УДК 539.3:534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ТРЕМЯ ФАЗОВЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Р. Р. Гупта, Р. Кумар, К. Кумар

Университет Махариши Маркэндешво, 133203 Амбала, Харьяна, Индия
E-mail: raji.mmec@gmail.com

С использованием термоупругой модели с диссипацией энергии исследуется распространение волн Рэлея — Лэмба в слое трансверсально-изотропной среды. Выведены не зависящие друг от друга характеристические уравнения для симметричных и кососимметричных мод распространяющихся волн. Получены амплитуды смещений и распределения температуры. Найдено численное решение задачи в случае, когда материалом среды является кобальт. Приведены дисперсионные кривые, зависимости амплитуды смещений и температуры от волнового числа для симметричных и кососимметричных мод волн. Рассмотрены некоторые частные случаи.

Ключевые слова: термоупругость, диссипация энергии, трансверсально-изотропная среда, распространение волн.

Введение. Классическая теория термоупругости, в которой скорость распространения тепловых сигналов бесконечна, противоречит физическим фактам. Для того чтобы устранить этот парадокс, в последние 30 лет были развиты неклассические теории, в которых скорость теплопереноса в упругих твердых телах конечна. В отличие от обычной связанной теории термоупругости [1], содержащей уравнение теплопередачи параболического типа, обобщенные теории содержат уравнение теплопередачи гиперболического типа. Наличие в обобщенных теориях уравнения такого типа означает, что процесс распространения тепла в теле является процессом волнового типа (второй звуковой эффект), что подтверждается экспериментальными данными. В обобщенной теории термоупругости, предложенной в работе [1], в законе теплопроводности Фурье имеется член, определяющий скорость изменения потока тепла. В [1] также сформулирована обобщенная теория, которая содержит уравнение переноса тепла гиперболического типа с конечной скоростью распространения теплового сигнала. В [2] развита теория термоупругости, учитывающая скорость изменения температуры за счет введения коэффициентов релаксации, что не нарушает классический закон теплопроводности Фурье. В теории термоупругости [2] скорость распространения тепла также является конечной.

В работах [3, 4] теория, предложенная в [5–10], рассматривается в качестве альтернативной теории распространения тепла. Эта теория позволяет создать согласованную теорию, полностью описывающую передачу теплового импульса. В [3–10] используется общий баланс энтропии, а не энтропийное неравенство. В теории [3–10], являющейся достаточно общей, для описания распространения тепла используется определяющая функция трех типов (теории типов I, II, III). В линеаризованной теории (теории типа I) уравнение теплопроводности является параболическим. В данной работе рассматривается теория типа II (предельный случай теории типа III), в которой не допускается диссипация энергии. Обычно эта теория называется теорией без диссипации энергии. Согласно [5–10] теория термоупругости без диссипации энергии удовлетворительно описывает теплопроводность в сплошной среде.

В работе [11] предложена теория термоупругости без диссипации энергии для материалов с однородной микроструктурой, получены уравнения линейной теории и доказана теорема единственности для материалов, обладающих центром симметрии. В [12, 13] с использованием линейной теории термоупругости Грина — Нагди типов II, III изучены тепловые и механические волны в слое гомогенного термоупругого твердого материала и плоские волны в бесконечной среде соответственно. Различные виды задач теории термоупругости типа III исследовались в большом количестве работ (см. [14–21]).

Целью данной работы является изучение распространения волн Лэмба в слое трансверсально-изотропной среды с помощью термоупругой модели, учитывающей диссипацию энергии. Результаты этого исследования могут быть использованы в различных областях науки и технике (в атомной физике, металлургии, на тепловых электростанциях, при создании подводных конструкций, камер высокого давления и т. д.).

1. Основные уравнения. Ниже рассматривается обладающая общей анизотропией и диссипацией энергии среда с центром симметрии. Для описания поведения такой среды в отсутствие массовых сил используются следующие уравнения:

— определяющие соотношения

$$t_{mn} = c_{mnkl} c_{kl} - \beta_{mn} T; \tag{1}$$

— уравнения связи тензора деформаций с вектором перемещений

$$e_{nm} = (u_{m,n} + u_{n,m})/2;$$

— уравнения движения

$$t_{mn,n} = \rho \ddot{u}_m;$$

— уравнение теплопроводности

$$K_{mn} \dot{T}_{,mn} + K^*_{mn} T_{,mn} = \rho c^* \ddot{T} + T_0 \beta_{mn} \ddot{u}_{m,n}, \qquad m, n = 1, 2, 3,$$

где t_{mn} — тензор напряжений; ρ — плотность; u_m — компонента вектора перемещений; T — температура материальной частицы; T_0 — исходная равномерно распределенная температура тела; $K^*_{mn} = k^*_m \delta_{mn}$ — постоянный тензор, характерный для рассматриваемой теории; $K_{mn} = k_m \delta_{mn}$ — теплопроводность; $\beta_{mn} = \beta_m \delta_{mn}$ — тензор тепловой упругой связи; c^* — удельная теплоемкость при постоянном напряжении; c_{mnkl} — характерные константы материала, удовлетворяющие условиям симметрии

$$c_{ijkl} = c_{klmn} = c_{nmkl}, \quad K^*_{mn} = K^*_{nm}, \quad K_{mn} = K_{nm}, \quad \beta_{mn} = \beta_{nm}.$$

2. Формулировка задачи. Для того чтобы получить уравнения для трансверсально-изотропной среды, нужно выполнить преобразования системы уравнений (1), следуя работе [22]. Ниже проводится анализ двумерных задач.

В данной работе рассматривается бесконечный слой гомогенного трансверсально-изотропного термоупругого материала толщиной $2H$ с поверхностями $x_3 = \pm H$, свободными от усилий. Начало системы координат (x_1, x_2, x_3) выбрано на срединной плоскости слоя. Плоскость (x_1, x_2) совпадает со срединной плоскостью, а ось x_3 перпендикулярна ей. В двумерной задаче компоненты вектора смещения записываются в виде

$$\boldsymbol{u} = (u_1, 0, u_3),$$

решение не зависит явно от x_2, т. е. $\partial/\partial x_2 \equiv 0$. Таким образом, уравнения поля и определяющие соотношения для такой среды сводятся к системе уравнений

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \, \partial x_3} - \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$c_{55}\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+c_{33}\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(c_{13}+c_{55})\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_3}-\beta_3\,\frac{\partial T}{\partial x_1}=\rho\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

$$K_1\,\frac{\partial^3 T}{\partial t\,\partial x_1^2}+K_3\,\frac{\partial^3 T}{\partial t\,\partial x_1^2}+K_1^*\,\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^3}+K_3^*\,\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=\rho c^*\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\beta_1 T_0\,\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3\,t^2}+\beta_3 T_0\,\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\,t^2}$$

(в индексах материальных констант выполнены следующие замены: $11\to1$, $33\to3$, $13\to5$).

Ниже вводятся следующие безразмерные переменные:

$$x_i'=\frac{x_i}{L},\quad u_i'=\frac{u_i}{L},\quad t_{ij}'=\frac{t_{ij}}{c_{55}},\quad t'=\frac{t}{t_0},\quad T'=\frac{T}{T_0} \qquad (3)$$

(L, t_0, T_0 — характерные параметры, имеющие размерность длины, времени (в секундах) и температуры (в градусах по шкале Цельсия) соответственно).

3. Граничные условия. Границы пластины предполагаются свободными от напряжений и теплоизолированными, поэтому рассматриваются следующие граничные условия.

На поверхностях слоя $x_3=\pm H$ ставятся условия равенства нулю нормальных и касательных напряжений

$$t_{33}=0,\qquad t_{31}=0, \qquad (4)$$

где

$$t_{33}=c_{13}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{33}\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\beta_3 T,\quad t_{31}=\frac{c_{55}}{c_{33}}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big). \qquad (5)$$

Для температуры на поверхностях $x_3=\pm H$ ставятся следующие краевые условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x_3}+hT=0. \qquad (6)$$

Здесь h — коэффициент теплопередачи поверхности (предельный случай $h\to0$ соответствует теплоизолированным границам, предельный случай $h\to\infty$ — изотермическим границам).

4. Анализ нормальных мод и решение задачи. Пусть решение для u_1, u_3, T, описывающее распространение волн в плоскости (x_1,x_3), имеет вид

$$(u_1,u_3,T)=(1,\bar u_3,\bar T)u_1\,\mathrm{e}^{i\xi(x_1+mx_3-ct)}, \qquad (7)$$

где ξ — волновое число; $\omega=\xi c$ — угловая частота; c — фазовая скорость волны; m — неизвестный параметр, характеризующий глубину проникновения волны; $\bar u_3$, $\bar T$ — отношения амплитуды смещения u_3 и распределения температуры T к величине смещения u_1 соответственно.

С использованием (3), (7) уравнения (2) приводятся к виду

$$\begin{gathered}(m^2+a_1+ma_2\bar u_3+a_3\bar T)u_1\,\mathrm{e}^{i\xi(x_1+mx_3-ct)}=0,\\ (ma_4+(m^2+a_5)\bar u_3+a_6m\bar T)u_1\,\mathrm{e}^{i\xi(x_1+mx_3-ct)}=0,\\ (a_7+a_8m\bar u_3+(a_9-m^2)\bar T)u_1\,\mathrm{e}^{i\xi(x_1+mx_3-ct)}=0,\end{gathered} \qquad (8)$$

где

$$a_1=\frac{c_{11}}{c_{55}}-\frac{\rho c^2L^2}{c_{55}t_0^2},\quad a_2=1+\frac{c_{13}}{c_{55}},\quad a_3=-\frac{i\beta_1T_0}{c_{55}\xi},\quad a_4=\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{33}},\quad a_5=\frac{c_{55}}{c_{33}}-\frac{\rho c^2L^2}{c_{33}t_0^2},$$

$$a_6=-i\,\frac{\beta_3T_0}{c_{33}\xi},\quad a_7=-\frac{i\beta_1L^2\xi c^2}{t_0(K_3i\xi c-K_3^*t_0)},\quad a_8=-\frac{i\beta_3L^2\xi c^2}{t_0(K_3i\xi c-K_3^*t_0)},$$

$$a_9 = \frac{K_1^* t_0^2 L - c^* \rho L^3 c^2 - K_1 i\xi c t_0 L}{t_0 L (K_3 i\xi c - K_3^* t_0)}.$$

При записи уравнений (8) штрихи у безразмерных величин опущены.

Из условия существования нетривиального решения системы уравнений (8) следует кубическое уравнение для m^2

$$m^6 + Am^4 + Bm^2 + C = 0, \tag{9}$$

где

$$A = a_1 - a_9 + a_5 + a_6 a_8 - a_2 a_4, \qquad C = a_5(a_3 a_7 - a_1 a_9),$$

$$B = a_1(a_5 + a_6 a_8 - a_9) - a_5 a_9 + a_2(a_4 a_9 - a_6 a_7) + a_3 a_7 - a_3 a_4 a_8.$$

Волны Лэмба обладают дисперсией, т. е. скорость их распространения c зависит от частоты, упругих постоянных и плотности материалов. Эти дисперсионные волны возникают в отсутствие сил на обеих поверхностях пластины. Корнями уравнения (9) являются три значения m^2 и, следовательно, три значения c^2. Три положительных значения c представляют собой скорости распространения трех возможных волн, а именно квазипродольной, квазипоперечной и квазитепловой волн. Таким образом, решения уравнения (9) сводятся к решению для смещений и распределения температуры следующего вида:

$$(u_1, u_3, T) = \sum_{k=1}^{3} [A_k \cos(\xi m_k x_3) + B_k \sin(\xi m_k x_3)](1, r_k, t_k)\, \mathrm{e}^{i\xi(x_1 - ct)}\,. \tag{10}$$

Здесь

$$r_k = -\frac{m_k[m_k^2 a_4 - (a_4 a_9 - a_6 a_7)]}{m_k^4 - m_k^2(a_9 - a_5 - a_6 a_8) - a_5 a_9}, \qquad t_k = -\frac{m_k^2(a_4 a_8 - a_7) - a_5 a_7}{m_k^4 - m_k^2(a_9 - a_5 - a_6 a_8) - a_5 a_9}.$$

5. Вывод характеристического уравнения. Подставляя величины u_1, u_2, T в граничные условия (4), (6) на поверхностях слоя $x_3 = \pm H$, с помощью уравнений (5) получаем

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{3} [((g_1 + g_{2k})c_k - g_{3i} s_k)A_k + ((g_1 + g_{2k})s_k + g_{3k} c_k)B_k] = 0, \\
\sum_{k=1}^{3} (-A_k g_{6k} s_k + B_k g_{6k} c_k) = 0, \\
\sum_{k=1}^{3} [((g_1 + g_{2k})c_k + g_{3k} s_k)A_k + (-(g_1 + g_{2k})s_k + g_{3k} c_k)B_k] = 0, \\
\sum_{k=1}^{3} (A_k g_{6k} s_k + B_k g_{6k} c_k) = 0, \\
\sum_{k=1}^{3} [(g_{4k} c_k - g_{5k} s_k)A_k + (g_{4k} s_k + g_{5k} c_k)B_k] = 0, \\
\sum_{k=1}^{3} [(g_{4k} c_k + g_{5k} s_k)A_k + (-g_{4k} s_k + g_{5k} c_k)B_k] = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$s_k = \sin(m_k \xi x_3), \quad c_k = \cos(m_k \xi x_3), \quad g_1 = \frac{c_{13}}{c_{33}}\, i\xi, \quad g_{2k} = \frac{\beta_3 t_k}{c_{13}},$$

$$g_{3k} = r_k m_k \xi, \quad g_{4k} = \frac{c_{55}}{c_{33}}\, i r_k \xi, \quad g_{5k} = \frac{c_{55}}{c_{33}}\, m_k \xi, \quad g_{6k} = t_k m_k \xi, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для того чтобы одновременно выполнялись шесть этих граничных условий, определитель системы для коэффициентов A_k и B_k ($k = 1, 2, 3$) в уравнениях (11) должен быть равен нулю. Из этого условия следуют уравнения для частоты колебаний слоя. После ряда алгебраических преобразований частотные уравнения для волн приводятся к характеристическим уравнениям

$$[T_1]^{\pm}[g_{61}g_{42}(g_1 + g_{23}) - g_{61}g_{43}(g_1 + g_{22})] + [T_2]^{\pm}[g_{62}g_{43}(g_1 + g_{21}) - g_{62}g_{41}(g_1 + g_{23})] + \\ + [T_3]^{\pm}[g_{63}g_{41}(g_1 + g_{22}) - g_{63}g_{42}(g_1 + g_{21})] = 0, \qquad (12)$$

которые соответствуют симметричным и кососимметричным относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ модам. В (12)

$$T_k = \operatorname{tg}(m_k \xi x_3), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Решение уравнений (12) определяет точную траекторию движения частицы, уравнение которого представлено в общем виде (10). В уравнении (12) верхний индекс "+" порождает семейство волн, движение которых симметрично относительно срединной плоскости пластины (плоскости $x_3 = 0$), верхний индекс "−" — семейство волн, движение которых антисимметрично относительно срединной плоскости.

Можно показать, что выражения для амплитуд компонент вектора смещений и распределения температуры для симметричной и кососимметричной мод плоских волн записываются в виде

$$((u_1)_{sym}, (u_1)_{asym}) = \sum_{k=1}^{3} (A_k \cos(\xi m_k x_3), B_k \sin(\xi m_k x_3))\, \mathrm{e}^{i\xi(x_1 - ct)},$$

$$((u_2)_{sym}, (u_2)_{asym}) = \sum_{k=1}^{3} r_k (A_k \sin(\xi m_k x_3), B_k \cos(\xi m_k x_3))\, \mathrm{e}^{i\xi(x_1 - ct)},$$

$$((T)_{sym}, (T)_{asym}) = \sum_{k=1}^{3} t_k (A_k \sin(\xi m_k x_3), B_k \cos(\xi m_k x_3))\, \mathrm{e}^{i\xi(x_1 - ct)}.$$

Удельная потеря энергии представляет собой отношение диссипированной энергии ΔW в образце в цикле напряжений к упругой энергии W, накопленной в образце при максимальном напряжении. В работе [23] показано, что в случае плоской синусоидальной волны небольшой амплитуды удельная потеря $\Delta W/W$ в 4π раз больше абсолютного значения отношения мнимой части волнового числа к его вещественной части:

$$\frac{\Delta W}{W} = 4\pi \Big|\frac{\operatorname{Im}(\xi)}{\operatorname{Re}(\xi)}\Big|.$$

Отмечено, что понятие удельной потери может быть использовано при определении внутреннего трения в материале.

6. Частные случаи характеристик материала. Полагая

$$c_{11} = c_{55} = \lambda + 2\mu, \qquad c_{55} = \mu, \qquad c_{13} = \lambda,$$

$$K_1 = K_3 = K, \qquad K_1^* = K_3^* = K^*, \qquad \beta_1 = \beta_3 = \beta,$$

получаем выражения для изотропного термоупругого тела с диссипацией энергии.

Пренебрегая тепловым эффектом, получаем выражения для трансверсально-изотропной упругой среды, которые после ряда преобразований совпадают с результатами, полученными в [24].

7. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Приведем результаты некоторых численных расчетов. В качестве материала рассматривался кобальт — термоупругий трансверсально-изотропный материал. Физические постоянные для этого материала взяты из [25]: $c_{11} = 3{,}071 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $c_{12} = 1{,}650 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $c_{13} = 1{,}027 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $c_{33} = 3{,}581 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $c_{55} = 1{,}51 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\beta_1 = 7{,}04 \cdot 10^6$ Н/(м$^2 \cdot$ К), $\beta_3 = 6{,}90 \times 10^6$ Н/(м$^2 \cdot$ К), $\rho = 8{,}836 \cdot 10^3$ кг/м^3, $K_1 = 6{,}90 \cdot 10^2$ Вт/(м $\cdot$ К), $K_3 = 7{,}01 \cdot 10^2$ Вт/(м $\cdot$ К), $K_1^* = 1{,}313 \cdot 10^2$ Вт $\cdot$ с, $K_3^* = 1{,}54 \cdot 10^2$ Вт $\cdot$ с, $c^* = 4{,}27 \cdot 10^2$ Дж/(кг $\cdot$ К), $T = 298$ К.

На рис. 1, 2 приведены зависимости безразмерной фазовой скорости c, коэффициента затухания α и удельной потери $\Delta W/W$ от безразмерной вещественной части волнового числа R для симметричных и кососимметричных мод при $H = 1$.

На рис. 1,*а* видно, что и в случае трансверсально-изотропного термоупругого материала с диссипацией энергии (ТИДЭ), и в случае изотропного термоупругого материала с диссипацией энергии (ИДЭ) для всех симметричных мод распространяющейся волны

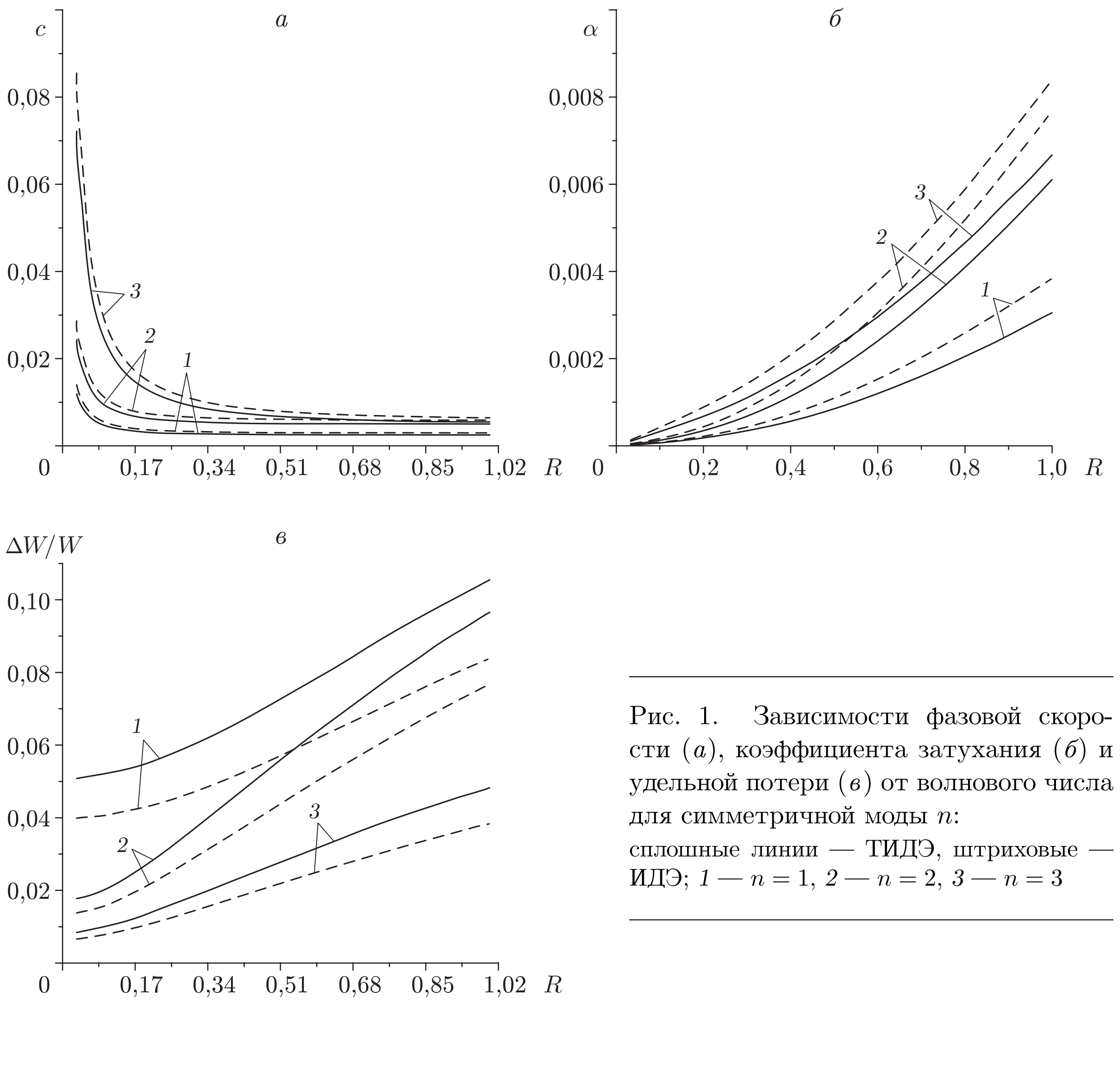
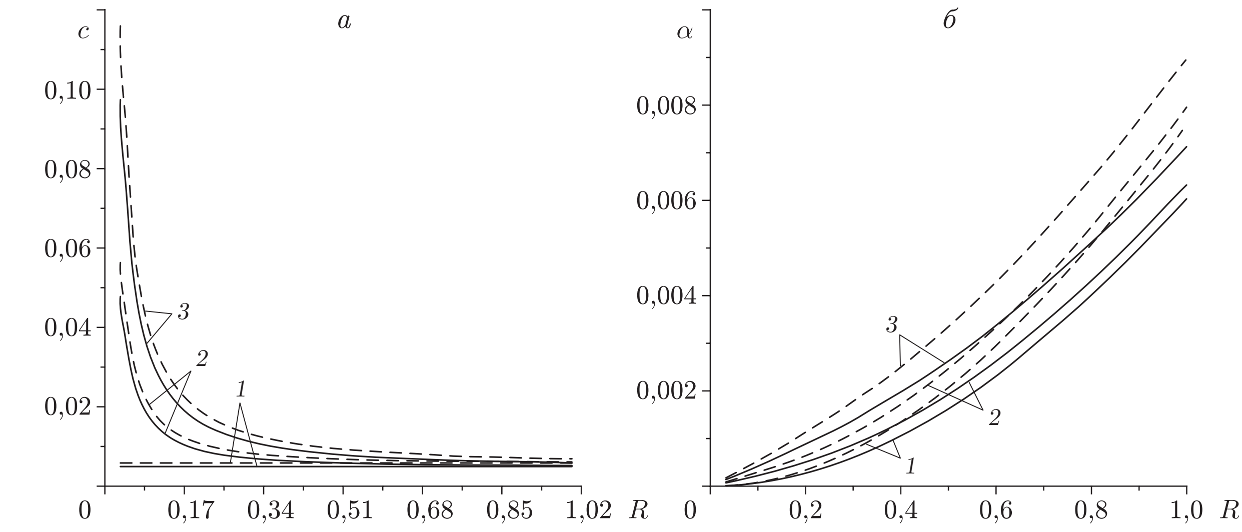


Рис. 1. Зависимости фазовой скорости (*а*), коэффициента затухания (*б*) и удельной потери (*в*) от волнового числа для симметричной моды n:
сплошные линии — ТИДЭ, штриховые — ИДЭ; *1* — $n = 1$, *2* — $n = 2$, *3* — $n = 3$



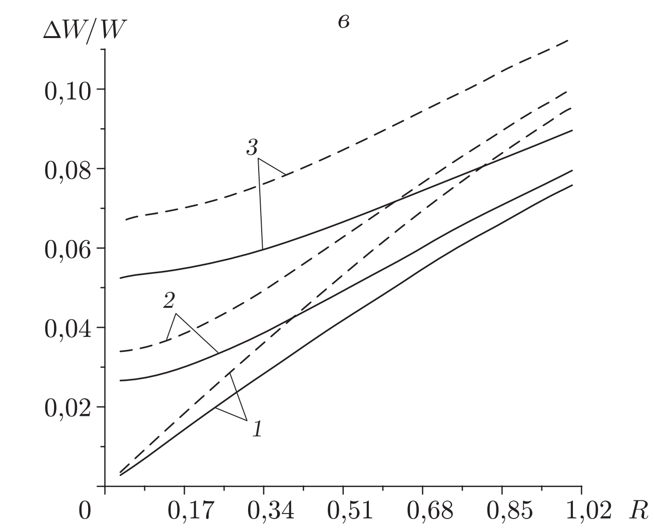


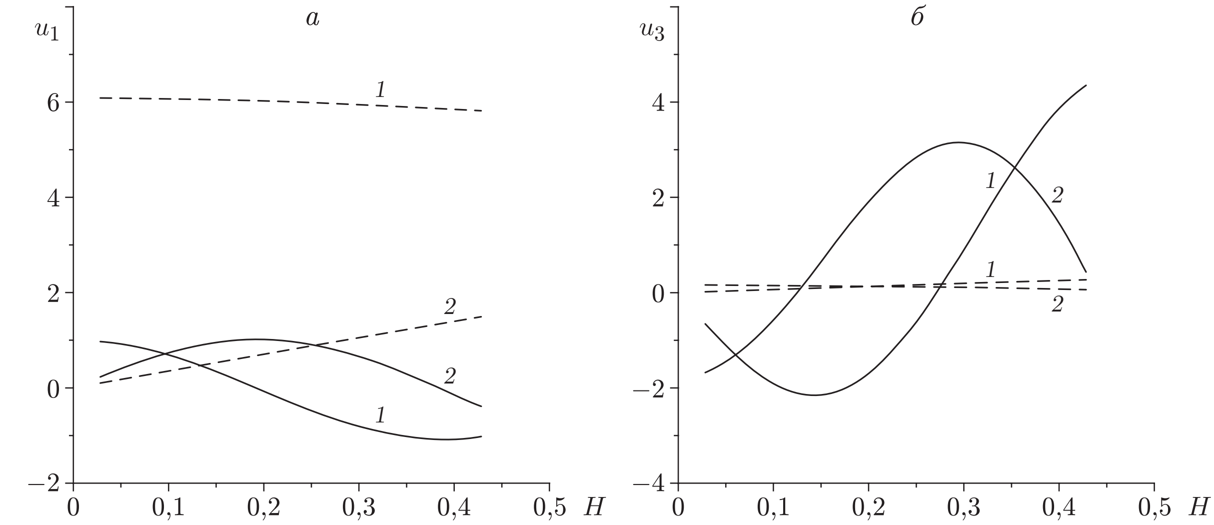
Рис. 2. Зависимости фазовой скорости (*а*), коэффициента затухания (*б*) и удельной потери (*в*) от волнового числа для кососимметричной моды (обозначения те же, что на рис. 1)

фазовая скорость резко уменьшается, стремясь к постоянным значениям. При $n = 2,\ 3$ характер изменения фазовой скорости в случае симметричной моды аналогичен характеру изменения этой величины в случае кососимметричной моды (см. рис. 1,*а*, 2,*а*). При $n = 1$ значение c является постоянным при любых значениях волнового числа и для ТИДЭ, и для ИДЭ.

На рис. 1,*б*, 2,*б* показана зависимость коэффициента затухания от волнового числа для симметричных и кососимметричных мод соответственно. Видно, что с увеличением волнового числа коэффициент затухания увеличивается для всех мод ($n = 1, 2, 3$). Следует отметить, что в случае ИДЭ значение коэффициента затухания для всех симметричных и кососимметричных мод ($n = 1, 2, 3$) больше, чем в случае ТИДЭ.

На рис. 1,*в* представлена зависимость удельной потери от волнового числа для симметричной моды. Видно, что при $n = 1$ в случае ТИДЭ значение удельной потери больше, чем в случае ИДЭ, в то время как при $n = 2, 3$ значение $\Delta W/W$ меньше. Из рис. 2,*в* следует, что для всех мод значение удельной потери увеличивается с увеличением волнового числа, причем в случае ИДЭ значения $\Delta W/W$ больше, чем в случае ТИДЭ.

На рис. 3 приведены зависимости амплитуд u_1, u_3, T от толщины слоя для симметричных и кососимметричных мод. На рис. 3,*а* видно, что в случае ТИДЭ для кососиммет-



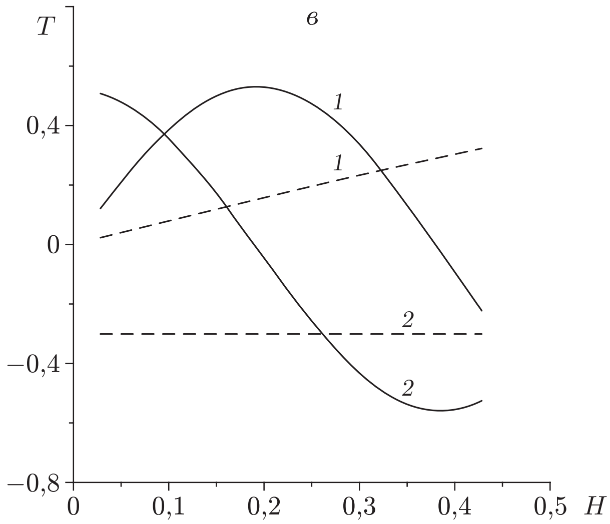


Рис. 3. Зависимости амплитуд касательного смещения (*а*), нормального смещения (*б*) и температуры (*в*) от толщины слоя:
сплошные линии — ТИДЭ, штриховые — ИДЭ; *1* — симметричная мода, *2* — кососимметричная мода

ричной моды амплитуда u_1 немонотонно зависит от толщины слоя, а для симметричной моды эта величина колеблется с очень небольшой амплитудой. В случае ИДЭ с увеличением H значение u_1 сначала уменьшается, а затем медленно увеличивается. Величина u_1 уменьшается вследствие анизотропии. На рис. 3,*б* видно, что в случае ТИДЭ для кососимметричной моды с увеличением H значение амплитуды нормального смещения u_3 сначала не меняется, затем резко уменьшается, после чего увеличивается, а для симметричных мод увеличивается. В случае ИДЭ с увеличением H значение u_3 увеличивается и для симметричных, и для кососимметричных мод. Из рис. 3,*в* следует, что в случае ТИДЭ характер изменения значений амплитуды температуры T аналогичен характеру изменения амплитуды нормального смещения u_3, в случае ИДЭ с увеличением толщины H значения u_3 для симметричной и кососимметричной мод сначала увеличиваются, затем остаются постоянными, после чего уменьшаются.

Заключение. На основе исследования характеристического уравнения изучено распространение волн Рэлея — Лэмба в бесконечном слое трансверсально-изотропной среды с диссипацией энергии. Эти волны способны распространяться на большие расстояния, что может быть использовано для обнаружения повреждений пластин, а также для обнаружения различных повреждений, в частности трещин, в пластинах и трубопроводах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lord H., Shulman Y. A.** Generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
2. **Green A. E., Lindsay K. A.** Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 1–5.
3. **Chandrasekhariah D. S.** Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature // Appl. Mech. Rev. 1998. V. 51. P. 705–729.
4. **Hetnarski R. B., Iganazack J.** Generalised thermoelasticity // J. Thermal Stresses. 1999. V. 22. P. 451–470.
5. **Green A. E., Naghdi P. M.** A unified procedure for construction of theories of deformable media. 1. Classical continuum physics // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 448. P. 335–356.
6. **Green A. E., Naghdi P. M.** A unified procedure for construction of theories of deformable media. 2. Generalized continua // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 448. P. 357–377.
7. **Green A. E., Naghdi P. M.** A unified procedure for construction of theories of deformable media. 3. Mixtures of interacting continua // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 448. P. 379–388.
8. **Green A. E., Naghdi P. M.** A re-examination of the basic postulates of thermomechanics // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1991. V. 432. P. 171–194.
9. **Green A. E., Naghdi P. M.** On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. V. 15. P. 253–264.
10. **Green A. E., Naghdi P. M.** Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.
11. **Quintanilla R.** Thermoelasticity without energy dissipation of materials with microstructure // Appl. Math. Modelling. 2002. V. 26. P. 1125–1137.
12. **Taheri H., Fariboz S., Eslami M. R.** Thermoelasticity solution of a layer using the Green — Naghdi model // J. Thermal Stresses. 2004. V. 27. P. 795–809.
13. **Puri P., Jordan P. M.** On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
14. **Lazzari B., Nibbi R.** On the exponential decay in thermoelasticity without energy dissipation an of type III in presence of an absorbing boundary // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 317–329.
15. **Roychoudhuri S. K., Bandyopadhyay N.** Interactions due to body forces in generalized thermo-elasticity III // Comput. Math. Appl. 2007. V. 54. P. 1341–1352.
16. **Mukhopadhyay S., Kumar R.** A problem on thermoelastic interactions in an infinite medium with a cylindrical hole in generalized thermoelasticity III // J. Thermal Stresses. 2008. V. 31. P. 455–457.
17. **Quintanilla R., Racke R.** Stability in thermoelasticity of type III // Discrete Continuous Dynamic. Systems. Ser. B. 2003. V. 3, N 3. P. 383–400.
18. **Quintanilla R.** Type II thermoelasticity. A new aspect // J. Thermal Stresses. 2009. V. 32. P. 290–307.
19. **Quintanilla R.** Structural stability and continuous dependence of solutions of thermoelasticity of type III // Discrete Continuous Dynamic. Systems. Ser. B. 2001. V. 1, N 4. P. 463–470.
20. **Quintanilla R., Straughan B.** A note on discontinuity waves in type III thermoelasticity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. V. 460. P. 1169–1175.
21. **Leseduarte M. C., Quintanilla R.** Thermal stresses in type III thermoelastic plates // J. Thermal Stresses. 2006. V. 29. P. 485–503.

22. **Slaughter W. S.** The linearized theory of elasticity. Boston; Cambridge: Birkhauser, 2002.
23. **Kolsky H.** Stress waves in solids. Oxford: Clarendon Press; N. Y.: Dover Press, 1963.
24. **Abubakar I.** Free vibrations of a transversely isotropic plate // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1962. V. 15, pt 1. P. 129–136.
25. **Dhaliwal R. S.** Dynamic coupled thermoelasticity / R. S. Dhaliwal, A. Singh. New Delhi (India): Hindustan Publ. Corp., 1980.

Поступила в редакцию 18/I 2010 г.,
в окончательном варианте — 22/X 2010 г.