

УДК 532.526

## ПОРОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДВУМЯ СИНУСОИДАЛЬНЫМИ АКУСТИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ

Г. В. Петров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Для решения задачи используются параболизированные уравнения устойчивости для трехмерных возмущений сжимаемого пограничного слоя на пластине. Нелинейность учитывается квадратичными членами, причем только наиболее существенными по оценкам вязкого критического слоя теории устойчивости. Эти члены определяются суммарным полем двух звуковых возмущений, так что уравнения становятся линейными и неоднородными. Расчеты проведены для случая, когда одна из звуковых волн стационарна в системе отсчета, связанной с пластиной, при числах Маха  $M = 2; 5$ . Представлены решения, которые на достаточно большом расстоянии от кромки пластины с высокой точностью идентифицируются с волнами Толлмина — Шлихтинга.

В работе [1] максимальная по сечению пограничного слоя амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга в точке потери устойчивости принимается равной максимальной амплитуде возмущения, инициируемого звуком. В дальнейшем предпринимаются попытки обосновать это предположение (см., например, [2]). Однако в [3] с помощью параболизированных уравнений устойчивости получены данные, указывающие на то, что значительное превышение интенсивности возмущения в пограничном слое над интенсивностью звука имеет резонансный характер. При этом возбуждаются иные, затухающие моды собственных возмущений. Фазовые скорости звука и дозвуковых нарастающих мод не совпадают по определению. Отсюда следует, что акустическая волна может возбудить волну Толлмина — Шлихтинга только при взаимодействии с другими возмущениями пограничного слоя.

Воздействие с волновыми параметрами, близкими к параметрам волны неустойчивости, можно реализовать двумя звуковыми волнами через квадратичные перекрестные члены нелинейных уравнений для возмущений, так как частоты и волновые векторы при этом суммируются. В сверхзвуковом пограничном слое одна из акустических волн может быть стационарной в системе отсчета, связанной с пластиной. Этот случай наиболее интересен, так как стационарное возмущение связано с объектом обтекания и может иметь иную природу (например, шероховатость поверхности).

Следуя [4], используем ортогональную систему координат  $(\xi, \psi, z)$ , в которой в плоскости  $z = \text{const}$ , перпендикулярной передней кромке пластины, кривые  $\psi = \text{const}$  являются линиями тока ( $\psi$  — функция тока) невозмущенного стационарного пограничного слоя, а на стенке координата  $\xi$  — расстояние до передней кромки. Отбрасывая в уравнениях динамики сжимаемой жидкости члены, обусловленные кривизной линий тока, которые в случае пластины имеют порядок  $R^{-2}$  ( $R = \sqrt{u_\infty \xi / \nu_\infty}$ , индекс  $\infty$  соответствует набегающему

потоку), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= e, & d_t \rho + \rho e &= 0, & \rho d_t v_1 - h_1(\rho v_2^2 - \tau_{22}) &= -\partial_1 p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1, \\ \rho d_t v_2 + h_1(\rho_1 v_1 v_2 - \tau_{12}) &= -\partial_2 p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_2, & \rho d_t v_3 &= -\partial_3 p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_3, \\ \rho d_t H &= \partial_t p + \operatorname{div} \mathbf{q}, & H &= h + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)/2, & \boldsymbol{\tau}_k &= (\tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3}), \\ q_k &= \lambda \partial_k T + \mathbf{v} \boldsymbol{\tau}_k, & \tau_{kk} &= \mu s_{kk} \quad (k = 1, 2, 3), & s_{kk} &= 2(\partial_k v_k - e/3) \quad (k = 1, 3), \\ s_{22} &= 2(\partial_2 v_2 + h_1 v_1 - e/3), & \tau_{k3} &= \mu(\partial_k v_3 + \partial_3 v_k) \quad (k = 1, 2), \\ \tau_{12} &= \mu(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 - h_1 v_2), & h_1 &= \partial_1 \ln H_2, \end{aligned}$$

где  $\partial_t = \partial/\partial t$ ;  $\partial_1 = \partial/\partial \xi$ ;  $\partial_2 = (1/H_2)\partial/\partial \psi$ ;  $\partial_3 = \partial/\partial z$ ;  $d_t = \partial_t + \sum_{k=1}^3 v_k \partial_k$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 \partial_k v_k + h_1 v_1$  (для  $\mathbf{q}$  и  $\boldsymbol{\tau}_k$  выражения аналогичны); коэффициент Ламе  $H_2 = 1/(\rho u)$  определяется стационарными невозмущенными параметрами;  $(v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$  — вектор скорости в системе координат  $(\xi, \psi, z)$ ;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $h$  — энтальпия;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — вязкость;  $\lambda$  — теплопроводность;  $\nu = \mu/\rho$ .

Величины  $u, v, w, p, h, \tau_{12}, \tau_{23}, q_2$ , возмущения которых приняты в качестве основных зависимых переменных уравнений устойчивости в [3], представим в виде суммы  $a + \hat{a}$  параметров пограничного слоя и возмущения. Остальные величины приближенно представляются в виде суммы  $a + \hat{a} + \check{a}$ , где  $\hat{a}, \check{a}$  — линейные и квадратичные относительно возмущений основных величин члены, например,  $\check{H} = (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)/2$ . Очевидно, что при использовании в качестве основных других параметров (например, плотности, температуры или полной энтальпии вместо давления и энтальпии) различие результатов может быть устранено восстановлением в уравнениях для возмущений членов третьего и выше порядка малости. Квадратичный член произведения записывается в виде  $\check{S}(ab) = \hat{a}\hat{b} + \check{a}b + b\check{a}$ . Используя соотношения  $\check{S}(d_t \rho) = \hat{\partial} \hat{\rho} + d\check{\rho}$ ,  $\check{S}(\rho d_t a) = \hat{d}\hat{a} + \hat{\rho} \hat{\partial} a + \check{\rho} u \partial_1 a + \rho d\check{a}$ , где

$$\hat{\partial} = \hat{u} \partial_1 + \hat{v} \partial_2 + \hat{w} \partial_3, \quad \hat{d} = \rho \hat{\partial} + \hat{\rho} d, \quad d = \partial_t + u \partial_1, \quad (1)$$

получим уравнения для возмущений

$$\begin{aligned} (\partial_1 + h_1)\hat{u} + \partial_2 \hat{v} + \partial_3 \hat{w} &= \hat{e} + \check{e}, & \rho \hat{e} &= -(e + d)\hat{\rho} - \hat{\partial} \rho, & \rho \check{e} &= -(\hat{e} + \hat{\partial})\hat{\rho} - (e + d)\check{\rho}, \\ (\rho d + \hat{d})\hat{u} + (\rho + \hat{\rho})(\hat{u} \partial_1 + \hat{v} \partial_2)u &+ (\hat{\rho} + \check{\rho})u \partial_1 u - h_1(\rho \hat{v}^2 - \hat{\tau}_{22} - \check{\tau}_{22}) = \\ &= -\partial_1 \hat{p} + (h_1 + \partial_1)(\hat{\tau}_{11} + \check{\tau}_{11}) + \partial_2 \hat{\tau}_{12} + \partial_3(\hat{\tau}_{13} + \check{\tau}_{13}), \\ (\rho d + \hat{d})\hat{v} + h_1(\rho u \hat{v} + \rho \hat{u} \hat{v} + u \hat{\rho} \hat{v} - \hat{\tau}_{12}) &= -\partial_2 \hat{p} + (h_1 + \partial_1)\hat{\tau}_{12} + \partial_2(\hat{\tau}_{22} + \check{\tau}_{22}) + \partial_3 \hat{\tau}_{23}, \\ (\rho d + \hat{d})\hat{w} &= -\partial_3 \hat{p} + (h_1 + \partial_1)(\hat{\tau}_{13} + \check{\tau}_{13}) + \partial_2 \hat{\tau}_{23} + \partial_3(\hat{\tau}_{33} + \check{\tau}_{33}), \\ (\rho d + \hat{d})\hat{H} + (\rho + \hat{\rho})(\hat{u} \partial_1 + \hat{v} \partial_2)H &+ (\hat{\rho} + \check{\rho})u \partial_1 H + \rho d\check{H} = \\ &= \partial_t \hat{p} + (h_1 + \partial_1)(\hat{q}_1 + \check{q}_1) + \partial_2 \hat{q}_2 + \partial_3(\hat{q}_3 + \check{q}_3), \\ \hat{\tau}_{12} &= (\mu + \hat{\mu})(\partial_2 \hat{u} + \partial_1 \hat{v} - h_1 \hat{v}) + (\hat{\mu} + \check{\mu}) \partial_2 u, & \hat{\tau}_{23} &= (\mu + \hat{\mu})(\partial_2 \hat{w} + \partial_3 \hat{v}), \\ \hat{q}_2 &= (\lambda + \hat{\lambda}) \partial_2 \hat{T} + (\hat{\lambda} + \check{\lambda}) \partial_2 T + \lambda \partial_2 \check{T} + u \hat{\tau}_{12} + \tau_{22} \hat{u} + \tau_{22} \hat{v} + \hat{\tau}_{12} \hat{u} + \hat{\tau}_{22} \hat{v} + \hat{\tau}_{23} \hat{w}, \\ \hat{\tau}_{13} &= \mu(\partial_1 \hat{w} + \partial_3 \hat{u}), & \check{\tau}_{13} &= \hat{\mu} \hat{\tau}_{13}/\mu, & \hat{\tau}_{kk} &= \mu \hat{s}_{kk} + s_{kk} \hat{\mu}, & \check{\tau}_{kk} &= \mu \check{s}_{kk} + s_{kk} \check{\mu} + \hat{\mu} \hat{s}_{kk}, \\ \hat{s}_{11} &= 2(\partial_1 \hat{u} - \hat{e}/3), & \hat{s}_{22} &= 2(h_1 \hat{u} + \partial_2 \hat{v} - \hat{e}/3), \\ \hat{s}_{33} &= 2(\partial_3 \hat{w} - \hat{e}/3), & \check{s}_{11} &= \check{s}_{22} = \check{s}_{33} = -2\check{e}/3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= \lambda \partial_1 \hat{T} + \hat{\lambda} \partial_1 T + u \hat{\tau}_{11} + \tau_{11} \hat{u} + \tau_{12} \hat{v}, & \hat{q}_3 &= \lambda \partial_3 \hat{T} + u \hat{\tau}_{13} + \tau_{33} \hat{w}, \\ \check{q}_1 &= \check{\lambda} \partial_1 T + \lambda \partial_1 \check{T} + \hat{\lambda} \partial_1 \hat{T} + u \check{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{11} \hat{u} + \hat{\tau}_{12} \hat{v} + \hat{\tau}_{13} \hat{w}, \\ \check{q}_3 &= \lambda \partial_3 \check{T} + \hat{\lambda} \partial_3 \hat{T} + u \check{\tau}_{13} + \hat{\tau}_{13} \hat{u} + \hat{\tau}_{23} \hat{v} + \hat{\tau}_{33} \hat{w}, & e &= (h_1 + \partial_1)u, & \tau_{12} &= \mu \partial_2 u, \\ s_{11} &= 2(\partial_1 u - e/3), & s_{22} &= 2(h_1 u - e/3), & s_{33} &= -2e/3.\end{aligned}$$

Уравнения Навье — Стокса, не дополненные уравнениями состояния, не меняются при введении следующих масштабов:  $\nu_\infty/u_\infty^2$  — время,  $\nu_\infty/u_\infty$  — длина,  $\mu_\infty$  — функция тока,  $\rho_\infty u_\infty^2$  — давление и вязкие напряжения,  $u_\infty^2$  — энтальпия,  $\mu_\infty u_\infty^2/T_\infty$  — теплопроводность,  $\rho_\infty u_\infty^3$  — тепловые потоки. Для остальных величин в качестве масштабов берутся их значения в набегающем потоке. В принятых масштабах при  $R \rightarrow \infty$  толщина критического слоя по порядку величины равна  $R^{2/3}$  (а не  $R^{-1/3}$ , как в [4], где она оценивается относительно толщины пограничного слоя),  $\partial_t, \partial_1 = O(R^{-1})$ ,  $\partial_2 = O(R^{-2/3})$ ,  $\hat{p}, \hat{v} = O(1)$ ,  $\hat{u}, \hat{w}, \hat{h} = O(R^{1/3})$ ,  $d = O(R^{-4/3})$ ,  $\hat{\tau}_{12}, \hat{\tau}_{23}, \hat{q}_2 = O(R^{-1/3})$ ; для параметров основного течения  $\partial_1 = O(R^{-2})$ ,  $\partial_2 = O(R^{-1})$ . Оценка  $\hat{p}$  принимается такой же, как и вне критического слоя, в силу непрерывности возмущения давления в критической точке для уравнений невязкой теории устойчивости.

Отбрасывая в (2) нелинейные члены, имеющие порядок величины  $R^{-1/3}$  относительно главных линейных членов, получим уравнения

$$\begin{aligned}\partial_2 \hat{v} - \hat{L}_v &= -(1/\rho)[\hat{\partial} \hat{\rho} - (\hat{\rho}/\rho)(d\hat{\rho} + \hat{v} \partial_2 \rho) + d\hat{\rho}], \\ \partial_2(\hat{p} - \hat{\tau}_{22}) - \hat{L}_p &= -\rho \hat{\partial} \hat{v}, & \partial_2 \hat{\tau}_{12} - \hat{L}_{12} &= \hat{d} \hat{u} + \hat{\rho} \hat{v} \partial_2 u, & \partial_2 \hat{\tau}_{23} - \hat{L}_{23} &= \hat{d} \hat{w}, \\ \partial_2 \hat{q} - \hat{L}_q &= \hat{d} \hat{h} + u \hat{d} \hat{u} + \rho \hat{u} \hat{v} \partial_2 u + \hat{\rho} \hat{v} \partial_2 H + \rho(\hat{u} \hat{d} \hat{u} + \hat{w} \hat{d} \hat{w}), \\ \partial_2 \hat{u} - \hat{L}_u &= -(\hat{\mu}/\mu) \partial_2 \hat{u} - (\check{\mu}/\mu) \partial_2 u, & \partial_2 \hat{w} - \hat{L}_w &= -(\hat{\mu}/\mu) \partial_2 \hat{w}, \\ \partial_2 \hat{T} - \hat{L}_T &= -(\hat{\lambda}/\lambda) \partial_2 \hat{T} - \partial_2 \check{T} - (\check{\lambda}/\lambda) \partial_2 T - (\hat{u} \hat{\tau}_{12} + \hat{w} \hat{\tau}_{23})/\lambda,\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\hat{q} = \hat{q}_2$ ; операторы  $\hat{\partial}, \hat{d}, d$  определены в (1);  $\hat{L}_v, \hat{L}_p, \dots$  — не содержащие  $\partial_2$  линейные выражения, которые приводятся ниже в параболизированном виде. В случае совершенного газа с постоянным числом Прандтля  $Pr$  последнее уравнение преобразуется к виду

$$\partial_2 \hat{h} - \hat{L}_h = -\mu_h \hat{h} \partial_2 \hat{h} - \mu_{hh} \hat{h}^2 \partial_2 h - Pr(\hat{u} \hat{\tau}_{12} + \hat{w} \hat{\tau}_{23})/\mu,$$

при этом  $\hat{\mu}/\mu = \mu_h \hat{h}$ ,  $\check{\mu}/\mu = \mu_{hh} \hat{h}^2$ ,  $\mu_h = d \ln \mu / dh$ ,  $\mu_{hh} = (d^2 \mu / dh^2) / (2\mu)$ ,  $\check{T} = 0$ ,  $\check{\rho} = \hat{\rho} \hat{h} / h$ .

Уравнения (3) с учетом уравнений состояния и законов вязкости и теплопроводности газа имеют вид  $K \hat{\mathbf{Z}} = \hat{N}(\hat{\mathbf{Z}})$ , где  $\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{v}, \hat{p}, \hat{\tau}_{12}, \hat{\tau}_{23}, \hat{q}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{h})$  — вектор, составленный из возмущений основных параметров;  $K, \hat{N}$  — линейный (матрица) и нелинейный дифференциальные операторы. Решение уравнений (3) ищем в виде суммы  $\hat{\mathbf{Z}} + \hat{\mathbf{Z}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_2$ , где  $\hat{\mathbf{Z}}_1, \hat{\mathbf{Z}}_2$  — линейные возмущения, инициируемые звуком (см. [3]). Если  $\hat{\mathbf{Z}}$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\hat{\mathbf{Z}}_1$  и  $\hat{\mathbf{Z}}_2$ , то для нее справедливо уравнение

$$K \hat{\mathbf{Z}} = \hat{N}(\hat{\mathbf{Z}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_2),\tag{4}$$

т. е. нелинейные уравнения становятся неоднородными линейными.

Для звуковых волн вида  $\hat{\mathbf{Z}}_j = \text{Re}[\tilde{\mathbf{Z}}_j \exp(i\varphi_j)]$  ( $\varphi_j = \alpha_j \xi + \beta_j z - \omega_j t$ ;  $\text{Re}$  — вещественная часть) амплитудные функции определяются уравнениями  $L \hat{\mathbf{Z}}_j = 0$ . Правая часть уравнения (4) состоит из произведений компонент векторов  $\tilde{\mathbf{Z}}_j, \tilde{\mathbf{Z}}_k$   $\hat{a}_j \hat{b}_k = \text{Re}\{\tilde{a}_j \tilde{b}_k \exp[i(\varphi_j + \varphi_k)] + \tilde{a}_j \tilde{b}_k^* \exp[i(\varphi_j - \varphi_k)]\}$ . В данной работе представляют интерес перекрестные комбинации  $j \neq k$ , при этом  $\hat{a} \hat{b} = \text{Re}\{(\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 + \tilde{a}_2 \tilde{b}_1) \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]\}$ .

Решение уравнения (4) вида  $\hat{\mathbf{Z}} = \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{Z}} \exp[i(\int \alpha d\xi + \beta z - \omega t)] \}$ ,  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  строится с помощью решения уравнения

$$L\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{N} \exp \left[ i \int (\alpha_3 - \alpha) d\xi \right], \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (5)$$

где  $L$ ,  $\mathbf{N}$  — оператор и вектор, соответствующие левой и правой частям уравнений (3) при заменах  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ ,  $\partial_1 \rightarrow i\alpha + \partial_1$ ,  $\partial_3 \rightarrow i\beta$ ,  $\hat{a}\hat{b} \rightarrow \tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1 = \tilde{a}_j\tilde{b}_k$  (знак суммирования опускаем). Правые части в принятом приближении с учетом оценки  $\partial_1 = O(R^{-5/3})$  (оценка отличается от приведенной ранее, так как здесь оператор  $\partial_1$  действует на амплитудные функции  $\tilde{a}$ , а не на само возмущение  $\hat{a}$ ) принимают вид

$$\begin{aligned} N_v &= -\tilde{D}_j \tilde{r}_k + \rho \tilde{v}_j (\partial_2 \tilde{T}_k - \rho \tilde{T}_k \partial_2 T) + 3\rho^2 u_{cj} \tilde{T}_j \tilde{T}_k, & N_p &= -\rho (\tilde{D}_j + \tilde{v}_j \partial_2) \tilde{v}_k, \\ N_{12} &= \tilde{d}_j \tilde{u}_k + \rho \tilde{v}_j \tilde{r}_k \partial_2 u, & N_{23} &= \tilde{d}_j \tilde{w}_k, \\ N_q &= \tilde{d}_j \tilde{h}_k + u \tilde{d}_j \tilde{u}_k + \rho [\tilde{v}_j (\tilde{u}_k \partial_2 u + \tilde{r}_k \partial_2 H) + \tilde{u}_j (u_{cj} + \partial_1) \tilde{u}_k + \tilde{w}_j (u_{cj} + \partial_1) \tilde{w}_k], & (6) \\ N_u &= -\mu_h \tilde{h}_j \partial_2 \tilde{u}_k - \mu_{hh} \tilde{h}_j \tilde{h}_k \partial_2 u, & N_w &= -\mu_h \tilde{h}_j \partial_2 \tilde{w}_k, \\ N_h &= -\mu_h \tilde{h}_j \partial_2 \tilde{h}_k - \mu_{hh} \tilde{h}_j \tilde{h}_k \partial_2 h - \text{Pr}(\tilde{u}_j \tilde{\tau}_{12k} + \tilde{w}_j \tilde{\tau}_{23k})/\mu, \end{aligned}$$

где  $\tilde{D}_j = i(\alpha_3 - \alpha_j) \tilde{u}_j + i(\beta - \beta_j) \tilde{w}_j$ ;  $u_{cj} = i\alpha_j u - i\omega_j$ ;  $\tilde{d}_j = \rho[\tilde{D}_j + (u_{c3} - u_{cj}) \tilde{r}_j + (\tilde{u}_j + u \tilde{r}_j) \partial_1 + \tilde{v}_j \partial_2]$ ;  $\tilde{r} = \tilde{\rho}/\rho$ .

Переход к переменной подобия пограничного слоя  $\eta$  осуществляется с помощью формул  $\partial_1 = R^{-1}(\partial + f_1 \partial_\eta)$ ,  $\partial_2 = R^{-1} \rho \partial_\eta$ , где  $R = \sqrt{\xi}$ ;  $f_1 = -f_0 u$ ;  $f_0 = f/(2Ru^2)$ ;  $f = \psi/R$ ;  $\partial = 0,5\partial/\partial R$ ;  $\partial_\eta = \partial/\partial \eta$ . Проведенные в [3] расчеты показали, что максимум амплитуды вынужденного возмущения расположен вблизи координатной линии  $\eta = \text{const}$ , следовательно, можно считать, что  $\partial = O(R^{-1})$ , и при замене переменных в уравнениях (6) эту производную не учитывать. В качестве однородной линейной части преобразованных уравнений (5) используются параболизированные с помощью оценок по целым степеням  $R$  уравнения [3]. В расчетах отбрасывается член, содержащий  $\partial \tilde{v}/\partial R$ , что позволяет уменьшить шаг маршевой схемы интегрирования за счет незначительного уменьшения точности с  $R^{-5/3}$  до  $R^{-4/3}$ . Итоговые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}' &= \tilde{v}^* - g_m u T \partial \tilde{\pi} - T \partial \tilde{u} + g_{m1} u \partial \tilde{h} - g_m f_2 T \tilde{\pi}^* - f_3 \tilde{u}^* + g_{m1} f_2 \tilde{h}^* - \\ &\quad - \Sigma[\tilde{D}_j \tilde{r}_k + (h' \tilde{v}_j - 3c_j \tilde{h}_j) \tilde{h}_k/h^2 - \tilde{v}_j \tilde{h}'_k/h], \\ \tilde{\pi}' &= \tilde{\pi}^* - u \partial \tilde{v} - f_2 \tilde{v}^* - \Sigma \rho (\tilde{D}_j + \tilde{v}'_j) \tilde{v}_k, \\ \tilde{\tau}'_{12} &= \rho u' \tilde{v} + T \partial \tilde{\pi} + (i_c + f_1 u' + u \partial) \tilde{u} + i_x \tilde{p} + f_2 u' \tilde{r} - \tilde{i}_T + f_3 \tilde{\pi}^* + f_2 \tilde{u}^* + \Sigma(\tilde{b}_{1jk} + \rho u' \tilde{b}_{2jk}), \\ \tilde{\tau}'_{23} &= (i_c + u \partial) \tilde{w} + i_z \tilde{p} - i_x \tilde{\tau}_{13} - i_z \tilde{\tau}_{33} + f_2 \tilde{w}^* + \Sigma(\tilde{d}_j \tilde{w}_k + \tilde{b}_j \tilde{w}'_k), \\ \tilde{u}' &= \tilde{u}^* + \Sigma(\tilde{\mu}_j \tilde{u}'_k + \tilde{\mu}_{jk} u'), & \tilde{w}' &= \tilde{w}^* + \Sigma \tilde{\mu}_j \tilde{w}'_k, & (7) \\ \tilde{q}' &= (\rho H' - \mu_x u') \tilde{v} + (i_c u + f_1 H' + f_2 u' + u^2 \partial) \tilde{u} + \\ &\quad + [i_c - (i_x^2 + i_z^2) \mu_R / \text{Pr} + u \partial] \tilde{h} + i_w \tilde{p} + f_2 H' \tilde{r} - u \tilde{i}_T + f_2 (u \tilde{u}^* + \tilde{h}^*) + \\ &\quad + \Sigma\{\tilde{d}_j \tilde{h}_k + \tilde{b}_j \tilde{h}'_k + u \tilde{b}_{1jk} + \rho [u' \tilde{v}_j \tilde{u}_k + H' \tilde{b}_{2jk} + c_j (\tilde{u}_j \tilde{u}_k + \tilde{w}_j \tilde{w}_k) + f_3 (\tilde{u}_j \tilde{u}'_k + \tilde{w}_j \tilde{w}'_k)]\}, \\ \tilde{h}' &= \tilde{h}^* + \Sigma[\tilde{\mu}_j \tilde{h}'_k + \tilde{\mu}_{jk} h' - \text{Pr}(\tilde{u}_j \tilde{\tau}_{12k} + \tilde{w}_j \tilde{\tau}_{23k})/\mu_R], \end{aligned}$$

где  $\tilde{v}^* = \rho T' \tilde{v} - (i_x + f_0 u' T) \tilde{u} - i_z \tilde{w} - f_2 \rho T' \tilde{T} - i_c T \tilde{r}$ ;  $\tilde{u}^* = -i_x \tilde{v} + \tilde{\tau}_{12}/\mu_R - u' \mu_h \tilde{h}$ ;  $\tilde{r} = \tilde{\rho}/\rho = g_m \tilde{p} - \rho \tilde{T}$ ;  $\tilde{\pi}^* = (f_1 u' - f_2 \rho T' - i_c) \tilde{v} + i_x \tilde{\tau}_{12} + i_z \tilde{\tau}_{23}$ ;  $\tilde{w}^* = -i_z \tilde{v} + \tilde{\tau}_{23}/\mu_R$ ;  $\tilde{h}^* = -\text{Pr} u' \tilde{u} - h' \mu_h \tilde{h} +$

$$\text{Pr}(\tilde{q} - u\tilde{\tau}_{12})/\mu_R; \tilde{p} = \tilde{\pi} - \tilde{\tau}_{11} - \tilde{\tau}_{33}; \tilde{i}_T = i_x\tilde{\tau}_{11} + i_z\tilde{\tau}_{13}; \tilde{\tau}_{11} = 2\mu_x\tilde{u} - \tilde{e}_3; \tilde{\tau}_{33} = 2\mu_z\tilde{w} - \tilde{e}_3; \tilde{\tau}_{13} = \mu_x\tilde{w} + \mu_z\tilde{u}; \tilde{e}_3 = 2\mu_R[\rho T'\tilde{v} - i_c(g_m T\tilde{\pi} - \tilde{T})]/3; \tilde{T} = g_{m1}\tilde{h}; \tilde{D}_j = (i_{x3} - i_{xj})\tilde{u}_j + (i_z - i_{zj})\tilde{w}_j; \tilde{d}_j = \rho[\tilde{D}_j + (c_3 - c_j)\tilde{r}_j]; \tilde{b}_{1jk} = \tilde{d}_j\tilde{u}_k + \tilde{b}_j\tilde{u}'_k; \tilde{b}_{2jk} = \tilde{v}_j\tilde{r}_k; \tilde{b}_j = \tilde{v}_j + f_3(\tilde{u}_j + u\tilde{r}_j); \tilde{\mu}_j = -\mu_h\tilde{h}_j; \tilde{\mu}_{jk} = -\mu_{hh}\tilde{h}_j\tilde{h}_k; \mu_x = i_x\mu_R; \mu_z = i_z\mu_R; \mu_R = \mu\rho/R; \mu_h = g_{m1}d\ln\mu/dT; \mu_{hh} = g_{m1}^2(d^2\mu/dT^2)/(2\mu); c_j = i_{xj}u - i_{wj}; i_c = iR(u\alpha - \omega); i_x = i\alpha RT; i_z = i\beta RT; i_w = i\omega RT; f_2 = f_1u; f_3 = f_1T;$$

$$\Sigma = \exp\left[2i \int (\alpha_3 - \alpha)R dR\right] \sum_{j=1, k=3-j}^2; g_m = \gamma M^2; g_{m1} = (\gamma - 1)M^2; M \text{ — число Маха};$$

$\gamma$  — отношение теплоемкостей;  $\partial = 0,5\partial/\partial R$ ; штрих означает производную по  $\eta$ .

Неоднородные части уравнений (7) в критическом слое по порядку величины в  $R^{2/3}$  раз превышают оценку для области вне критического слоя, т. е. искомое возмущение порождается в критическом слое возмущения, инициируемого звуком. Вне пограничного слоя неоднородными членами можно пренебречь, тогда задача решается с теми же граничными условиями и тем же методом, что и задача устойчивости для параболизированных уравнений [4].

Решение задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений  $\mathbf{Z}' = A\mathbf{Z} + B\mathbf{Z}_0 + C(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ , получаемых в результате аппроксимации  $\partial\mathbf{Z}/\partial R = (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)/(R - R_0)$ , строится как суперпозиция решения, рассчитываемого с условием  $Z = 0$  на границе пограничного слоя, и четырех фундаментальных решений однородных уравнений  $\mathbf{Z}' = A\mathbf{Z}$  с условиями затухания при  $\eta \rightarrow \infty$  и с коэффициентами, определяемыми условиями  $\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{h} = 0$  на стенке. Значение  $\alpha$  на каждом шаге по  $R$  определяется методом Ньютона при выполнении требования  $\partial\tilde{\pi}/\partial R = 0$  в точке максимума амплитуды  $A$  возмущения массового расхода  $\tilde{m} = \rho\tilde{u} + u\tilde{\rho}$  (см. [4]). В начальном сечении пограничного слоя  $\mathbf{Z}$  рассчитывается для  $\alpha = \alpha_3$  с помощью локальных уравнений, получаемых исключением из (7) всех производных по  $R$ .

Расчеты проводятся для теплоизолированной пластины при  $M = 2; 5$ . Результаты представляются в виде зависимостей от  $R$  максимальной по сечению пограничного слоя относительной амплитуды массового расхода  $\bar{A} = A/(A_1A_2)$ , где  $A_1, A_2$  — амплитуды возмущений массового расхода падающих звуковых волн.

При  $M = 2$  используется формула вязкости Сатерленда с постоянной  $T_s = 110,4$  К;  $\text{Pr} = 0,71$ . Возбуждаемая частота принимается равной  $\omega = \omega_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ ,  $z$ -составляющая волнового числа  $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ . Волна Толлмина — Шлихтинга с такими же параметрами направлена под углом примерно  $60^\circ$  к направлению потока.

На рис. 1, а также на рис. 2 (кривые 1) представлены результаты, полученные при  $\alpha_1 = 3,1 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta_1 = 3,7 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует углу  $\varphi_1 = 50^\circ$  (здесь и ниже  $\varphi = \arctg(\beta/\alpha)$ ). Инкременты  $\alpha_i = \text{Im}\alpha$  вынужденных возмущений на рис. 1 и

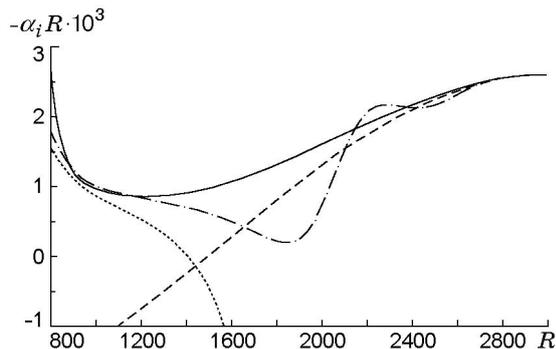


Рис. 1

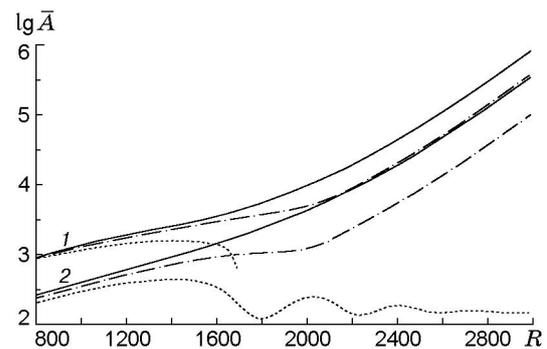


Рис. 2

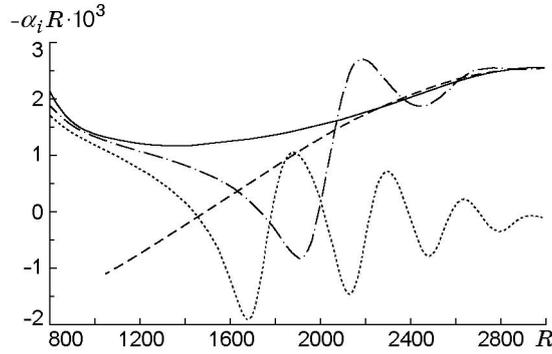


Рис. 3

их амплитуды на рис. 2 рассчитаны для различных значений  $\alpha_2$  стационарных волн: сплошные линии —  $\alpha_2 = -2,1 \cdot 10^{-5}$ , штрихпунктирные —  $\alpha_2 = -1,9 \cdot 10^{-5}$ , пунктирные —  $\alpha_2 = -1,8 \cdot 10^{-5}$ . Штриховой линией на рис. 1 показаны инкременты волны Толлмина — Шлихтинга. Видно, что при достаточно больших значениях  $R$  в диапазоне  $\alpha_2 = -1,9 \cdot 10^{-5} \div -2,1 \cdot 10^{-5}$  ( $\varphi_2 = 42 \div 39^\circ$ ) вынужденные возмущения практически не отличаются от собственного нарастающего возмущения. Вне этого диапазона волна Толлмина — Шлихтинга не возбуждается.

Аналогичные результаты, полученные при  $\alpha_1 = 1,01 \cdot 10^{-6}$ ,  $\beta_1 = 5,73 \cdot 10^{-6}$  ( $\varphi_1 = 80^\circ$ ), представлены на рис. 2 (кривые 2) и рис. 3. Сплошные линии соответствуют значению  $\alpha_2 = 9,5 \cdot 10^{-6}$ , штрихпунктирные —  $\alpha_2 = 1,1 \cdot 10^{-5}$ , пунктирные —  $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ . Волна неустойчивости, представленная на рис. 3 штриховой линией (та же, что и на рис. 1), возбуждается в диапазоне волновых чисел стационарного внешнего возмущения  $\alpha_2 = 9,5 \times 10^{-6} \div 1,1 \cdot 10^{-5}$  ( $\varphi_2 = 56 \div 52^\circ$ ).

Параметры вынужденных возмущений сильно отличаются от параметров волны Толлмина — Шлихтинга в точке потери устойчивости  $R^* = 1480$ , совпадение наблюдается лишь при  $R > 3000$ . Эффективное значение амплитуды возбуждаемого собственного возмущения в точке потери устойчивости (коэффициент восприимчивости) определяется формулой  $\bar{A}^* = \bar{A}/K_s$ , где  $K_s = (A/A^*)_s$  — коэффициент пространственного нарастания волны Толлмина — Шлихтинга, рассчитываемый, как и  $\bar{A}$ , при  $R = 3000$ . Сплошным кривым 1, 2 на рис. 2 соответствуют значения  $\bar{A}^* = 5140; 2160$ .

Для  $M = 5$  расчеты проводятся при  $Pr = 1$ ,  $\mu = T$ . Рассматриваются плоские возмущения  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\omega_1 = 10^{-4}$ ,  $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ . На рис. 4, 5 сплошными линиями представлены результаты, полученные при  $\alpha_2 = 6,6 \cdot 10^{-5}$ , штрихпунктирными — при  $\alpha_2 = 7,6 \cdot 10^{-5}$ . На рис. 4 видно, что в обоих случаях параметры вынужденных возмущений совпадают с

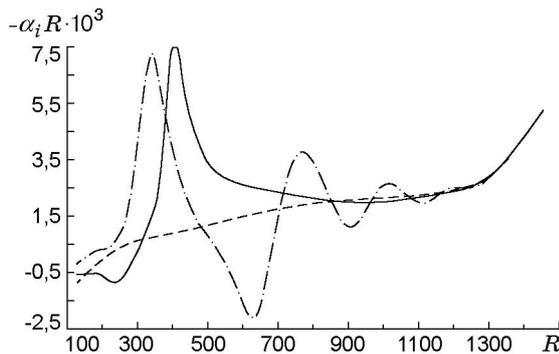


Рис. 4

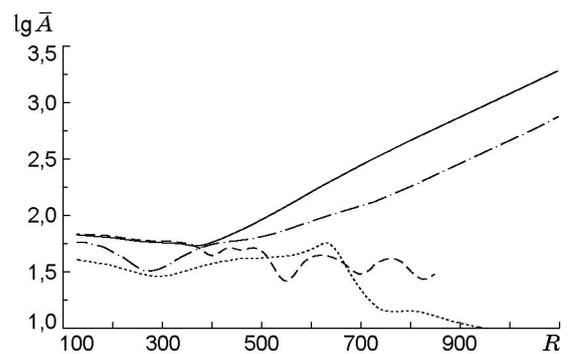


Рис. 5

представленными штриховой линией параметрами волны Толлмина — Шлихтинга начиная с  $R \approx 1300$ . Указанным значениям  $\alpha_2$  соответствуют коэффициенты восприимчивости  $\bar{A}^* = 89; 34$ . При  $\alpha_2 = 6,5 \cdot 10^{-5}$  (штриховая линия на рис. 5) и  $\alpha_2 = 7,7 \cdot 10^{-5}$  (пунктирная линия) волны неустойчивости не возбуждаются, и амплитуды возмущений не растут при больших значениях  $R$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary layer transition // AIAA J. 1975. V. 13, N 3. P. 278–289.
2. Гапонов С. А. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга в сверхзвуковом пограничном слое звуком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 3. С. 59–66.
3. Петров Г. В. Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 1. С. 77–86.
4. Петров Г. В. Новая параболизированная система уравнений устойчивости сжимаемого пограничного слоя // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 63–69.

*Поступила в редакцию 25/IV 2001 г.,  
в окончательном варианте — 27/IX 2001 г.*

---