

УДК 539.3

О НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ГОРНЫХ ПОРОД

В. Е. Миренков

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: mirenkov@misd.nsc.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Граничные задачи механики горных пород являются многопараметрическими, и зависимость искомых решений от них может быть сложной. Влияние одних параметров на решение может быть очень заметным, в то время как других незначительным. Характер зависимости решения от параметров становится известным после обращения граничной задачи. Обращение граничной задачи и исследование поведения решения в зависимости от значений параметров, как правило, достигается численными методами, при этом встает ряд вопросов относительно точности решения, описания влияния параметров на решение при одновременном их изменении. В настоящее время известны решения частных обратных задач в зависимости от одного параметра. В статье предлагается принципиально новый метод решения обратных многопараметрических задач, основанный на полученных точных уравнениях, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений и исключающих регуляризацию.

Блок пород, граница, напряжения, смещения, сингулярные уравнения, обратные задачи, решение

Постановка задач математической физики содержит некоторые функции, входящие в предельные (начальные или граничные) условия. Решения зависят от этих функций, которые определяются обычно из опыта, и поэтому не могут быть найдены абсолютно точно. Погрешность будет сказываться и на решении, и не всегда окажется малой. Во многих приложениях механики горных пород к проблемам технологии добычи полезных ископаемых возникает необходимость решения некорректно поставленных задач. Особенно важную роль играют такие задачи, когда нельзя проводить натурные измерения процесса деформирования на недоступных участках границы и внутри исследуемой области массива пород.

Существует три типа обратных задач для упругих конструкций и их упругих частей: обратные задачи по определению механических характеристик; граничные обратные задачи об идентификации нагрузок; геометрические — об определении координат внутренних дефектов. Разделение обратных задач на три типа достаточно условно. Действительно, при реализации, например, задач третьего типа нельзя предположить, что механические характеристики рассматриваемого тела определены точно и формулируемые граничные условия удастся реализо-

вать точно по существу, поэтому необходимо решать задачи всех трех типов. К тому же использование экспериментальных данных, определенных с погрешностью, дискретизация сплошной среды при численном счете вносит погрешность в обратный оператор; априорные предположения на характер деформирования конструкции (абсолютно твердое тело, идеальное проскальзывание, скачок смещений, нарушение конформности в конечном числе точек и т. п.) вносят погрешность в граничные условия при формулировке задачи и расширяют класс обратных задач. Совершенно ясно, что лишь по чистой случайности при независимо заданных граничных условиях, связанных с конкретной постановкой эксперимента, без учета реальной зависимости механических свойств материалов, сформулированные граничные условия действительно могут реализоваться. Общее требование для всех таких задач — необходимость преодоления некорректности путем регуляризации [1, 2] или же получением точных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений, исключающих регуляризацию.

Методы решения некорректных задач сводятся к нахождению единственного решения [1 – 12], при этом даже не обсуждается проблема нахождения других решений, отличающихся от найденного и удовлетворяющих тем же входным данным и тем же дополнительным условиям, характеризующим изучаемый процесс. Эти обстоятельства значительно усложняют получение решений, обеспечивающих требуемую надежность функционирования конструкций. Предлагаемый автором метод дает возможность выделить единственное решение, отвечающее реальному физическому процессу с приближенно заданными входными данными, рассчитать погрешность, исследовать эффективность различных дополнительных условий в выделении реального решения, оценить необходимую точность измерений. Наиболее важными для практики являются задачи изменения границы и внутренних параметров механической системы. Система сингулярных интегральных уравнений дает уникальную методику решения таких задач.

Алгоритм решения представляет собой переборный процесс, с помощью которого восстанавливаются функции, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям. Предлагаемый метод основан на решении одной отдельной обратной задачи для каждой из варьируемых функций. Условие получения решения с достаточной точностью приводит к использованию метода на нескольких этапах расчета и выполнения в связи с этим большого объема вычислений. Самое главное заключается в том, что каждая обратная классическая задача и некоторый набор решений из них могут быть получены заранее и использоваться многократно для решения более широкого класса задач с различными входными данными. В общем случае метод пригоден для численного исследования с некоторой погрешностью δ вопроса о некорректности задачи, а именно: существования и единственности решения, устойчивости по входным данным. Другими словами, метод позволяет с заданной погрешностью δ исследовать наличие различных решений или обосновать их отсутствие. Априорные предположения о процессе деформирования массива горных пород с выработками могут сводиться при их анализе к некорректным задачам с последующим уточнением принимаемых предположений или полным отказом от них.

Пусть в области Ω , согласно классическим представлениям, задано уравнение

$$A(x, \sigma) = B(x, u(\sigma)), \quad (1)$$

где $x \in \Omega$; A — некоторый заданный оператор; B — заданная функция; σ и $u(\sigma)$ — искомые функции. К уравнению (1) добавляются следующие условия:

$$\alpha_1(x, \sigma) = \beta_1(x, \sigma), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\frac{\|\alpha_2(x, \sigma) - \beta_2(x, \sigma)\|}{\|\beta_2(x, \sigma)\|} \leq \delta. \quad (3)$$

Здесь Γ — граница области Ω ; α_1, β_1 и α_2, β_2 — известные функции; δ — заданная относительная погрешность. Предполагается, что условие (2) обеспечивает возможность решения уравнения (1) в случае, если функция $u(\sigma)$ известна. Задачу (1), (2) с заданной $u(\sigma)$ обычно называют прямой. Условие (3) добавляется для решения системы (1)–(3) с неизвестной функцией $u(\sigma)$, такую задачу называют обратной. Необходимо найти все решения $\sigma, u(\sigma)$ обратной задачи (1)–(3). Далее в (1) под $u(\sigma)$ понимаются $u_1(\sigma), u_2(\sigma), \dots, u_n(\sigma)$ и в (3) под δ — $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, отвечающие соответственно последовательности частных задач. При рассмотрении такого класса некорректных задач конечный результат зависит от последовательности решения частных задач, которые не предполагают выход за рамки выбранной модели среды и определяют только порядок нахождения функций всех типов обратных задач. Аналогичная ситуация имеет место в теории пластичности при сложном нагружении, когда конечный результат зависит от порядка приложения нагрузки.

На рис. 1 изображена схема целика, находящегося в контакте по граням Γ_1 и Γ_3 с вмещающими породами, грани Γ_2 и Γ_4 свободны от напряжений:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \Gamma_4. \quad (4)$$

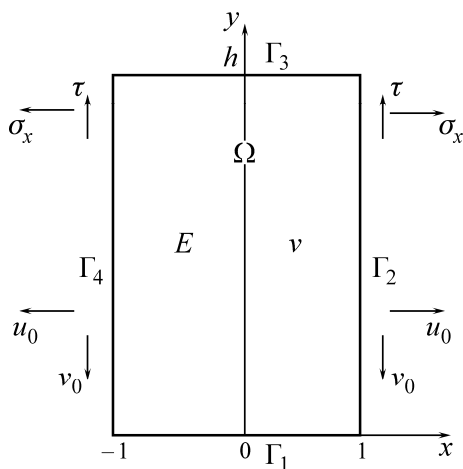


Схема целика, занимающего область Ω

По граням Γ_1 и Γ_3 граничные условия неизвестны. Будем считать, что по граням Γ_2 и Γ_4 известны из натурального эксперимента, дополнительно к (4), компоненты смещений

$$u(y) = u_0, \quad v(y) = v_0 \quad \text{на } \Gamma_2, \Gamma_4. \quad (5)$$

Перейдем к безразмерным величинам: все величины, имеющие размерность длины, отнесем к половине ширины целика, размерность напряжений — к максимальному значению усилий на Γ_1, Γ_3 . Не уменьшая общности, положим, что в целике нет дефектов и необходимо определить только граничные условия на Γ_1 и Γ_3 и модуль Юнга E (упростим задачу, положив коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$) области Ω .

Систему сингулярных интегральных уравнений, связывающую значения компонент напряжений и смещений для произвольной области Ω , следуя [10], запишем в виде

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \quad (6)$$

$$k \overline{f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k \overline{f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [f(t) + 2\mu g(t)] d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

где $k = 3 - 4$; $\mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона;

$$f(t) = i \int_{\Gamma}^t (X_n + iY_n) ds = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = f_1 + i f_2, \quad (7)$$

здесь X_n , Y_n — компоненты усилий в направлении осей x и y ; $g = u + iv$; u , v — компоненты смещений в направлении осей x и y ; i — мнимая единица; черта над функцией обозначает комплексно сопряженное значение; Γ — граница рассматриваемой области; t_0 — аффикс точки границы Γ . Эта система уравнений справедлива для всех трех основных задач теории упругости, которые могут формулироваться в той или иной вариации, и может быть использована при моделировании напряженно-деформированного состояния пород кровли и почвы, однородных частей целиков и обрабатываемых пластов полезного ископаемого.

Обратные задачи поставлены некорректно и должны исследоваться методами регуляризации. Однако универсального регуляризирующего алгоритма до сих пор не предложено. При практическом решении обратных задач требуется вычислить параметр регуляризации в сглаживающем функционале. Вычисление этого параметра по ошибкам измерений представляет собой самостоятельную задачу. Для всех обратных задач есть общее требование: необходимо преодолеть некорректности путем регуляризации [1–4] или же с помощью получения точных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений, исключающих регуляризацию. Приведенная точная система уравнений (6), (7) позволяет выписать решения для компонент смещений и напряжений на границе рассматриваемой области в квадратурах, что дает возможность исключить процесс регуляризации и предложить метод последовательных приближений, сходящийся к точному решению при определении упругих характеристик, граничных условий, а также геометрии ослабления при их наличии.

Использование соотношений (6), (7) позволяет получить последовательные приближения к точному решению, но на некотором промежуточном или даже конечном шаге решения будут различаться за счет выбранной последовательности вычислений. Для получения надежного результата в конечном счете можно использовать любой выбранный порядок приближения к искомым функциям с наперед заданной точностью, если не обращать внимания на число итераций.

Учитывая условия (4), (5), запишем систему (6), разрешенную относительно функций напряжения (7), для нижней части блока пород только на Γ_1 ($t = s$, $t_0 = x$):

$$\begin{aligned} 2kf_{11}(x) = & -2\mu(k-1)u_1(x) + \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)v_1}{s-x} ds + \\ & + \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^h \frac{(1-x)[2kf_{21} + 2\mu(k-1)u_2] + 2\mu(k+1)sv_2}{s^2 + (1-x)^2} ds + \right. \\ & \left. + \int_1^{-1} \frac{2\mu(k+1)(s-x)v_3 - h[2kf_{31} + 2\mu(k-1)u_3]}{(s-x)^2 + h^2} ds + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \int_h^0 \frac{2\mu(k+1)sv_4 - x[2kf_{41} + 2\mu(k-1)u_4]}{(s-x)^2 + h^2} ds \right\} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \left\{ - \int_0^h \frac{4s(1-x)^2 (f_{22} + 2\mu v_2 - 2(\Gamma-x)[(1-x)^2 - s^2])(f_{21} + 2\mu v_2)}{[s^2 + (1-x)^2]^2} ds + \right. \\
 & + \int_1^{-1} \frac{2h[(s-x)^2 - h^2](f_{31} + 2\mu u_3) + 4h^2(s-x)(f_{32} + 2\mu v_3)}{[(s-x)^2 + h^2]^2} ds + \\
 & \left. + \int_h^0 \frac{2x(x^2 - s^2)(f_{41} + 2\mu u_4) - 4x^2 s(f_{42} + 2\mu v_4)}{[(s+x)^2]^2} ds \right\}, \\
 & 2kf_{12}(x) = -2\mu(k-1)v_1(x) - \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)u_1}{s-x} ds + F_2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Систему (6), разрешенную относительно функций напряжений (7), выпишем для верхней части блока пород только на Γ_3 :

$$\begin{aligned}
 2kf_{13}(x) &= -2\mu(k-1)u_1(x) + \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)v_1}{s-x} ds + F_3, \\
 2kf_{33}(x) &= -2\mu(k-1)v_1(x) - \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)u_1}{s-x} ds + F_4.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично соотношениям (8), (9) из системы (6), (7), разрешенной относительно смещений, получим:

на Γ_1

$$\begin{aligned}
 4\mu u_1(x) &= (k-1)f_{11}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)f_{12}}{s-x} ds + Q_1(x), \\
 4\mu v_1(x) &= (k+1)f_{12}(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)f_{11}}{s-x} ds + Q_2(x);
 \end{aligned} \tag{10}$$

на Γ_3

$$\begin{aligned}
 4\mu u_3(x) &= (k-1)f_3(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)f_{32}}{s-x} ds + Q_3(x), \\
 4\mu v_3(x) &= (k-1)f_{32}(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(k+1)f_{31}}{s-x} ds + Q_4(x).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Для сокращения записи во втором уравнении (8), а также в системе (9) приведены только главные части, а представление о F_2 , F_3 и F_4 дает первое соотношение (8). Аналогичным образом в соотношениях (10), (11) функции Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) выписываются явно.

Схема численной реализации решения обратной задачи, связанной, например, с определением модуля Юнга в Ω и граничных условий на Γ_1 (Γ_3), выглядит так. Задав первое приближение значения модуля Юнга и первое приближение смещений на Γ_1 (Γ_3), по двум точкам из (5) получаем точку A , и из решения прямой задачи можем определить напряженно-деформи-

рованное состояние на Γ . Варьируя граничные условия на Γ_1 (Γ_3) при фиксированном первом приближении для модуля Юнга, приходим к исходному решению с заданной точностью — точка A_1 . Фиксируем последние граничные условия на Γ_1 (Γ_3) и, варьируя модуль Юнга, приходим в точку A_2 , т. е. получим второе приближение для $E = E_2$. На этом первый цикл приближений заканчивается и начинается следующий цикл до достижения заданной точности по граничным условиям и по модулю Юнга. Это первый возможный путь приближения. Вторым путем начинается от точки A_1 , когда варьируется только модуль Юнга, и приходит в точку B_1 . От точки B_1 , варьируя только граничные условия, приходим в точку B_2 . И для этого пути заканчивается первый цикл приближения и начинается следующий. Если точки A_1 и B_1 , A_2 и B_2 не совпадают, то необходимо продолжить нахождение последовательных приближений.

При формулировке любой из трех основных задач теории упругости можно прийти к аналогам систем (8), (9), либо (10), (11), либо к комбинации из этих систем в случае смешанной задачи в зависимости от метода решения. Обратная задача требует обращения прямых задач, аналогичных системам (8), (9), или (10), (11), или их комбинации.

Полученная система (6), (7) позволяет выписать точное решение любой прямой задачи в квадратурах в виде (8), (9), или (10), (11), или их комбинации и исключает регуляризацию. Как показано в [1, 10], при решении частных задач процесс получения решения последовательными приближениями всегда сходится.

Формулировка и реализация некорректных задач механики горных пород должны сказаться на развитии технологии ведения очистных работ. Технологический прорыв возможен тогда, когда происходит прорыв в фундаментальных исследованиях, который требует, с одной стороны, получения новых знаний о механизмах разрушения горных пород и структурных изменениях в них, с другой — развития математической теории интерпретации натуральных экспериментов (методов решения обратных задач) и разработки технологических приемов реализации этих схем. Эта совокупность составляет основу технологической механики горных пород — научно-технической области, интенсивно развивающейся в последние годы. Одной из особенностей технологической механики горных пород является мультидисциплинарность, и ее будущее состоит в насыщении физическим и математическим содержанием. Именно учет особенностей механических и физико-химических процессов в массиве горных пород обеспечит добычу полезных ископаемых на больших глубинах. Необходимо отметить, что новые технологические проблемы, возникающие в механике горных пород в данном направлении, рассмотрены в теоретических работах [13–16] и требуют реализации в приложениях конкретных расчетов для поиска новых технологий ведения очистных работ.

ВЫВОДЫ

Предложен метод решения некорректных многопараметрических задач на основе использования системы сингулярных интегральных уравнений, связывающих граничные значения напряжений и смещений. Возможность получения решения всех трех основных задач в квадратурах снимает вопрос о регуляризации, т. е. о необходимости доказывать существование, единственность и устойчивость решения.

Разработан алгоритм получения приближенного решения обратных задач последовательными приближениями.

Показано, что неединственность решения многопараметрических некорректных задач на первых шагах приближений может быть связана с последовательностью выбранного пути приближения. Все последовательности приближений в конечном счете сходятся к единственному решению, если не ставить вопрос о количестве итераций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Миренков В. Е.** Определение положения ослабления в целике // Изв. вузов. Горн. журн. — 2010. — № 4.
2. **Шифрин Е. И.** Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // МТТ. — 2010. — № 3.
3. **Постнов В. А.** Использование метода регуляризации Тихонова для решения задач идентификации упругих систем // МТТ. — 2010. — № 1.
4. **Баврин И. И.** Интегральные представления в кратно-круговых областях. Обратные задачи // ДАН. — 2011. — Т. 441. — № 5.
5. **Kunsish K.** Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems, Inverse problem, 1998, Vol. 14.
6. **Park H. W., Shin S., and Lee H. S.** Determination of optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua, Intern.J. numerical. methods engine, 2001, Vol. 51.
7. **Tautenhahn U., Lin Qi-nian.** Tikhonov regularization and posteriori rules for solving nonlinear ill posed problems, Inverse problems, 2003, Vol. 19.
8. **Khan A. A., Rouhani B. D.** Iterative regularization for elliptic inverse problems, J. Comput. Math. Appl., 2007, Vol. 54, No. 6.
9. **Jadamba B., Khan A.A., and Raciti F.** On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity, J. Comput. Math. Appl., 2008, Vol. 56, No. 2.
10. **Миренков В. Е.** О некоторых некорректных задачах в геомеханике // ФТПРПИ. — 2011. — № 3.
11. **Капцов В. П., Шифрин Е. И.** Идентификация плоской трещины в упругом теле с помощью инвариантных интегралов // МТТ. — 2008. — № 3.
12. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Хан Г. Н., Вандамм М.** Оценка глубины и размеров подземной полости в грунтовом массиве по конфигурации мульды сдвижения на основе решения обратной задачи // ФТПРПИ. — 2014. — № 3.
13. **Адушкин В. В., Опарин В. Н.** От явления знакопеременной реакции горных пород на динамические воздействия — к волнам маятникового типа в напряженных геосредах. Ч. III // ФТПРПИ. — 2014. — № 4.
14. **Опарин В. Н., Киряева Т. А., Гаврилов В. Ю., Шутилов Р. А., Ковчавцев А. П., Танайно А. С., Ефимов В. П., Астраханцев И. Е., Грнев И. В.** О некоторых особенностях взаимодействия между геомеханическими и физико-химическими процессами в угольных пластах Кузбасса // ФТПРПИ. — 2014. — № 2.
15. **Mirenkov V. E.** Finite stress in fracture mechanics, Engineering Fracture Mechanics, 1994, Vol. 48, No. 1.
16. **Курленя М. В., Миренков В. Е., Шутов В. А.** Особенности деформирования пород в окрестности выработки на больших глубинах // ФТПРПИ. — 2014. — № 6.

Поступила в редакцию 4/XII 2014