существования волн типа А и Б

Рис. 9. Скорость распространения фронта отраженной от ступеньки волны: сплошная линия — теоретическое решение; точки — экспериментальные данные ($x_1 = -85$ см, $x_2 = -55$ см, $x = -70$ см); штрихпунктирная линия — граница, разделяющая области существования волн типа А и Б

дине интервала $[x_1, x_2]$. Для бора с вальцом неизбежна случайная погрешность измерения скорости его распространения, обусловленная тем, что валец случайным образом меняет свою форму. Поэтому для ряда значений параметров задачи измерения повторялись в одних и тех же условиях до пяти раз. Среднеквадратичное значение погрешности, полученное в результате повторных измерений, показано на рис. 8 вертикальными отрезками. Из рис. 8, 9 следует, что теоретические и экспериментальные значения скоростей D_1 и D_2 достаточно хорошо согласуются, в частности в случае распространения прерывной волны за ступенькой по сухому руслу.

Заключение. Построенные в данной работе автомодельные решения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными по различным параметрам (типы волн, скорость их распространения, асимптотические глубины за их фронтами). При построении этих решений на основе теории мелкой воды использовалась модифицированная система базисных законов сохранения, позволяющая описывать распространение прерывных волн по сухому руслу, а также предположение о сохранении полной энергии набегающего потока на стоячем гидравлическом прыжке, возникающем над ступенькой дна. Следует отметить, что математическое моделирование распространения волн по сухому руслу в рамках полных уравнений гидродинамики представляет собой достаточно сложную задачу (см. [29]). В решениях этой задачи, получаемых с помощью численных методов, основанных на двумерных уравнениях Эйлера и Навье — Стокса (без учета процесса вовлечения пузырьков воздуха в головную часть волны), существенно завышена скорость распространения передней кромки волны. В расчетах задачи о разрушении плотины над горизонтальным дном с сухим руслом в нижнем бьефе [29] эта скорость асимптотически выходит на скорость распространения соответствующей волны понижения, получаемой из классической системы базисных законов сохранения теории мелкой воды (2.1), (2.3). Кроме того, указанные численные решения могут существенно искажать профиль головной части волны, распространяющейся по сухому руслу. В то же время из результатов данной работы следует, что предложенный в ней метод позволяет в рамках теории мелкой воды адекватно моделировать процесс распространения таких волн путем построения соответствующих автомодельных решений (см. рис. 4, 6, 8).

Таким образом, предложенная модификация теории мелкой воды в целом достаточно точно описывает волновые течения, возникающие при прохождении прерывной волны над ступенькой дна. Вместе с тем эта теория не позволяет описывать ондуляции, поскольку в ней используется гидростатический закон распределения давления. Для описания ондуляций необходимо применять модели, учитывающие отклонение от этого закона, например классические уравнения Буссинеска или другие уравнения, полученные на основе более высоких приближений теории мелкой воды.

Авторы выражают благодарность В. И. Букрееву за помощь при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. **Остапенко В. В.** Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2004.
4. **Васильев О. Ф., Гладышев М. Т.** О расчете прерывных волн в открытых руслах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 6. С. 120–123.

5. **Атавин А. А., Гладышев М. Т., Шугрин С. М.** О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 37–64.
6. **Остапенко В. В.** О сквозном расчете прерывных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 5. С. 743–752.
7. **Воеводин А. Ф., Остапенко В. В.** О расчете прерывных волн в открытых руслах // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 4. С. 305–321.
8. **Delis A., Skeels C. P.** TVD schemes for open channel flow // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1998. V. 26. P. 791–809.
9. **Gottardi G., Venutelli M.** Central schemes for open channel flow // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 41. P. 841–861.
10. **Шокин Ю. И.** Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю. И. Шокин, Л. Б. Чубаров, А. Г. Марчук, К. В. Симонов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
11. **Alcrudo F., Benkhaldon F.** Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with bottom step // Comput. Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
12. **Остапенко В. В.** О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
13. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
14. **Остапенко В. В.** Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 51–63.
15. **Остапенко В. В.** Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 107–122.
16. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом дна открытого канала // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 64–75.
17. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 72–83.
18. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // Вод. ресурсы. 2004. Т. 31, № 5. С. 1–6.
19. **Судобичер В. Г., Шугрин С. М.** Движение потока воды по сухому руслу // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1968. № 13, вып. 3. С. 116–122.
20. **Борисова Н. М., Остапенко В. В.** О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 7. С. 1322–1344.
21. **Dreisler R. E.** Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. N 38. P. 319–328.
22. **Stansby P. K., Chegini A., Barnes T. C. D.** The initial stages of dam-break flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 374. P. 407–424.
23. **Букреев В. И., Гусев А. В., Малышева А. А., Малышева И. А.** Экспериментальная проверка газогидравлической аналогии на примере задачи о разрушении плотины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 5. С. 145–154.
24. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Начальная стадия генерации волн при разрушении плотины // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 1–4.
25. **Борисова Н. М., Гусев А. В., Остапенко В. В.** О распространении прерывных волн по сухому руслу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 135–148.

26. **Остапенко В. В.** Модифицированные уравнения теории мелкой воды, допускающие распространение прерывных волн по сухому руслу // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 22–43.
27. **Остапенко В. В., Малышева А. А.** Течения, возникающие при набегании прерывной волны на ступеньку дна // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 8–22.
28. **Ven Te Chow.** Open-channel hydraulics. N. Y.: McGraw Hill Book Co., 1959.
29. **Colicchio G., Colagrossi A., Greco M., Landrini M.** Free-surface flow after a dam break: a comparative study // Schiffstechnik. 2002. Bd 49, N 3. S. 95–104.

*Поступила в редакцию 5/XII 2006 г.,
в окончательном варианте — 29/VI 2007 г.*
