УДК 533.12

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛОГО ШАРА

А. В. Кривоченко, А. Н. Спорыхин*

Старооскольский филиал Воронежского государственного университета,
309516 Старый Оскол
* Воронежский государственный университет, 394693 Воронеж
E-mail: avk-99@yandex.ru

С использованием определяющих соотношений для сжимаемого упрочняющегося упруговязкопластического тела исследовано напряженно-деформированное состояние полого шара под действием нагрузок, зависящих от времени. Получены аналитические решения для полей перемещений в упругой и пластической областях. Построены зависимости величины, обратной радиусу упругопластической границы, от времени, определено влияние физико-механических параметров на радиус упругопластической границы.

Ключевые слова: пластичность, вязкость, упрочнение, деформирование, функция нагружения, сжимаемость, дилатансия.

В работе [1] в статической постановке с использованием теории малых упругопластических деформаций рассматривалась задача об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления. В работе [2] с использованием теории течения при допущении о несжимаемости материала исследовалась задача сложных сред. В работе [3] в динамической постановке при действии периодических нагрузок решалась задача о трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью. В настоящей работе рассматривается динамическое деформирование полого сжимаемого упрочняющегося упруговязкопластического шара радиусом R с радиусом внутренней полости a (рис. 1). На внешнюю поверхность шара действует распределенная нагрузка P, на контур внутренней полости — нагрузка p, выражения для которых имеют вид

$$P = P^0 + \sum_{k=1}^{n} P^k \, \mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k}, \qquad p = p^0 + \sum_{k=1}^{n} p^k \, \mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k}. \tag{1}$$

Здесь $k = 0, \ldots, n$; $0 \leqslant t \leqslant \infty$; ω_k, γ_k — известные константы, причем $\omega_k < 0$.

Задача решается в сферической системе координат в безразмерных переменных. Величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу упругопластической границы r_s, величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю сдвига μ.

С учетом осевой симметрии определяющие уравнения рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

— уравнения движения:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\,(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{\rho_0}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

(ρ_0 — безразмерная плотность материала; $u = u_r$);

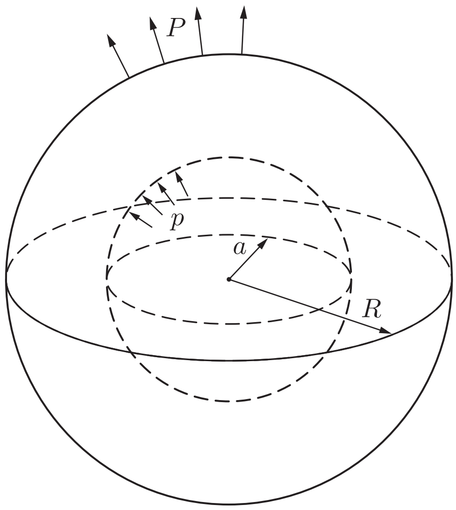

Рис. 1. Полый шар под действием внешних и внутренних динамических нагрузок

— соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{3}$$

— закон Гука для напряжений в упругой области:

$$\sigma_r = 2\varepsilon_r + \lambda_0(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta), \qquad \sigma_\theta = 2\varepsilon_\theta + \lambda_0(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta), \qquad \lambda_0 = \lambda/\mu. \tag{4}$$

Для сжимаемого упрочняющегося упруговязкопластического тела в модели Ивлева — Спорыхина [2–5] функция нагружения записывается в форме

$$F = \alpha\sigma_1 - (S_{ij} - c_0 e_{ij}^p - \eta_0 \dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - c_0 e_{ij}^p - \eta_0 \dot{e}_{ij}^p) - K_0 = 0,$$

где α — скорость дилатансии; $\sigma_1 = \sigma_{kk}/3$ — первый инвариант тензора напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$ — девиаторы тензоров напряжений и деформаций соответственно; K_0 — предел текучести; c_0, η_0 — параметры упрочнения и вязкости. Соотношения для полных деформаций в пластической области имеют вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$, ассоциированный закон пластического течения согласно [2, 4, 5] записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} = \zeta\Big(\frac{\alpha}{3} + \frac{S_r - c_0 e_r^p - \eta_0 \dot{e}_r^p}{K_0 - \alpha\sigma_1}\Big) + \Psi(\sigma_1)\dot{\sigma}_1,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} = \zeta\Big(\frac{\alpha}{3} + \frac{S_\theta - c_0 e_\theta^p - \eta_0 \dot{e}_\theta^p}{K_0 - \alpha\sigma_1}\Big) + \Psi(\sigma_1)\dot{\sigma}_1$$

($\Psi = \text{const}$). Граничные условия и условия сопряжения принимают вид

$$\sigma_r\Big|_{r=a_*} = \frac{p}{\mu}, \quad \sigma_r\Big|_{r=qa_*} = \frac{P}{\mu}, \quad [\sigma_r]_{r=1} = 0, \quad [u]_{r=1} = 0, \quad a_* = \frac{a}{r_s}, \quad q = \frac{R}{a}. \tag{5}$$

В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от границ внутренней полости шара, начальные условия задаются в форме

$$a_*\Big|_{t=t_*} = 1. \tag{6}$$

Согласно (1) искомые функции принимают вид

$$\Phi(r,t) = \Phi^0(r) + \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(r)\, \mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k}. \tag{7}$$

Используя уравнения движения (2), соотношения Коши (3) и закон Гука (4), для определения перемещений в упругой области получаем систему $n+1$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u^k}{dr^2}+\frac{2}{r}\,\frac{du^k}{dr}-\Big(2+\frac{\rho_0\omega_k^2}{2+\lambda_0}\,\beta_k\Big)\frac{u^k}{r^2}=0,\quad k=0,\dots,N,$$

$$\beta_k=\begin{cases}0, & k=0,\\ 1, & k>0,\end{cases}$$

из которой находим

$$u^e=a_{11}^0r+\frac{a_{12}^0}{r}+\sum_{k=1}^{n}(a_{11}^kr^{n_1^k}+a_{12}^kr^{n_2^k})\,\mathrm{e}^{\omega_kt+\gamma_k}, \tag{8}$$

где $n_{1,2}^k=1/2\pm\sqrt{9/4+\rho_0\omega_k^2/(2+\lambda_0)}$ $(k=1,\dots,n)$; a_{11}^k — константы интегрирования.

В соответствии с законом Гука компоненты напряжений в упругой области принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_r^e&=(2+3\lambda_0)a_{11}^0+\frac{\lambda_0-2}{r^2}\,a_{12}^0+\\&+\sum_{k=1}^{n}\big[(2\lambda_0+n_1^k(2+\lambda_0))a_{11}^kr^{n_1^k-1}+(2\lambda_0+n_2^k(2+\lambda_0))a_{12}^kr^{n_2^k-1}\big]\,\mathrm{e}^{\omega_kt+\gamma_k},\\ \sigma_\theta^e&=(2+3\lambda_0)a_{11}^0+\frac{\lambda_0+2}{r^2}\,a_{12}^0+\\&+\sum_{k=1}^{n}\big[(2+\lambda_0(2+n_1^k))a_{11}^kr^{n_1^k-1}+(2+\lambda_0(2+n_2^k))a_{11}^kr^{n_2^k-2}\big]\,\mathrm{e}^{\omega_kt+\gamma_k}\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Вследствие осевой симметрии имеем

$$S_\theta=S_\varphi=-S_r/2,\qquad e_\theta=e_\varphi=-e_r/2.$$

Функцию нагружения и ассоциированный закон пластического течения запишем в форме

$$\alpha\sigma_1+\sqrt{3/2}\,(S_r-c_0e_r^p-\eta_0\dot e_r^p)-K_0=0,$$

$$\dot\varepsilon_r^p=\xi(\alpha/3+\sqrt{2/3}\,)+\Psi\dot\sigma_1,\qquad \dot\varepsilon_\theta^p=\xi(\alpha/3-\sqrt{1/6}\,)+\Psi\dot\sigma_1.$$

С учетом соотношений (1) находим

$$\alpha\sigma_1^k+\sqrt{3/2}\,(S_r^k-[c_0+\eta_0\omega_k\beta_k]e_r^{p^k})-K_0\beta_k=0,$$

$$\omega_k(\varepsilon_r^{p^k}-\Psi\sigma_1^k)\beta_k=\xi^k(\alpha/3+\sqrt{2/3}\,),\qquad \omega_k(\varepsilon_\theta^{p^k}-\Psi\sigma_1^k)\beta_k=\xi^k(\alpha/3-\sqrt{1/6}\,),$$

откуда с учетом закона Гука (4) и соотношений Коши (3) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r^p&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Delta^k}\Big(\Delta_{11}^k\,\frac{du^k}{dr}+\Delta_{12}^k\,\frac{u^k}{r}+\Delta_{13}^kK_0\beta_k\Big)\,\mathrm{e}^{\omega_kt+\gamma_k},\\ \sigma_\theta^p&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Delta^k}\Big(\Delta_{21}^k\,\frac{du^k}{dr}+\Delta_{22}^k\,\frac{u^k}{r}+\Delta_{23}^kK_0\beta_k\Big)\,\mathrm{e}^{\omega_kt+\gamma_k},\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\Delta^k = 3\alpha\lambda_0\sqrt{6} + 6\alpha^2(2+3\lambda_0) + 3(2 + c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[6\Psi(2+3\lambda_0) + 3\lambda_0 + 6],$$

$$\Delta_{11}^k = 4(2+3\lambda_0)(\sqrt{2}\alpha - \sqrt{3})^2 + 12(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[2\Psi(2+3\lambda_0) + 3\lambda_0 + 3],$$

$$\Delta_{12}^k = 4(2+3\lambda_0)(6 - 2\alpha^2 - \sqrt{6}\alpha) - 6(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[4\Psi(2+3\lambda_0) - 3\lambda_0],$$

$$\Delta_{13}^k = (2+3\lambda_0)(6\alpha + 12\sqrt{6}\Psi) + 3\sqrt{6}\,(4+3\lambda_0),$$

$$\Delta_{21}^k = 2(2+3\lambda_0)(6 + 2\alpha^2 - \sqrt{6}\alpha) + 6(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[3\lambda_0 - 2\Psi(2+3\lambda_0)],$$

$$\Delta_{22}^k = 4(2+3\lambda_0)(\alpha + \sqrt{6})^2 + 12(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[\Psi(2+3\lambda_0) + 3\lambda_0 + 3],$$

$$\Delta_{23}^k = 6(2+3\lambda_0)(\alpha - \sqrt{6}\,\Psi) - 6\sqrt{6}.$$

Подставляя соотношения (10) в уравнения движения (2), получаем систему уравнений для определения компонент перемещений в пластической области:

$$b_0^k \frac{d^2u^k}{dr^2} + b_1^k \frac{du^k}{dr} - b_2^k \frac{u^k}{r^2} + b_3^k \frac{K_0}{r} = 0, \qquad k = 0, \dots, n. \tag{11}$$

Здесь

$$b_0^k = 4(2+3\lambda_0)(\sqrt{2}\alpha - \sqrt{3}\,)^2 + 12(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[2\Psi(2+3\lambda_0) + 3\lambda_0 + 3],$$

$$b_1^k = 4(2+3\lambda_0)(\alpha - \sqrt{6}\,)^2 + 6(c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[8\Psi(2+3\lambda_0) + 9\lambda_0 + 12],$$

$$b_2^k = 4(2+3\lambda_0)(4\alpha^2 + 5\sqrt{6}\,\alpha + 6) + (c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)[48\Psi(2+3\lambda_0) + 18(4+3\lambda_0)] +$$
$$+ \rho_0\omega_k^2\beta_k[6(2+3\lambda_0)\alpha^2 + 3\lambda_0\alpha\sqrt{6} + 9(2 + c_0 + \beta_k\eta_0\omega_k)(2\Psi[2+3\lambda_0] + \lambda_0 + 2)],$$

$$b_3^k = 18\beta_k\sqrt{6}\,[\lambda_0 + 2 - 2(2+3\lambda_0)\Psi].$$

Решение системы (11) определим в форме

$$u^p = \sum_{k=0}^{n} (a_{21}^k r^{m_1^k} + a_{22}^k r^{m_2^k})\,\mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k} + \frac{b_3^0 K_0}{b_2^0 - b_1^0}\, r + a_{21}^0 r^{m_1^0} + a_{22}^0 r^{m_2^0},$$

где

$$m_{1,2}^k = \big(b_1^k - b_0^k \pm \sqrt{(b_1^k - b_0^k)^2 + 4b_0^k b_2^k}\,\big)/(2b_0^k), \tag{12}$$

a_{ij}^k — константы интегрирования.

Согласно (10)–(12) компоненты напряжений в пластической области имеют вид

$$\sigma_r^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta^k}\,\big[(\Delta_{11}^k m_1^k + \Delta_{12}^k) a_{21}^k r^{m_1^k - 1} + (\Delta_{11}^k m_2^k + \Delta_{12}^k) a_{22}^k r^{m_2^k - 1}\big]\,\mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta^0}\Big[\Delta_{13}^0 + \frac{b_3^0(\Delta_{11}^0 + \Delta_{12}^0)}{b_2^0 - b_1^0}\Big] K_0,$$

$$\sigma_\theta^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta^k}\,\big[(\Delta_{21}^k m_1^k + \Delta_{22}^k) a_{21}^k r^{m_1^k - 1} + (\Delta_{21}^k m_2^k + \Delta_{22}^k) a_{22}^k r^{m_2^k - 1}\big]\,\mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta^0}\Big[\Delta_{23}^0 + \frac{b_3^0(\Delta_{21}^0 + \Delta_{22}^0)}{b_2^0 - b_1^0}\Big] K_0. \tag{13}$$

Подчиняя полученные решения (8), (9), (12), (13) соответствующим граничным условиям, условиям сопряжения (5) и начальному условию (6), для констант интегрирования окончательно получаем

$$a_{ij}^k = g_{ij}^k/g^k, \qquad i=1,2, \quad j=1,2, \quad k=1,\dots,n,$$

$$g^k = d_{11}^k w_1^k [a_*^{m_1^k-1} d_{21}^k (d_{12}^k - d_{22}^k) + d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}(d_{21}^k - d_{12}^k)] -$$
$$- d_{12}^k w_2^k [a_*^{m_1^k-1} d_{21}^k (d_{11}^k - d_{22}^k) + d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}(d_{21}^k - d_{12}^k)],$$

$$g_1^k = P_0^k [a_*^{m_1^k-1} d_{21}^k (d_{12}^k - d_{22}^k) + d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}(d_{21}^k - d_{12}^k)] - d_{12}^k w_2^k [(p_0^k - f_1[1-\beta_k])(d_{21}^k - d_{22}^k) +$$
$$+ (d_{21}^k a_*^{m_1^k-1}(f_1 - f_2 d_{22}^k) + d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}[f_2 d_{21}^k - f_1])(1-\beta_k)],$$

$$g_2^k = d_{21}^k w_1^k [(p_0^k - f_1[1-\beta_k])(d_{21}^k - d_{22}^k) + (a_*^{m_1^k-1} d_{21}^k [f_1 - f_2 d_{22}^k] + a_*^{m_2^k-1} d_{22}^k [f_2 d_{21}^k - f_1])(1-\beta_k)] -$$
$$- P_0^k [d_{21}^k a_*^{m_1^k-1}(d_{11}^k - d_{22}^k) + d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}(d_{21}^k - d_{11}^k)],$$

$$g_3^k = (p_0^k - f_1[1-\beta_k])[d_{11}^k w_1^k (d_{22}^k - d_{12}^k) + d_{12}^k w_2^k (d_{11}^k - d_{12}^k)] -$$
$$- d_{22}^k a_*^{m_2^k-1}[P_0^k (d_{11}^k - d_{12}^k) + (d_{12}^k w_2^k [f_1 - f_2 d_{11}^k] + d_{11}^k [f_2 d_{12}^k - f_1])(1-\beta_k)],$$

$$g_4^k = d_{21}^k a_*^{m_1^k-1}[P_0^k (d_{11}^k - d_{12}^k) + (d_{12}^k w_2^k [f_1 - f_2 d_{11}^k] + d_{11}^k [f_2 d_{12}^k - f_1])(1-\beta_k)] -$$
$$- (p_0^k - f_1[1-\beta_k])[d_{11}^k w_1^k (d_{21}^k - d_{12}^k) + d_{12}^k w_2^k (d_{11}^k - d_{21}^k)],$$

$$w_1^k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ (qa_*)^{n_1^k-1}, & k>0, \end{cases} \qquad w_2^k = \begin{cases} (qa_*)^{-2}, & k=0, \\ (qa_*)^{n_2^k-1}, & k>0, \end{cases}$$

$$d_{11}^k = (2+\lambda_0)(1+n_1^k[1-\beta_k]), \qquad d_{12}^k = (2+\lambda_0)(1+n_2^k[1-\beta_k]),$$
$$d_{21}^k = (\Delta_{11}^k m_1^k + \Delta_{12}^k)/\Delta^k, \qquad d_{22}^k = (\Delta_{11}^k m_2^k + \Delta_{12}^k)/\Delta^k,$$
$$f_1 = \frac{1}{\Delta^0}\Big[\Delta_{13}^k + \frac{b_3^0(\Delta_{11}^0 + \Delta_{12}^0)}{b_2^0 - b_1^0}\Big] K_0, \qquad f_2 = \frac{b_3^0}{b_2^0 - b_1^0} K_0.$$

Радиус упругопластической границы находим из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g^k}\Big[(\Delta_{21}^k m_1^k + \Delta_{22}^k)\,\frac{g_{21}^k}{\Delta^k} + (\Delta_{21}^k m_2^k + \Delta_{22}^k)\,\frac{g_{22}^k}{\Delta^k} -$$
$$- (2+\lambda_0(2+n_1^k))g_{11}^k - (2+\lambda_0(2+n_2^k))g_{12}^k\Big]\, \mathrm{e}^{\omega_k t + \gamma_k} =$$
$$= \frac{1}{g^0}\left[(2+3\lambda_0)g_{11}^0 + (\lambda_0+2)g_{12}^0\right] - \frac{1}{\Delta^0}\Big[\Delta_{23}^0 + \frac{b_3^0(\Delta_{21}^0 + \Delta_{22}^0)}{b_2^0 - b_1^0}\Big] K_0.$$

Численные расчеты проводились для случая зависимости внешней и внутренней динамических нагрузок от времени при $\Psi = K_0 = 0{,}01$, $\rho_0 = 0{,}001$, $\lambda_0 = 1{,}5$ (рис. 2). Результаты численного эксперимента представлены на рис. 3, 4, на которых показана зависимость величины a_*, обратной радиусу упругопластической границы, от времени t при различных значениях физико-механических параметров [4].

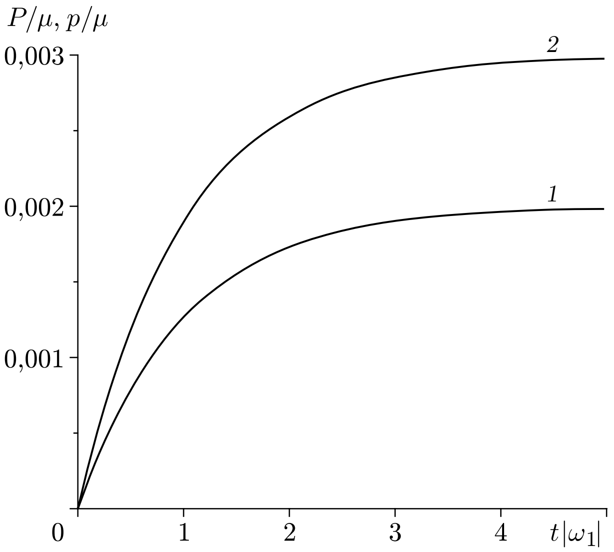

Рис. 2

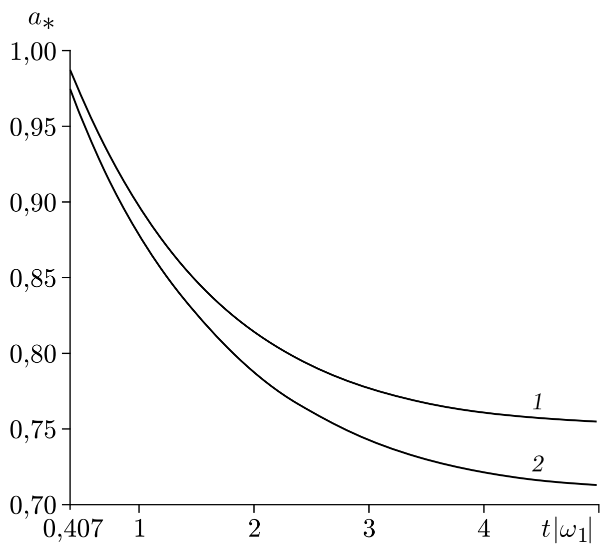

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость внешней P/μ (*1*) и внутренней p/μ (*2*) нагрузок от времени ($\omega_k = -k \cdot 10^{-2}$; $\gamma_k = 0$; $k = 1, 2, 3$)

Рис. 3. Зависимость величины, обратной радиусу упругопластической границы, от времени при $\alpha = 0{,}1$, $c_0 = 0{,}1$ и различных значениях вязкости:
1 — $\eta_0 = 0{,}05$, *2* — $\eta_0 = 0{,}10$

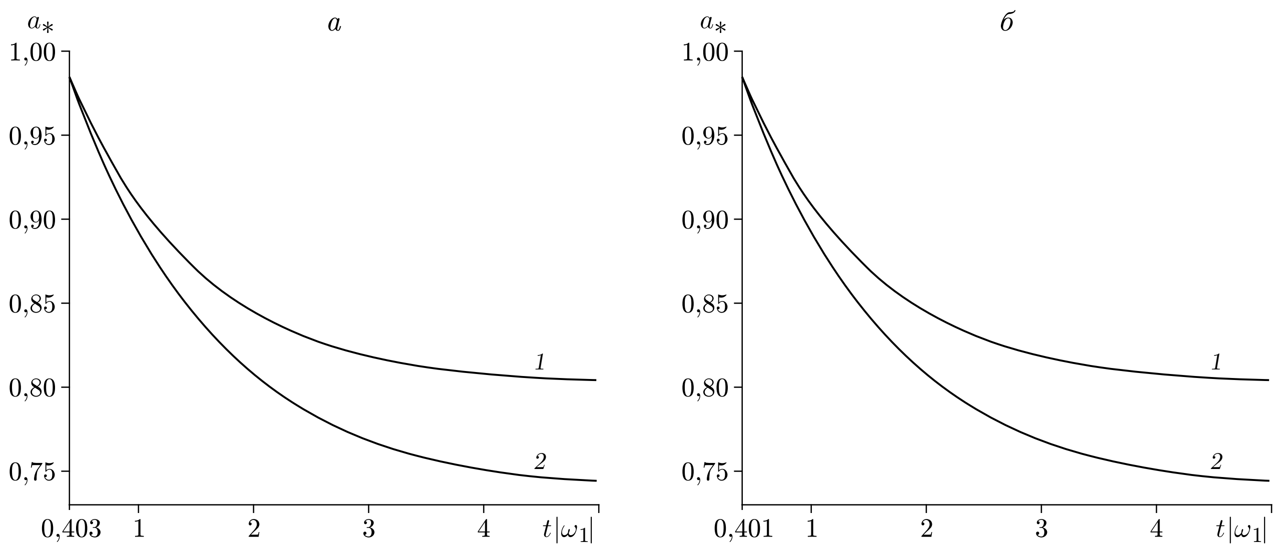

Рис. 4. Зависимость величины, обратной радиусу упругопластической границы, от времени при $\eta_0 = 0{,}05$ и различных значениях скорости дилатансии и параметра упрочнения:
а — $\alpha = 0{,}2$, *б* — $\alpha = 0{,}3$; *1* — $c_0 = 0{,}10$, *2* — $c_0 = 0{,}05$

Следует отметить, что при $P = P^0$, $p = p^0$ полученные решения совпадают с решениями статической задачи, приведенной в [2].

На рис. 3, 4 показано влияние вязкости и параметра упрочнения на поведение упругопластической границы. Видно, что при увеличении вязкости область пластического деформирования также увеличивается, а при увеличении параметра упрочнения данная область уменьшается. При этом с течением времени радиус упругопластической границы стремится к постоянному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Л. В.** Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления // ПМТФ. 1960. № 4. С. 81–82.
2. **Спорыхин А. Н.** Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997.
3. **Семыкина Т. Д.** О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 17–21.
4. **Спорыхин А. Н.** Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. М.: Физматлит, 2004.
5. **Ивлев Д. Д.** Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 24/III 2008 г.,
в окончательном варианте — 5/VIII 2008 г.