

УДК 532.542.2:532.546

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОРЕБРЕННОМ КАНАЛЕ

Е. В. Мосина, И. В. Чернышев

Волгоградский государственный университет, 400062 Волгоград
E-mail: igor_chernyshev@mail.ru

Рассмотрена задача о ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой оребренной трубе. Решение получено в виде рядов по собственным функциям оператора Лапласа, коэффициенты в рядах найдены численно. Для той же задачи предложено более простое фильтрационное приближение, в котором система ребер моделируется радиально-неоднородным пористым слоем, а движение жидкости в нем описывается уравнением Бринкмана. Путем варьирования количества ребер и их высоты получена формула для эффективной проницаемости пористой среды, использование которой позволяет с высокой точностью оценивать среднерасходную скорость и коэффициент вязкого сопротивления в оребренном канале.

Ключевые слова: оребренный канал, фильтрационное приближение, уравнение Бринкмана, эффективная проницаемость, коэффициент сопротивления.

Введение. Классическая задача о ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном канале (трубе) сводится к решению уравнения Пуассона для продольной скорости в области, представляющей собой поперечное сечение канала, при этом распределение скорости принимает простой аналитический вид [1]. Если внутренняя поверхность канала имеет естественные шероховатости или искусственные ребра, то нахождение гидродинамических полей значительно усложняется. Неровности могут появиться в результате технологической обработки, а ребра бывают конструктивно необходимы, например для выравнивания потока или для интенсификации теплообменных процессов.

Задача о течении в плоском канале с бесконечно тонкими продольными или поперечными ребрами решается достаточно просто, например с использованием метода сингулярностей [2] или метода разложения по собственным функциям с последующей коллокацией в точках границы, содержащей ребро [3, 4].

В технических приложениях, например в теплообменных устройствах, часто используются круглые оребренные трубы. В ряде экспериментальных исследований для различных вариантов таких труб определены гидродинамические и тепловые характеристики (см., например, [5, 6]). Проведение многочисленных экспериментальных исследований течений в каналах существенно затруднено, поэтому большое значение имеют аналитические и численные исследования. Например, в работе [7] рассмотрена задача о ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале с продольными бесконечно тонкими ребрами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта РФФИ–Поволжье 11-03-97035).

Аналитические формулы для скорости получены в интегральной форме методом функции Грина. Найдены приближенные поля скорости и температуры, указана конфигурация канала, обеспечивающая эффективный теплообмен. В работе [8] теоретически рассмотрен случай ребер конечной толщины, проведена декомпозиция расчетной области на две подобласти. С использованием метода коллокаций в точках общей границы подобластей получено приближенное решение.

С практической точки зрения неудобно для каждой конфигурации оребренного канала проводить трудоемкие вычисления поля скорости для определения таких характеристик, как расход жидкости сквозь оребренный канал или коэффициент сопротивления. Желательно иметь достаточно простые формулы для оценки этих параметров с высокой точностью. В данном случае целесообразно использовать так называемое фильтрационное приближение, в котором совокупность ребер заменяется гидродинамически эквивалентной модельной пористой средой с некоторыми эффективными характеристиками. С помощью такого подхода аналитически находится поле скорости, а затем с высокой точностью вычисляются необходимые гидравлические параметры. Например, в работе [9] рассмотрена фильтрационная модель для круглой трубы с ребрами конечной толщины, смыкающимися на оси канала, а в [10] — с ребрами, имеющими высоту, меньшую радиуса трубы.

Целью настоящей работы является исследование течения жидкости в круглой трубе с бесконечно тонкими ребрами, а также определение эффективных параметров фильтрационной модели для такой постановки с целью дальнейшей оценки гидравлических характеристик течения в оребренной трубе.

1. Постановка задачи и ее решение для оребренного канала. Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием постоянного градиента давления G в круговом продольно оребренном цилиндрическом канале радиусом R . Ребра высотой hR расположены в радиальных плоскостях и равномерно распределены по внутренней поверхности канала (рис. 1, *слева*).

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью Oz , совпадающей с осью канала, ненулевой является лишь z -компонента скорости $w(r, \varphi)$, поэтому система уравнений Навье — Стокса сводится к двумерному уравнению Пуассона. В качестве линейного масштаба задачи примем радиус канала R , масштаба давления — величину GR , а масштаба скорости — величину GR^2/μ (μ — динамическая вязкость жидкости). Обезразмеривая

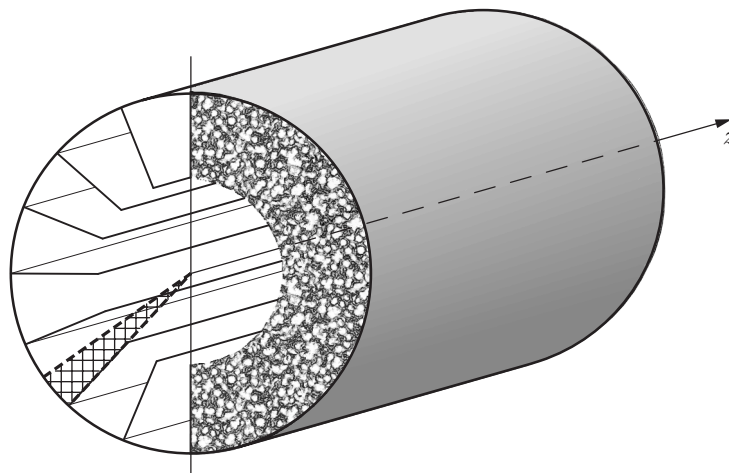


Рис. 1. Оребрение канала (*слева*) и его модельное представление в виде пористого слоя (*справа*)

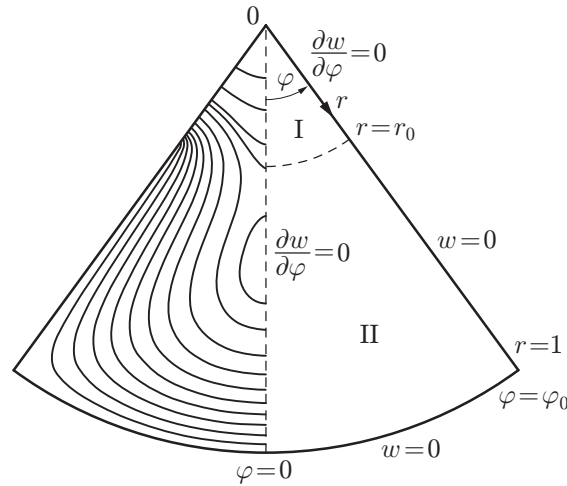


Рис. 2. Сектор между двумя соседними ребрами:
слева — изолинии скорости ($M = 5$, $h = 2/3$, $N = 40$), *справа* — граничные условия;
 I — область свободного течения, II — область течения между ребрами

параметры задачи на указанные масштабы, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -1. \quad (1)$$

Периодичность и симметрия задачи позволяют искать решение уравнения (1) в половине сектора между двумя соседними ребрами (см. рис. 1, *слева*), ограниченного координатными линиями $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 = \pi/M$; M — количество ребер в канале).

Используются следующие граничные условия (рис. 2, *справа*):

— условия прилипания на твердой поверхности ребер и внутреннем периметре канала

$$w(r, \varphi_0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq 1, \quad r_0 = 1 - h, \quad w(1, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0; \quad (2)$$

— условия симметрии на координатных линиях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) = 0, \quad 0 \leq r < r_0. \quad (3)$$

Область течения разобьем на две подобласти (рис. 2, *справа*). Методом Фурье разделения переменных найдем разложения для скоростей $w_I(r, \varphi)$ и $w_{II}(r, \varphi)$ в этих подобластях по соответствующим собственным функциям оператора Лапласа:

$$w_I(r, \varphi) = -\frac{r^2}{4} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\alpha_n} \cos(\alpha_n \varphi), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{\varphi_0}, \quad (4)$$

$$w_{II}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \cos(\beta_n \varphi), \quad \beta_n = \frac{\pi(n-1/2)}{\varphi_0}.$$

Здесь

$$f_n(r) = B_n(r^{\beta_n} - r^{-\beta_n}) + C_n(r^2 - r^{-\beta_n}), \quad C_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\beta_n \varphi_0 (\beta_n^2 - 4)}, \quad \beta_n \neq 2.$$

В случае если коэффициент $\beta_n = 2$, что возможно только при $M = 4$ и $n = 1$, первая радиальная функция в ряде для $w_{II}(r, \varphi)$ принимает вид

$$f_1(r) = B_1(r^2 - r^{-2}) + (r^2 - r^{-2} - 4r^2 \ln r)/(4\pi). \quad (5)$$

Коэффициенты A_0, A_n, B_n находим из условий непрерывности скорости и касательного напряжения на дуге $r = r_0, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$:

$$w_I(r_0, \varphi) = w_{II}(r_0, \varphi), \quad \frac{\partial w_I}{\partial r}(r_0, \varphi) = \frac{\partial w_{II}}{\partial r}(r_0, \varphi).$$

Разложив w_I в ряд по функциям $\cos(\beta_n \varphi)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} B_k(r_0^{\beta_k} - r_0^{-\beta_k}) + C_k(r_0^2 - r_0^{-\beta_k}) &= a_k \left(-\frac{r_0^2}{4} + A_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_0^{\alpha_n} b_{kn}, \\ B_k \beta_k (r_0^{\beta_k-1} + r_0^{-\beta_k-1}) + C_k (2r_0 + \beta_k r_0^{-\beta_k-1}) &= a_k \left(-\frac{r_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_n r_0^{\alpha_n-1} b_{kn}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}, \quad b_{kn} = \frac{4(-1)^{n+k}(2k-1)}{\pi(4n^2 - (2k-1)^2)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При $M = 4$ для вычисления левых частей уравнений (6) при $k = 1$ необходимо использовать формулу (5).

Систему уравнений (6) решаем численно, ограничив бесконечный ряд для $w_I(r, \varphi)$ $N - 1$ членами, а каждую бесконечную совокупность уравнений — N уравнениями. В результате получаем $2N$ линейных соотношений относительно $2N$ неизвестных A_0, A_n ($n = 1, \dots, N - 1$), B_n ($n = 1, \dots, N$).

Сравнение рассчитанной среднерасходной скорости при различных усечениях рядов (4) показывает, что для умеренных значений M и h (например, $M = 10, h = 0,6$) при увеличении N с 20 до 30 изменение средней скорости составляет приблизительно 1 %, а при увеличении N с 30 до 40 — менее 0,2 %. Для предельных значений h (например, $h = 0,1$ или $h = 0,9$ при $M = 10$) при увеличении N с 40 до 60 средняя скорость меняется не более чем на 1 %, а при изменении N с 60 до 80 — менее чем на 0,5 %. Далее в расчетах выбиралось значение $N = 30$ для умеренных значений M и h , и $N = 60$ для предельных значений h . Эти значения N обеспечивают необходимую точность при приемлемых временных затратах.

Отметим также, что при достаточно “густом” оребрении (значение M велико) существенно увеличивается различие между порядками слагаемых r^{β_n} и $r^{-\beta_n}$ в функции w_{II} , поэтому при численном решении системы уравнений также необходимо значительное повышение точности представления.

Задача о течении в оребренном круговом канале решена в широком диапазоне значений параметров: $M = 2 \div 32, h = 0,05 \div 0,95$. Типичные изолинии скорости для одного из вариантов оребрения показаны на рис. 2, *слева*. Расчетные данные хорошо согласуются с результатами расчетов в работе [7], что позволяет применять изложенный в настоящей работе метод. Заметим, что в [7] решения получены с помощью функции Грина и содержат громоздкие интегралы, которые при дальнейшем вычислении необходимо раскладывать в ряды. Используемые в данной работе разложения Фурье более удобны, несмотря на необходимость повторного вычисления коэффициентов рядов.

Важными количественными характеристиками течения жидкости в канале являются объемный расход

$$Q = 2M \left(\int_0^{r_0} \int_0^{\varphi_0} w_I(r, \varphi) r \, d\varphi \, dr + \int_{r_0}^1 \int_0^{\varphi_0} w_{II}(r, \varphi) r \, d\varphi \, dr \right)$$

и среднерасходная скорость жидкости $w_m = Q/\pi$ при заданном перепаде давления.

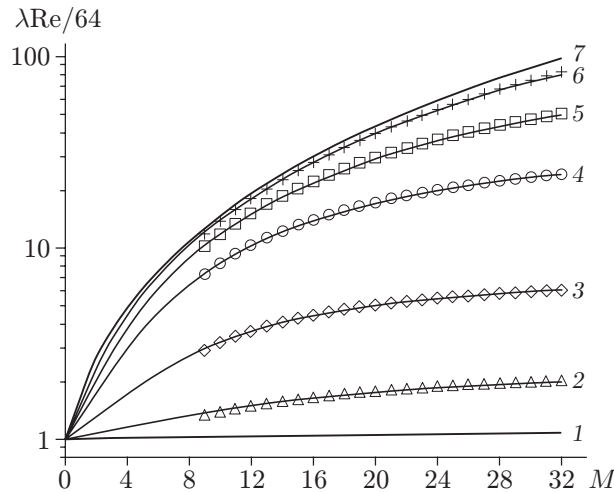


Рис. 3. Зависимость величины $\lambda Re/64$ от количества ребер: сплошные линии — расчет по модели Навье — Стокса, точки — расчет по фильтрационной модели; 1 — $h = 0,05$; 2 — $h = 0,2$; 3 — $h = 0,4$; 4 — $h = 0,6$; 5 — $h = 0,7$; 6 — $h = 0,8$; 7 — $h = 1,0$

Подобно тому как определяется коэффициент сопротивления гладкой круглой трубы радиусом R [1], определим коэффициент сопротивления оребренного канала $\lambda = 2RG/(\rho w_m'^2/2)$ (ρ — плотность жидкости; w_m' — размерное значение средней скорости). Вводя число Рейнольдса $Re = 2Rw_m'\rho/\mu$, получаем безразмерное соотношение

$$\frac{\lambda Re}{64} = \frac{1}{8w_m'}$$

Расчетные зависимости величины $\lambda Re/64$ от количества ребер при различных значениях h показаны на рис. 3 сплошными линиями. Видно, что с увеличением высоты ребер или их количества сопротивление канала возрастает, а среднерасходная скорость уменьшается, поскольку увеличивается суммарная площадь смачиваемой поверхности канала.

При $M = 0$ или $h = 0$ решением рассматриваемой задачи является классическое течение Пуазейля с параболическим профилем скорости $w(r) = (1-r^2)/4$, среднерасходной скоростью $w_m = 1/8$ и коэффициентом сопротивления $\lambda = 64/Re$. Предельный случай $M \rightarrow \infty$ соответствует течению в гладком канале радиусом r_0 с распределением скорости по радиусу $w(r) = (r_0^2 - r^2)/4$, среднерасходной скоростью $w_m = r_0^4/8 = (1-h)^4/8$ и коэффициентом сопротивления $\lambda = 64/(Re(1-h)^4)$.

При $h = 1$ ребра смыкаются на оси $r = 0$ и канал распадается на M независимых каналов с поперечным сечением в виде сектора, в которых выражения для скорости и среднерасходной скорости имеют вид

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (r^2 - r^{\beta_n}) \cos(\beta_n \varphi),$$

$$w_m = \frac{1}{2\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{(-1)^{n+1}(\beta_n - 2)}{\beta_n(\beta_n + 2)} = \frac{1}{\varphi_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2(\beta_n + 2)^2}.$$

2. Фильтрационное приближение. Для того чтобы вычислить скорость жидкости в произвольной точке области оребренного канала по формулам (4), необходимо найти коэффициенты разложения рядов, численно решив систему линейных уравнений (6). Эта

процедура является достаточно трудоемкой, поскольку для достижения требуемой точности необходимо тем больше времени, чем выше ребра и больше их количество. Во многих технологических приложениях не требуется детальное описание гидродинамических характеристик течения, а важны лишь некоторые средние величины, например суммарный расход и сопротивление жидкости при движении в закрытых системах. В этом случае применительно к течению в оребренном канале целесообразно использовать фильтрационное приближение, в котором система ребер заменяется некоторым гидродинамически эквивалентным модельным пористым слоем высотой h , примыкающим к стенке канала (см. рис. 1, *справа*).

Вследствие малости скорости жидкости между ребрами при достаточно густом оребрении для определения поля продольной фильтрационной скорости $U(r)$ в пористой среде используется уравнение фильтрации Бринкмана с неоднородной эффективной проницаемостью K (обезразмеренной на R^2) и эффективной вязкостью μ_{eff}

$$\frac{l_\mu^2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) - \frac{U}{K(r)} = -1, \quad (7)$$

где $l_\mu^2 = \mu_{eff}/\mu$. После упрощения безразмерного уравнения Навье — Стокса получаем уравнение для скорости жидкости в свободной центральной части канала $u(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -1. \quad (8)$$

На твердой стенке канала $r = 1$ задается условие прилипания $U(1) = 0$, а на пористой поверхности $r = r_0$ условия непрерывности скорости и касательных напряжений

$$u(r_0) = U(r_0), \quad \frac{du(r_0)}{dr} = l_\mu^2 \frac{dU(r_0)}{dr}. \quad (9)$$

Вид зависимости для эффективной проницаемости $K(r)$ пористой модели найден с учетом предположения [9], что течение в области ребер может быть аппроксимировано паузейлевым течением между полубесконечными плоскостями, расположенными под углом $2\varphi_0$. В этом случае зависимость скорости от радиальной координаты r является квадратичной. Осредняя скорость по полярной координате φ и сопоставляя полученный профиль скорости с соответствующим решением уравнения Дарси, находим

$$K(r) = q^2 r^2,$$

где $q \geq 0$ — некоторый коэффициент. При малых значениях угла φ_0 , а именно при $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/8$, коэффициент q прямо пропорционален φ_0 .

Распределение скорости в фильтрационном приближении (7)–(9) имеет вид

$$u(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{4} + e_1, \quad e_1 = -\frac{qr_0^2(t_1 r_0^s - t_2 r_0^{-s}) + 4l_\mu q^2}{2l_\mu t(r_0^s + r_0^{-s})},$$

$$s = \frac{1}{l_\mu q}, \quad t_{1,2} = 1 \mp 2l_\mu q, \quad t = 1 - 4l_\mu^2 q^2, \quad (10)$$

$$U(r) = E_0 r^2 + E_1 r^s + E_2 r^{-s}, \quad E_0 = \frac{q^2}{t}, \quad E_{1,2} = \mp \frac{q(r_0^2 \pm 2l_\mu q r_0^{\mp s})}{2l_\mu t(r_0^s + r_0^{-s})}.$$

Среднерасходная скорость находится по формуле

$$u_m = r_0^2 \left(\frac{r_0^2}{8} + e_1 \right) + 2 \left(\frac{E_0}{4} (1 - r_0^4) + \frac{E_1}{2+s} (1 - r_0^{2+s}) + \frac{E_2}{2-s} (1 - r_0^{2-s}) \right). \quad (11)$$

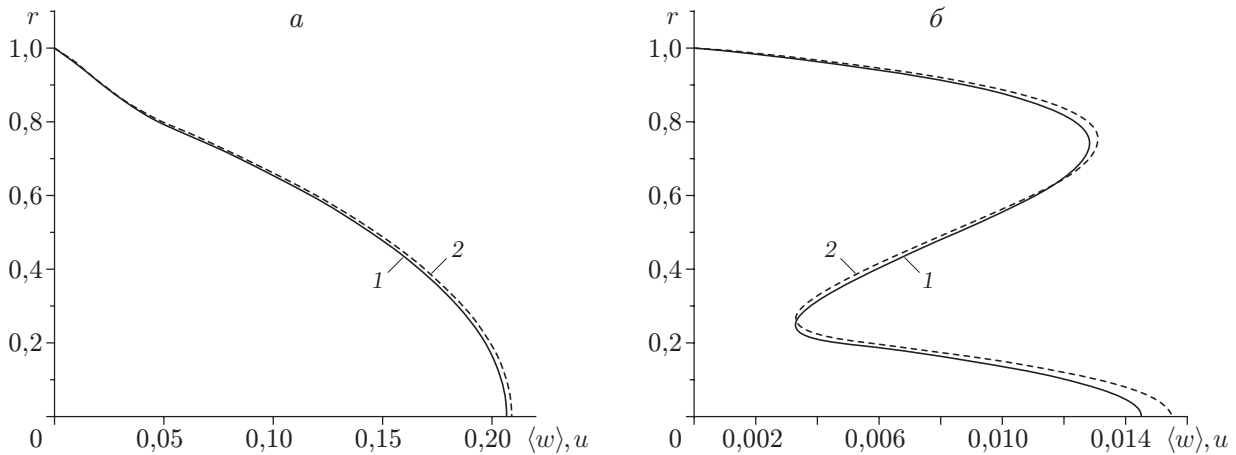


Рис. 4. Профили скорости:

a — $M = 10$, $h = 0,2$; *б* — $M = 10$, $h = 0,8$; 1 — профиль осредненной по φ скорости w , полученный в рамках модели Навье — Стокса; 2 — профиль скорости u , полученный в рамках фильтрационной модели

В работах [9, 10] выбрано отношение вязкостей в фильтрационном приближении $l_\mu^2 = 1/\varepsilon$, где ε — пористость проницаемого слоя. В случае бесконечно тонких ребер формально $\varepsilon = 1$, поэтому в настоящей работе принято $l_\mu = 1$. Параметр q модели пористой среды подобран таким образом, чтобы ее гидродинамические характеристики (среднерасходная скорость w_m и коэффициент сопротивления λ) были эквивалентны соответствующим характеристикам рассматриваемой системы пристенных ребер. После обработки результатов многочисленных расчетов задачи, сформулированной в п. 1, методом наименьших квадратов при $M \geq 8$ и $0,05 \leq h \leq 0,95$ получена зависимость

$$q(h, M) = 1,85 \frac{h^{0,19}}{M}. \quad (12)$$

Значение коэффициента перед дробью определено с точностью до 0,5 %, показателя степени — с точностью до 2,5 %.

На рис. 3 точками показаны зависимости величины $\lambda \text{Re}/64 = 1/(8u_m)$ от количества ребер, рассчитанные в фильтрационном приближении по формулам (10)–(12). Видно, что результаты расчетов по формулам (10)–(12) хорошо согласуются с результатами, полученными в расчетах для оребренного канала. Различие значений w_m , λ и скорости на оси канала не превышает 10 %. Заметим, что коэффициент λ пропорционален $1/w_m^2$, поэтому при вычислении λ по приближенной формуле (12) относительная погрешность приблизительно в два раза больше, чем при вычислении w_m . Погрешность вычисления коэффициента сопротивления λ увеличивается с увеличением высоты ребра и уменьшается с увеличением количества ребер M в канале. Поэтому при большем количестве ребер фильтрационная модель наиболее точно описывает течение в канале.

На рис. 4 представлены профиль осредненной вдоль полярной координаты φ скорости течения в оребренном канале и распределение скорости, полученное в фильтрационном приближении. Видно, что формы профилей скорости хорошо согласуются.

Сравнение результатов проведенных расчетов с результатами теоретических работ [7, 8] показало, что при $h \geq 0,8$ и $M \geq 26$ максимальное различие значений λRe составляет приблизительно 1 %. В экспериментах [5] для труб с прямыми ребрами при $M = 6, 10, 12, 14$ и $h = 0,09; 0,10; 0,11; 0,15$ получено выражение для величины λRe_{D_e} как функции D_e/D в диапазоне значений $0,57 \leq D_e/D \leq 0,68$ (D, D_e — стандартный и

эффективный (гидравлический) диаметры трубы соответственно; $Re_{De} = D_e w'_m \rho / \mu$). Эти значения коэффициента сопротивления не более чем на 15 % превышают соответствующие значения, полученные в данной работе численно. Это можно объяснить, например, наличием технологической шероховатости труб или конечностью толщины ребер, используемых в экспериментах. Сравнение с данными экспериментальной работы [6] несколько затруднено, поскольку в ней не указаны явно значения коэффициента сопротивления, а проведено графическое сопоставление с результатами других аналитических и численных расчетов. В экспериментах использовались четыре круглые оребренные трубы с количеством ребер 10 и 16 при их относительной высоте $h = 0,216; 0,248; 0,318; 0,325$. Коэффициенты сопротивления для этих труб отличаются от соответствующих значений в [8], а значит, и от результатов расчетов, проведенных в настоящей работе, на $-10 \div 20$ %, что удовлетворяет гидравлическому приближению.

Таким образом, несложные формулы (10)–(12), полученные для фильтрационной модели, можно использовать как для расчета осредненных профилей скорости в канале, так и для получения достаточно точной оценки среднерасходной скорости и коэффициента сопротивления в различных устройствах, принцип действия которых основан на движении жидкости в оребренных круговых каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
2. **Davis A. M. J.** Periodic blocking in parallel shear or channel flow at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1993. V. 5, iss. 4. P. 800–809.
3. **Wang C. Y.** Flow and heat transfer between plates with longitudinal fins // Appl. Sci. Res. 1995. V. 54, iss. 1. P. 23–38.
4. **Мосина Е. В., Чернышев И. В.** Медленное течение в плоском канале с поперечными ребрами // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. 2006. Вып. 10. С. 81–85.
5. **Watkinson A. P., Milletti D. L., Kubanek G. R.** Heat transfer and pressure drop of internally finned tubes in laminar oil flow // ASME Paper. 1975. N 75-HT-41.
6. **Rustum I. M., Soliman H. M.** Experimental investigation of laminar mixed convection in tubes with longitudinal internal fins // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1988. V. 110, iss. 2. P. 366–372.
7. **Hu M. H., Chang Y. P.** Optimization of finned tubes for heat transfer in laminar flow // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1973. V. 95, iss. 3. P. 332–338.
8. **Soliman H. M., Feingold A.** Analysis of fully developed laminar flow in longitudinal internally finned tubes // Chem. Engng J. 1977. V. 14, iss. 2. P. 119–128.
9. **Kim S. J., Yoo J. W., Jang S. P.** Thermal optimization of a circular-sector finned tube using a porous medium approach // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2002. V. 124, iss. 6. P. 1026–1033.
10. **Do K. H., Min J. Y., Kim S. J.** Thermal optimization of an internally finned tube using analytical solutions based on a porous medium approach // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2007. V. 129, iss. 10. P. 1408–1416.

*Поступила в редакцию 25/IV 2011 г.,
в окончательном варианте — 6/X 2011 г.*