

УДК 517.958.539.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КАПЕЛЬ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Ю. В. Пивоваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: pivov@hydro.nsc.ru

При вычислении силы взаимодействия двух сферических капель нормальная к поверхности капли компонента тензора напряжений берется из решения соответствующей задачи теории упругости, а касательная определяется пластическими свойствами среды. Показано, что результаты проведенных расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными о характере движения капель и пределе текучести среды, окружающей капли.

Ключевые слова: упругость, пластичность, условие текучести Мизеса.

Введение. В работе [1], являющейся продолжением исследований, проведенных в [2], изучено поведение капель из вазелинового, подсолнечного и индустриального масел, находящихся в равноплотном спиртово-водном растворе, и обнаружено, что если расстояние между двумя каплями порядка их размеров, то независимо от масштаба системы происходит их медленное взаимное сближение с последующим слиянием в одну каплю. Экспериментальная установка, используемая в [1], была изолирована от внешних силовых и тепловых воздействий. В экспериментах установлено, что сближение наблюдается только в том случае, если обе капли обладают поверхностным натяжением.

В работе [3] сделано предположение, что на начальной стадии процесса сближения капель окружающая их среда, которую, следуя [1], будем называть матрицей, ведет себя как твердое тело, подчиняющееся закону Гука. Такое предположение не объясняет механизм сближения капель, так как сила, действующая на каплю со стороны матрицы, всегда равна нулю в силу уравнений равновесия внутри капли и постоянства поверхностного натяжения на ее границе. Однако из экспериментов известно, что вода, а следовательно, и спиртово-водный раствор обладают пределом текучести k_0 , значения которого находятся в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-3}$ Па. Анализ, проведенный в настоящей работе, показывает, что касательные напряжения на границе капли не могут по модулю превышать значение k_0 , в то время как ограничения на нормальные напряжения отсутствуют. Поэтому касательные напряжения необходимо скорректировать, а нормальные — оставить такими, какими они были при рассмотрении матрицы как упругой среды. Тогда если сила, обусловленная нормальными напряжениями, будет достаточно велика, чтобы преодолеть сопротивление среды, обусловленное касательными напряжениями, то капля начнет двигаться (в этом случае уравнения равновесия внутри капли становятся несовместными и их необходимо заменить уравнениями динамики капли, рассматриваемой как упругое твердое тело). Сила, разгоняющая каплю, будет действовать до тех пор, пока капля не пройдет некоторое

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00168) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2260.2008.1).

расстояние порядка размеров одной молекулы. (Этот вывод подтверждают оценки, полученные в настоящей работе.) После этого молекулярные связи, за счет которых матрица приобрела свойства твердого тела, разрушатся, некоторый объем вокруг капли станет “жидким”, и капля будет двигаться по инерции, тормозя под действием сопротивления среды, до тех пор пока не остановится. Через определенный промежуток времени на некоторой части поверхности капли матрица вновь станет “твердой”, что приведет к появлению силы, действующей на каплю. Далее процесс повторится.

В настоящей работе предлагается способ вычисления силы, действующей на каплю со стороны матрицы на начальной стадии разгона капли, в предположении, что в начальный момент времени весь объем, занимаемый матрицей, является “твердым” (т. е. в нем отсутствуют “жидкие” зоны).

1. Определение полей напряжений и перемещений в упругой среде, содержащей две капли, обладающие поверхностным натяжением. Первым этапом вычисления силы, действующей на каплю, является решение следующей задачи теории упругости: найти компоненты $T_{\alpha\beta}^k$, $\alpha\beta \in \{(RR), (R\theta), (\theta\theta), (\varphi\varphi)\}$ тензоров напряжений T^k и компоненты u_α^k , $\alpha \in \{R, \theta\}$ векторов перемещений \mathbf{u}^k (значения $k = 1, 3$ соответствуют первой и второй каплям, $k = 2$ — матрице), удовлетворяющие уравнениям теории упругости и следующим граничным условиям на поверхности первой капли:

$$\begin{aligned} T_{RR}^2 - T_{RR}^1 &= 2\gamma/R_0, & T_{R\theta}^2 - T_{R\theta}^1 &= 0, \\ u_R^2 - u_R^1 &= 0, & u_\theta^2 - u_\theta^1 &= 0, & \theta \in [0, \pi], & R = R_0. \end{aligned} \quad (1)$$

На поверхности второй капли ставятся аналогичные условия. В (1) R, θ, φ ($R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$) — местная сферическая система координат в капле (угол θ отсчитывается от оси, направленной от центра данной капли к центру другой капли); R_0, γ — радиус капли и ее поверхностное натяжение (значения R_0, γ для обеих капель полагаются одинаковыми). Рассматривается осесимметричный случай. Первое условие в (1) задает скачок нормальных напряжений, пропорциональный поверхностному натяжению капли, как это принято в классической гидродинамике. Второе условие определяет непрерывность касательных напряжений, третье и четвертое — непрерывность нормальных и касательных перемещений при переходе через границу двух сред.

Построим алгоритм определения тензоров T^k и векторов \mathbf{u}^k . При этом будем использовать альтернирующий метод Шварца, состоящий в сведении задачи в неканонической области к последовательности задач в канонических областях (внешней и внутренней частях шара). Систему двух капель заменим эквивалентной системой капля — зеркальная плоскость, в которой последняя проходит через середину отрезка, соединяющего центры капель, ортогонально ему. Такая замена удобна, так как позволяет рассматривать только одну каплю. Поля напряжений и перемещений, созданные другой каплей, соответствуют полям, созданным данной каплей и отраженным от зеркальной плоскости.

Алгоритм альтернирующего метода Шварца формально можно представить как вычисление сумм рядов:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (T_{\alpha\beta}^{k,\nu} + T_{\alpha\beta}^{k,\nu}_{\text{отр}}), & \alpha\beta &\in \{(RR), (R\theta), (\theta\theta), (\varphi\varphi)\}, \\ u_\alpha^k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\alpha^{k,\nu} + u_\alpha^{k,\nu}_{\text{отр}}), & \alpha &\in \{R, \theta\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Совокупность первых слагаемых, стоящих в скобках в формулах (2), будем называть прямым решением на ν -й итерации, совокупность вторых слагаемых — отраженным решением.

Обозначим через K_k, G_k, m_k коэффициенты объемного сжатия, модули сдвига и числа Пуассона (обратные коэффициенты Пуассона) материала капле (при $k = 1$) и матрицы (при $k = 2$).

Начальное приближение, т. е. прямое решение при $\nu = 1$, построим как решение задачи теории упругости с граничными условиями (1) для одной капли в безграничной среде. Общее решение уравнений теории упругости, не зависящее от θ , имеет вид [4]

$$\begin{aligned} T_{RR}^{1,1} = T_{\theta\theta}^{1,1} = T_{\varphi\varphi}^{1,1} &= -4G_1 A_0^1 \frac{m_1 + 1}{m_1}, & T_{R\theta}^{1,1} &= 0, \\ u_R^{1,1} &= -2A_0^1 \frac{m_1 - 2}{m_1} r, & u_\theta^{1,1} &= 0, & T_{RR}^{2,1} &= \frac{4G_2 D_0^1}{r^3}, \\ T_{\theta\theta}^{2,1} = T_{\varphi\varphi}^{2,1} &= -\frac{2G_2 D_0^1}{r^3}, & T_{R\theta}^{2,1} &= 0, & u_R^{2,1} &= -\frac{D_0^1}{r^2}, & u_\theta^{2,1} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r = R/R_0$; A_0^1, D_0^1 — произвольные постоянные. Подставляя это решение в граничные условия (1), получим систему уравнений для определения констант A_0^1, D_0^1 :

$$4G_2 D_0^1 + 4G_1 \frac{m_1 + 1}{m_1} A_0^1 = \frac{2\gamma}{R_0}, \quad -D_0^1 + 2 \frac{m_1 - 2}{m_1} A_0^1 = 0,$$

решение которой имеет вид

$$A_0^1 = \frac{\gamma}{2R_0} \frac{m_1}{2G_2(m_1 - 2) + G_1(m_1 + 1)}, \quad D_0^1 = \frac{\gamma}{R_0 G_2} \frac{1}{2 + G_1(m_1 + 1)/[G_2(m_1 - 2)]}. \quad (4)$$

Таким образом, начальное приближение определяется формулами (3), (4).

Преобразуем формулу для D_0^1 . Используя равенство [5]

$$K_k = \frac{2G_k(m_k + 1)}{3(m_k - 2)}, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

получаем

$$D_0^1 = \frac{\gamma}{R_0 G_2} \frac{m_2 - 2}{2(m_2 - 2) + (K_1/K_2)(m_2 + 1)}.$$

Пусть известно ν -е прямое решение. Построим ν -е отраженное решение, введя следующие обозначения: O — центр образа капли относительно зеркальной плоскости P , O' — центр капли, A — произвольная точка. Пусть $r, \theta, 0$ — сферические координаты точки A относительно точки O , $r', \theta', 0$ — сферические координаты точки A относительно точки O' , r_1 — расстояние между центрами капель, $\alpha = \pi - \theta'$. В качестве единицы измерения величин r, r', r_1 примем радиус капли R_0 . Из рис. 1 следует, что

$$r = (r_1^2 + 2r_1 r' \cos \alpha + r'^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{r_1 + r' \cos \alpha}{r}, \quad \sin \theta = \frac{r' \sin \alpha}{r}.$$

В системе (r, θ, φ) единичные орты $\mathbf{i}_{r'}, \mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\varphi$ координатных направлений r', α, φ имеют следующие координаты:

$$\mathbf{i}_{r'} = (\cos \alpha', \sin \alpha', 0), \quad \mathbf{i}_\alpha = (-\sin \alpha', \cos \alpha', 0), \quad \mathbf{i}_\varphi = (0, 0, 1).$$

Здесь $\alpha' = \alpha - \theta$. Тензор напряжений имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} T_{RR} & T_{R\theta} & 0 \\ T_{R\theta} & T_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & T_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}.$$

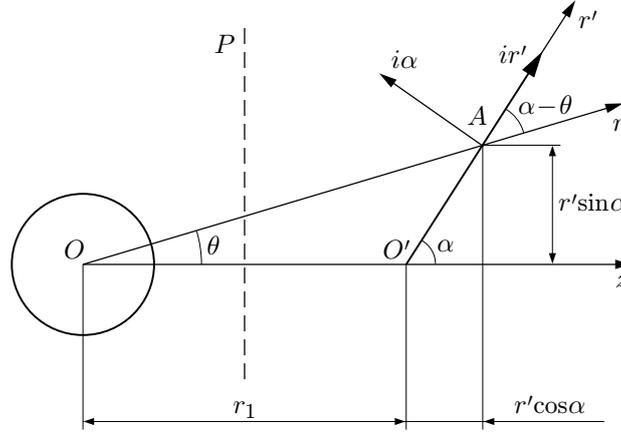


Рис. 1. Схема задачи и системы координат

Компоненты этого тензора в системе координат (r', α, φ) вычисляются по формулам

$$T_{R'R'} = \mathbf{i}_{r'} \cdot T \cdot \mathbf{i}_{r'}, \quad T_{R'\alpha} = \mathbf{i}_{r'} \cdot T \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad T_{\alpha\alpha} = \mathbf{i}_\alpha \cdot T \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad T_{\varphi\varphi} = \mathbf{i}_\varphi \cdot T \cdot \mathbf{i}_\varphi. \quad (6)$$

Орты $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ направлений r, θ имеют координаты $\mathbf{i}_r = (1, 0, 0), \mathbf{i}_\theta = (0, 1, 0)$. В системе координат (r', α, φ) компоненты вектора перемещений записываются в следующем виде:

$$u_{r'} = u_r \cdot \mathbf{i}_{r'} \cdot \mathbf{i}_r + u_\theta \cdot \mathbf{i}_{r'} \cdot \mathbf{i}_\theta, \quad u_\alpha = u_r \cdot \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_r + u_\theta \cdot \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\theta, \quad (7)$$

причем

$$\cos \alpha' = \frac{r' + r_1 \cos \alpha}{r}, \quad \sin \alpha' = \frac{r_1 \sin \alpha}{r}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), (7) и выполняя замену $\theta' = \pi - \alpha$, получим искомые формулы для вычисления отраженного решения:

$$\begin{aligned} T_{RR}^{k,\nu} \text{отр} &= T_{RR}^{4-k,\nu} - (T_{RR}^{4-k,\nu} - T_{\theta\theta}^{4-k,\nu})r_1^2 \sin^2(\theta'/r^2) + 2T_{R\theta}^{4-k,\nu} r_1 \sin \theta' (r' - r_1 \cos \theta')/r^2, \\ T_{\theta\theta}^{k,\nu} \text{отр} &= T_{\theta\theta}^{4-k,\nu} + (T_{RR}^{4-k,\nu} - T_{\theta\theta}^{4-k,\nu})r_1^2 \sin^2(\theta'/r^2) - 2T_{R\theta}^{4-k,\nu} r_1 \sin \theta' (r' - r_1 \cos \theta')/r^2, \\ T_{\varphi\varphi}^{k,\nu} \text{отр} &= T_{\varphi\varphi}^{4-k,\nu}, \\ T_{R\theta}^{k,\nu} \text{отр} &= (T_{RR}^{4-k,\nu} - T_{\theta\theta}^{4-k,\nu})r_1 \sin \theta' (r' - r_1 \cos \theta')/r^2 - T_{R\theta}^{4-k,\nu} (1 - 2r_1^2 \sin^2(\theta'/r^2)), \\ u_{R \text{отр}}^{k,\nu} &= (u_R^{4-k,\nu} (r' - r_1 \cos \theta') + u_\theta^{4-k,\nu} r_1 \sin \theta')/r, \\ u_{\theta \text{отр}}^{k,\nu} &= (u_R^{4-k,\nu} r_1 \sin \theta' - u_\theta^{4-k,\nu} (r' - r_1 \cos \theta'))/r, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Аргументами левых частей формул (9) являются переменные r', θ' , аргументами правых частей — переменные r, θ :

$$r = (r_1^2 - 2r_1 r' \cos \theta' + r'^2)^{1/2}, \quad \theta = \arccos [(r_1 - r' \cos \theta')/r].$$

Следует отметить, что при $k = 1$ индекс в правых частях формул (9) имеет значение $k' = 4 - k = 3$. Этому индексу поставим в соответствие функции, строящиеся по формулам внешнего решения для капли и имеющие константы G_1, m_1 материала другой капли.

Таким образом, построение отраженного решения завершено.

Выведем формулы для вычисления $(\nu + 1)$ -го прямого решения по ν -му отраженному. Для этого потребуем, чтобы сумма ν -го отраженного и $(\nu + 1)$ -го прямого решений удовлетворяла однородным условиям (1):

$$T_{RR}^{2,\nu+1} - T_{RR}^{1,\nu+1} = T_{RR \text{отр}}^{1,\nu} - T_{RR \text{отр}}^{2,\nu}, \quad T_{R\theta}^{2,\nu+1} - T_{R\theta}^{1,\nu+1} = T_{R\theta \text{отр}}^{1,\nu} - T_{R\theta \text{отр}}^{2,\nu},$$

$$\begin{aligned}
 u_R^{2,\nu+1} - u_R^{1,\nu+1} &= u_{R \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{R \text{ отп}}^{2,\nu}, \\
 u_\theta^{2,\nu+1} - u_\theta^{1,\nu+1} &= u_{\theta \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{\theta \text{ отп}}^{2,\nu}, \quad r = 1, \quad \theta \in [0, \pi]
 \end{aligned} \tag{10}$$

(штрихи у переменных r, θ отраженных функций опущены).

Правые части первого и третьего уравнений системы (10) разложим по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$, а правые части второго и четвертого уравнений — по функциям $dP_n(\cos \theta)/d\theta$ [4]:

$$\begin{aligned}
 T_{RR \text{ отп}}^{1,\nu} - T_{RR \text{ отп}}^{2,\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^\nu P_n(\cos \theta), & T_{R\theta \text{ отп}}^{1,\nu} - T_{R\theta \text{ отп}}^{2,\nu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^\nu \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 u_{R \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{R \text{ отп}}^{2,\nu} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^\nu P_n(\cos \theta), & u_{\theta \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{\theta \text{ отп}}^{2,\nu} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^\nu \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^\nu &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi (T_{RR \text{ отп}}^{1,\nu} - T_{RR \text{ отп}}^{2,\nu}) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\
 \tau_n^\nu &= \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi (T_{R\theta \text{ отп}}^{1,\nu} - T_{R\theta \text{ отп}}^{2,\nu}) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta d\theta, \\
 \xi_n^\nu &= - \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi (u_{R \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{R \text{ отп}}^{2,\nu}) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\
 \eta_n^\nu &= - \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi (u_{\theta \text{ отп}}^{1,\nu} - u_{\theta \text{ отп}}^{2,\nu}) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta d\theta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Каждую из функций, совокупность которых определяет прямое решение, также разложим в ряды при произвольном r [4]:

$$\begin{aligned}
 T_{RR}^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{RRn}^{k,\nu+1}(r) P_n(\cos \theta), & T_{R\theta}^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{R\theta n}^{k,\nu+1}(r) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 u_R^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{Rn}^{k,\nu+1}(r) P_n(\cos \theta), & u_\theta^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}^{k,\nu+1}(r) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 T_{\theta\theta}^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{\theta\theta 1n}^{k,\nu+1}(r) P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{\theta\theta 2n}^{k,\nu+1}(r) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta, \\
 T_{\varphi\varphi}^{k,\nu+1}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{\varphi\varphi 1n}^{k,\nu+1}(r) P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{\varphi\varphi 2n}^{k,\nu+1}(r) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta,
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Функции, стоящие под знаками сумм, являются частными решениями уравнений теории упругости, если выполняются равенства [4]

$$T_{RRn}^{1,\nu+1}(r) = 2G_1(A_n^{\nu+1}(n+1)(n^2 - n - 2 - 2/m_1)r^n + B_n^{\nu+1}n(n-1)r^{n-2}),$$

$$\begin{aligned}
T_{R\theta n}^{1,\nu+1}(r) &= 2G_1(A_n^{\nu+1}(n^2 + 2n - 1 + 2/m_1)r^n + B_n^{\nu+1}(n - 1)r^{n-2}), \\
u_{Rn}^{1,\nu+1}(r) &= A_n^{\nu+1}(n + 1)(n - 2 + 4/m_1)r^{n+1} + B_n^{\nu+1}nr^{n-1}, \\
u_{\theta n}^{1,\nu+1}(r) &= A_n^{\nu+1}(n + 5 - 4/m_1)r^{n+1} + B_n^{\nu+1}r^{n-1}, \\
T_{\theta\theta 1n}^{1,\nu+1}(r) &= -2G_1(A_n^{\nu+1}(n^2 + 4n + 2 + 2/m_1)(n + 1)r^n + B_n^{\nu+1}n^2r^{n-2}), \\
T_{\theta\theta 2n}^{1,\nu+1}(r) &= -2G_1(A_n^{\nu+1}(n + 5 - 4/m_1)r^n + B_n^{\nu+1}r^{n-2}), \\
T_{\varphi\varphi 1n}^{1,\nu+1}(r) &= 2G_1(A_n^{\nu+1}(n - 2 - 2/m_1 - 4n/m_1)(n + 1)r^n + B_n^{\nu+1}nr^{n-2}), \\
T_{\varphi\varphi 2n}^{1,\nu+1}(r) &= 2G_1(A_n^{\nu+1}(n + 5 - 4/m_1)r^n + B_n^{\nu+1}r^{n-2}), \tag{14} \\
T_{RRn}^{2,\nu+1}(r) &= 2G_2(-C_n^{\nu+1}n(n^2 + 3n - 2/m_2)/r^{n+1} + D_n^{\nu+1}(n + 1)(n + 2)/r^{n+3}), \\
T_{R\theta n}^{2,\nu+1}(r) &= 2G_2(C_n^{\nu+1}(n^2 - 2 + 2/m_2)/r^{n+1} - D_n^{\nu+1}(n + 2)/r^{n+3}), \\
u_{Rn}^{2,\nu+1}(r) &= C_n^{\nu+1}n(n + 3 - 4/m_2)/r^n - D_n^{\nu+1}(n + 1)/r^{n+2}, \\
u_{\theta n}^{2,\nu+1}(r) &= C_n^{\nu+1}(-n + 4 - 4/m_2)/r^n + D_n^{\nu+1}/r^{n+2}, \\
T_{\theta\theta 1n}^{2,\nu+1}(r) &= 2G_2(C_n^{\nu+1}n(n^2 - 2n - 1 + 2/m_2)/r^{n+1} - D_n^{\nu+1}(n + 1)^2/r^{n+3}), \\
T_{\theta\theta 2n}^{2,\nu+1}(r) &= -2G_2(C_n^{\nu+1}(-n + 4 - 4/m_2)/r^{n+1} + D_n^{\nu+1}/r^{n+3}), \\
T_{\varphi\varphi 1n}^{2,\nu+1}(r) &= 2G_2(C_n^{\nu+1}n(n + 3 - 4n/m_2 - 2/m_2)/r^{n+1} - D_n^{\nu+1}(n + 1)/r^{n+3}), \\
T_{\varphi\varphi 2n}^{2,\nu+1}(r) &= 2G_2(C_n^{\nu+1}(-n + 4 - 4/m_2)/r^{n+1} + D_n^{\nu+1}/r^{n+3}).
\end{aligned}$$

При $k = 3$ функции $T_{RRn}^{k,\nu+1}(r), \dots, T_{\varphi\varphi 2n}^{k,\nu+1}(r)$ строятся по тем же формулам, что и при $k = 2$, но константы G_2, m_2 в этих формулах нужно заменить на константы G_1, m_1 соответственно.

Подставляя (11), (13), (14) в (10), получаем следующие системы уравнений для определения констант $A_n^{\nu+1}, B_n^{\nu+1}, C_n^{\nu+1}, D_n^{\nu+1}$:

$$\begin{aligned}
-4G_1(m_1 + 1)A_0^{\nu+1}/m_1 + 4G_2D_0^{\nu+1} &= \sigma_0^\nu, \\
2(m_1 - 2)A_0^{\nu+1}/m_1 - D_0^{\nu+1} &= -\xi_0^\nu, \quad \nu = \overline{1, \infty}; \tag{15} \\
-2G_1(n + 1)(n^2 - n - 2 - 2/m_1)A_n^{\nu+1} - 2G_1n(n - 1)B_n^{\nu+1} - \\
- 2G_2n(n^2 + 3n - 2/m_2)C_n^{\nu+1} + 2G_2(n + 1)(n + 2)D_n^{\nu+1} &= \sigma_n^\nu, \\
-2G_1(n^2 + 2n - 1 + 2/m_1)A_n^{\nu+1} - 2G_1(n - 1)B_n^{\nu+1} + \\
+ 2G_2(n^2 - 2 + 2/m_2)C_n^{\nu+1} - 2G_2(n + 2)D_n^{\nu+1} &= \tau_n^\nu, \tag{16} \\
-(n + 1)(n - 2 + 4/m_1)A_n^{\nu+1} - nB_n^{\nu+1} + n(n + 3 - 4/m_2)C_n^{\nu+1} - (n + 1)D_n^{\nu+1} &= -\xi_n^\nu, \\
-(n + 5 - 4/m_1)A_n^{\nu+1} - B_n^{\nu+1} + (-n + 4 - 4/m_2)C_n^{\nu+1} + D_n^{\nu+1} &= -\eta_n^\nu, \\
n = \overline{1, \infty}, \quad \nu = \overline{1, \infty}.
\end{aligned}$$

После определения этих констант из систем (15), (16) прямое решение для $(\nu + 1)$ -й итерации строится по формулам (13), (14).

При $k = 1, k' = 4 - k = 3$ функции в правых частях формул (9) должны вычисляться по формулам (3), (4), (13), (14) при $k = 2$, но константы G_2, m_2 в формулах (3), (14) нужно

заменить на константы G_1, m_1 , так как рассматриваются внешние по отношению к капле поля напряжений и перемещений, имеющие модуль сдвига и число Пуассона материала другой капли.

Итак, построение алгоритма вычисления тензоров T^k и векторов \mathbf{u}^k , $k = 1, 2$ завершено.

2. Аналитическое приближение. Ниже показано, что сила, действующая на каплю на начальном этапе ее разгона, в проекции на ось z (см. рис. 1) равна

$$F'_z = F_{z1} + \pi^2 R_0^2 k_0,$$

где

$$F_{z1} = -2\pi R_0^2 \int_0^\pi T_{RR}^2 \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (17)$$

при $R = R_0$ — проекция на ось z силы, созданной нормальными напряжениями на поверхности капли; k_0 — положительное касательное напряжение, равное пределу текучести матрицы. Из эксперимента известно, что при $r_1 < 3,2$ сила F'_z отрицательна, т. е. капли притягиваются. Выполним аналитическую оценку величины F_{z1} . Для этого поставим в соответствие рядам (2) ряд

$$F_{z1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{z1n}^\nu,$$

где индекс n означает номер гармоники в разложении решения по полиномам Лежандра, и вычислим старший член этого ряда.

Подставляя (3) в (9) при $k = 2$, получим

$$\begin{aligned} T_{RR \text{ отр}}^{2,1}(1, \theta) &= 2D_0^1 G_2 \left(2 - \frac{3r_1^2 \sin^2 \theta}{r_1^2 + 1 - 2r_1 \cos \theta} \right) \frac{1}{(r_1^2 + 1 - 2r_1 \cos \theta)^{3/2}}, \\ T_{R\theta \text{ отр}}^{2,1}(1, \theta) &= 6D_0^1 G_2 \left(\frac{3r_1^2 \sin^2 \theta}{r_1^2 + 1 - 2r_1 \cos \theta} - 1 \right) \frac{1}{(r_1^2 + 1 - 2r_1 \cos \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для этого решения интеграл (17) равен нулю. Следовательно, данное приближение не дает силы притяжения капель. В следующем приближении имеем

$$\begin{aligned} T_{RR \text{ отр}}^{1,1} - T_{RR \text{ отр}}^{2,1} &= (G_1/G_2 - 1)T_{RR \text{ отр}}^{2,1}, & T_{R\theta \text{ отр}}^{1,1} - T_{R\theta \text{ отр}}^{2,1} &= (G_1/G_2 - 1)T_{R\theta \text{ отр}}^{2,1}, \\ u_{R \text{ отр}}^{1,1} - u_{R \text{ отр}}^{2,1} &= 0, & u_{\theta \text{ отр}}^{1,1} - u_{\theta \text{ отр}}^{2,1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (18), (19) в (12), получим

$$\sigma_0^1 = \xi_0^1 = \sigma_1^1 = \tau_1^1 = \xi_1^1 = \eta_1^1 = 0.$$

Следовательно,

$$A_0^2 = D_0^2 = A_1^2 = B_1^2 = C_1^2 = D_1^2 = 0.$$

Далее вычисляем значения

$$\sigma_2^1 = 2D_0^1 G_2 (G_1/G_2 - 1) r_1^{-3}, \quad \tau_2^1 = D_0^1 G_2 (G_1/G_2 - 1) r_1^{-3}, \quad \xi_2^1 = \eta_2^1 = 0.$$

Подставляя эти значения в систему (16) и решая ее, находим

$$C_2^2 = -\frac{5}{4} \frac{m_2 \tau_2^1}{(7G_2 + 8G_1)m_2 - 5(G_2 + 2G_1)}, \quad D_2^2 = \frac{6C_2^2}{5}, \quad A_2^2 = 0, \quad B_2^2 = \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{m_2} \right) C_2^2.$$

Используя формулы (14), (13), (9), (17), получим

$$F_{z1}^a = -\frac{48\pi R_0\gamma(G_1/G_2 - 1)(m_2 - 2)(m_2 + 1)r_1^{-7}}{(2m_2 - 4 + (K_1/K_2)(m_2 + 1))((7 + 8G_1/G_2)m_2 - 5 - 10G_1/G_2)}. \quad (20)$$

Величина F_{z1}^a , обуславливающая некоторую силу притяжения капль при $G_1/G_2 > 1$ и достаточно малом r_1 , дает информацию о знаке F_{z1} .

3. Вычисление силы, действующей на каплю. Материал матрицы является слабосжимаемым (коэффициент объемного сжатия $K_2 = 2 \cdot 10^9$ Па). Ниже определяются значения вторых инвариантов тензора скоростей деформаций и девиатора тензора напряжений, а также вид уравнения неразрывности матрицы. Так как учет сжимаемости среды дает пренебрежимо малые поправки в значения соответствующих величин, для простоты будем считать матрицу несжимаемой средой. (При определении полей напряжений и перемещений в п. 1 предположение о сжимаемости материала матрицы было существенным, так как для несжимаемого материала матрицы эти поля в ней тождественно равны нулю.)

Тензоры напряжений T^1 в капле и T^2 в матрице на поверхности S капли связаны граничным условием (см. (1))

$$T^2 \cdot \mathbf{n} = (T^1 + (2\gamma/R_0)I) \cdot \mathbf{n},$$

где I — единичный тензор; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S . В рамках теории упругости сила, действующая на каплю, равна

$$\mathbf{F} = \iint_S T^2 \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left(T^1 + I \frac{2\gamma}{R_0} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \left(\operatorname{div} T^1 + \frac{2\gamma}{R_0} \operatorname{div} I \right) dV = 0, \quad (21)$$

так как

$$\operatorname{div} T^1 = 0$$

в силу уравнений равновесия; дивергенция единичного тензора I также равна нулю. В (21) V — объем, занятый каплей. Переход от поверхностного интеграла к объемному осуществлен по формуле Гаусса — Остроградского.

Рассмотрим равенство (21) в цилиндрической системе координат (\tilde{r}, φ, z) , связанной со сферической системой координат (R, θ, φ) , введенной в п. 1:

$$\tilde{r} = R \sin \theta, \quad z = -R \cos \theta.$$

Тогда

$$\mathbf{F} = (0, 0, F_z),$$

где

$$F_z = F_{z1} + F_{z2} = 0, \quad (22)$$

F_{z1} , F_{z2} — проекции на ось z интеграла по поверхности капли от нормальных и касательных напряжений соответственно:

$$F_{z1} = -2\pi R_0^2 \int_0^\pi T_{RR}^2 \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad F_{z2} = 2\pi R_0^2 \int_0^\pi T_{R\theta}^2 \sin^2 \theta d\theta, \quad R = R_0. \quad (23)$$

Пусть среда является пластической, т. е. обладает некоторым пределом текучести k_0 . Простейшей моделью такой среды является модель Бингама [6, 7]. Как и выше, каплю будем считать упругим твердым телом, если ее предел текучести достаточно велик. В рамках такой модели область, занятая матрицей, делится на две части: “жидкую”, в которой

величина $|D|$ строго больше нуля ($|D|^2 = \sum_{i,j} D_{ij}^2$; D — тензор скоростей деформаций), и “твердую”, в которой $|D| \equiv 0$. При этом тензор напряжений имеет вид

$$P = -pI + s,$$

где p — гидродинамическое давление; I — единичный тензор; s — девиатор тензора P . Постулируется следующая связь s и D :

$$s_{ij} = (2\rho_0\nu_0 + \sqrt{2}k_0/|D|)D_{ij} \quad (24)$$

(ρ_0 , ν_0 — плотность и кинематическая вязкость материала матрицы). Возводя равенство (24) в квадрат и проводя суммирование по индексам i, j , после сокращений при $|D| \rightarrow 0$ получаем условие текучести Мизеса, выполняющееся на границе “жидкой” зоны:

$$|s|^2 = 2k_0^2. \quad (25)$$

Здесь

$$|s|^2 = \sum_{i,j} s_{ij}^2.$$

В осесимметричном случае в сферических координатах условие (25) принимает вид

$$s_{RR}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{\varphi\varphi}^2 + s_{R\theta}^2 + s_{\theta R}^2 = 2k_0^2. \quad (26)$$

Предположим, что поле скоростей в матрице тождественно равно нулю, но на некоторой части поверхности капли выполняется условие (26). Так как в этом случае диагональные компоненты тензора s обращаются в нуль, а недиагональные равны между собой в силу его симметрии, выражение (26) имеет вид

$$|s_{R\theta}| = |P_{R\theta}| = k_0, \quad \theta \in U, \quad R = R_0,$$

где U — некоторое множество.

Согласно теории жидкости Бингама тензор напряжений P в “твердой” ее части может быть неопределенным, т. е. может являться многозначной функцией [6]. Касательная компонента тензора P находится в диапазоне

$$-k_0 \leq P_{R\theta} \leq k_0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad R = R_0.$$

Возникает вопрос: каким образом можно получить информацию о свойствах функции $P_{RR}(\theta)$ при $R = R_0$? Предлагается следующий ответ: так как реологическая модель жидкости Бингама содержит упругий элемент, изображаемый на реологических схемах пружиной [8], то нормальные напряжения на поверхности капли в покоящейся матрице должны быть взяты из решения задачи теории упругости, рассмотренной в п. 1:

$$P_{RR} = T_{RR}^2, \quad \theta \in [0, \pi], \quad R = R_0. \quad (27)$$

Предположим, что капля начала двигаться. При переходе в движущуюся систему отсчета тензор скоростей деформаций не изменяется, поэтому движение капли можно рассматривать в связанной с ее центром сферической системе координат. В осесимметричном случае ненулевыми компонентами тензора скоростей деформаций являются следующие [9]:

$$\begin{aligned} D_{RR} &= \frac{\partial u}{\partial R}, & D_{R\theta} &= D_{\theta R} = \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ D_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{R}, & D_{\varphi\varphi} &= \frac{v}{R} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u}{R} \end{aligned} \quad (28)$$

(u, v — компоненты скорости по направлениям R, θ).

Рассматривая задачу в системе координат, связанной с каплей, можно сделать вывод, что на ее поверхности должны выполняться условия прилипания:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (29)$$

Из этих условий и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{R} + \frac{v}{R} \operatorname{ctg} \theta = 0$$

следует

$$\frac{\partial u}{\partial R} = 0, \quad R = R_0, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (30)$$

В результате подстановки (29), (30) в (28) на поверхности капли имеют место равенства

$$D_{RR} = D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = 0, \quad D_{R\theta} = D_{\theta R} = \frac{\partial v}{\partial R}.$$

Тогда

$$|D| = \left(\left| \sum_{i,j} D_{ij}^2 \right| \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left| \frac{\partial v}{\partial R} \right|,$$

т. е. тензор P имеет компоненты

$$\begin{aligned} P_{RR} = P_{\theta\theta} = P_{\varphi\varphi} &= -p, \\ P_{R\theta} = P_{\theta R} &= 2\rho_0\nu_0 \frac{\partial v}{\partial R} + k_0 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial v}{\partial R} \right) \equiv s_{R\theta}, \quad R = R_0, \quad \theta \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (31)$$

Введем функцию $\xi(t)$, означающую долю неразрушенных молекулярных связей, за счет которых матрица приобретает свойства твердого тела, и будем считать, что

$$P_{RR} = \xi(t)T_{RR}^2 - (1 - \xi(t))p, \quad \theta \in [0, \pi], \quad R = R_0.$$

На начальной стадии разгона капли, когда функция $\xi(t)$ близка к единице, выполняется равенство (27). Далее, можно показать, что если на поверхности капли зоны возвратного течения отсутствуют, то $\operatorname{sign}(\partial v/\partial R) = -\operatorname{sign}(F_{z1})$, где величина F_{z1} определена в (23). Тогда на начальном этапе разгона капли, когда скорости еще малы, равенство (31) принимает вид

$$P_{R\theta} = -k_0 \operatorname{sign}(F_{z1}).$$

Сила, обусловленная касательными напряжениями, равна

$$F'_{z2} = 2\pi R_0^2 \int_0^\pi P_{R\theta} \sin^2 \theta d\theta = -\pi^2 R_0^2 k_0 \operatorname{sign}(F_{z1}).$$

Таким образом, если капля начала двигаться, то сила, действующая на нее, определяется по формуле

$$F'_z = F_{z1} - \pi^2 R_0^2 k_0 \operatorname{sign}(F_{z1}).$$

Члены, входящие в правую часть этого выражения, имеют разные знаки. Если доминирует первый член, то капля будет ускоряться, если второй, то она будет тормозить. В последнем случае при малейшем отклонении капли от положения равновесия будет возникать сила,

возвращающая каплю в положение, соответствующее предыдущему равновесному состоянию. Поэтому капля может начать двигаться, только если выполняется неравенство

$$|F_{z1}| > \pi^2 R_0^2 k_0.$$

Итак, сила F'_z , действующая на каплю на начальном этапе ее разгона, определяется следующим образом:

$$F'_z = \begin{cases} 0, & |F_{z1}| \leq \pi^2 R_0^2 k_0, \\ F_{z1} - \pi^2 R_0^2 k_0 \operatorname{sign}(F_{z1}), & |F_{z1}| > \pi^2 R_0^2 k_0. \end{cases} \quad (32)$$

4. Результаты расчетов. Для реализации описанного алгоритма составлена и реализована компьютерная программа. Для тестирования этой программы вычислялись погрешности выполнения разностных аналогов уравнений равновесия в напряжениях и перемещениях в некоторых точках внутренней и внешней частей капли и на ее границе. При шаге по r , равном 0,0001, и шаге по θ , равном $\pi/10\,000$, с использованием 30 гармоник и 20 итераций при $r_1 = 3,2$, $K_1 = 1/6 \cdot 10^{10}$ Па, $K_2 = 2 \cdot 10^9$ Па, $m_1 = 4$, $m_2 = 2,6$, $G_1 = 10^9$ Па, $G_2 = 5 \cdot 10^8$ Па, $R_0 = 0,005$ м, $\gamma = 0,02$ Н/м (значения этих параметров обоснованы ниже) погрешности выполнения уравнений равновесия в напряжениях, отнесенные к максимуму функции $|T_{RR}^2|$, лежали в диапазоне $10^{-11} \div 10^{-7}$, а погрешности выполнения уравнений равновесия в перемещениях, отнесенные к максимуму $|u_R^2|$, — в диапазоне $10^{-10} \div 10^{-5}$. Большая величина последних объясняется более высоким порядком уравнений равновесия в перемещениях по сравнению с уравнениями равновесия в напряжениях. Интегралы (12) вычислялись методом Симпсона с использованием 2000 разбиений отрезка $[0, \pi]$. Вычисленные и отнесенные к максимумам соответствующих функций погрешности выполнения условий (1) находились в диапазоне $10^{-11} \div 10^{-9}$. Определялись также погрешность выполнения условия равенства нулю суммы интегралов от нормальных и касательных напряжений по поверхности капли (см. формулы (22), (23)) и погрешность вычисления значения F_{z1} при использовании двух итераций и трех гармоник (нулевой, первой и второй) по сравнению с погрешностью, возникающей при вычислении по формуле (20). Обе погрешности равны $5 \cdot 10^{-12}$.

Для проведения расчетов необходимо задать предел текучести матрицы k_0 , коэффициенты объемного сжатия K_k , модули сдвига G_k и числа Пуассона (обратные коэффициенты Пуассона) $m_k \in [2, \infty)$ (значение $m_k = 2$ соответствует несжимаемой среде) материала капли (при $k = 1$) и матрицы (при $k = 2$). Эти величины не являются независимыми, поскольку они связаны равенствами (5).

Выберем исходные данные задачи. В [10] приведены коэффициенты сжимаемости воды ($\chi_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ атм $^{-1}$) и различных масел. При атмосферном давлении значения коэффициентов сжимаемости различных масел близки к значению $\chi_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ атм $^{-1}$. Переходя к системе СИ, с использованием формулы $K_k = 1/\chi_k$ ($k = 1, 2$) получаем $K_1 = 1/6 \cdot 10^{10}$ Па, $K_2 = 2 \cdot 10^9$ Па.

Возникает вопрос: какие нужно задавать значения модулей сдвига и чисел Пуассона? В экспериментальной работе [11] в результате исследования затухающего течения воды по инерции в цилиндрическом сосуде получено значение ее модуля сдвига, равное 10^{-6} Па. В работе [12], в которой экспериментально изучалось высокочастотное (22 Гц и более) движение цилиндрической оболочки из стальной фольги вокруг неподвижного цилиндрического каркаса с жидкостью, содержащейся в малом зазоре между каркасом и оболочкой, и без жидкости, на основе сравнения амплитудно-частотных характеристик двух процессов получены модули сдвига воды ($G_2 = 18$ Па) и вазелинового масла ($G_1 = 31$ Па). Таким образом, модуль сдвига воды существенно зависит от характера изучаемого процесса: при увеличении частоты колебаний от значения, близкого к нулю, до 22 Гц значение G_2 увеличивается более чем на семь порядков. Заметим, что в обоих экспериментах изучались про-

цессы, в которых деформации составляли порядка единицы. В задаче о сближении капель перемещения под действием их поверхностного натяжения составляют величину порядка размера одной молекулы, а соответствующие им деформации — порядка $10^{-8} \div 10^{-7}$, т. е. очень малы. Даже при $G_2 = 18$ Па с использованием формулы (5) получаем $m_2 - 2 \approx 10^{-8}$. Тогда при $\gamma = 0,02$ Н/м [3], $R_0 = 0,005$ м, $r_1 = 3,2$, $G_1/G_2 = 2$ (приближенное значение для приведенных выше данных работы [12]) с помощью (20) находим $F_{z1} \approx -2,5 \cdot 10^{-15}$ Н. Из (32) следует

$$F_{z1} + \pi^2 R_0^2 k_0 < 0.$$

Из эксперимента известно, что при $r_1 = 3,2$ капли притягиваются. Тогда получаем оценку

$$k_0 < -F_{z1}/(\pi^2 R_0^2) \sim 10^{-11} \text{ Па.}$$

Между тем из других экспериментов известно, что k_0 лежит в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-3}$ Па. Поэтому, для того чтобы объяснить экспериментальные данные, нужно потребовать, чтобы значение $m_2 - 2$ составляло порядка единицы. При таких малых деформациях спиртоводный раствор ведет себя как обычное твердое тело. Эти выводы справедливы и для материала капли. Характерными для твердых тел являются значения числа Пуассона $1/\nu \geq 3 \div 4$.

В качестве исходных значений примем приведенные выше значения r_1 , R_0 , γ , G_1/G_2 и обозначим через

$$k_{0\max} = -F_{z1}/(\pi^2 R_0^2) \quad (33)$$

верхнюю грань значений k_0 , при которых $F'_z < 0$. Задавая m_k , величину m_{3-k} можно определить из соотношения (5):

$$m_{3-k} = \left(2 \frac{G_k}{G_{3-k}} \frac{K_{3-k}}{K_k} - \frac{m_k - 2}{m_k + 1} \right) / \left(\frac{G_k}{G_{3-k}} \frac{K_{3-k}}{K_k} - \frac{m_k - 2}{m_k + 1} \right), \quad k = 1, 2. \quad (34)$$

При этом, если $G_k K_{3-k}/(G_{3-k} K_k) < 1$, для существования положительного значения m_{3-k} необходимо выполнение условия

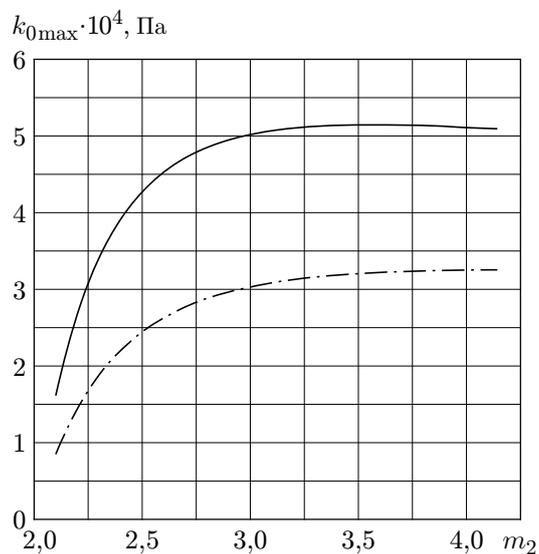
$$m_k < m_{k\max}, \quad m_{k\max} = \left(2 + \frac{G_k}{G_{3-k}} \frac{K_{3-k}}{K_k} \right) / \left(1 - \frac{G_k}{G_{3-k}} \frac{K_{3-k}}{K_k} \right).$$

На рис. 2 показана зависимость $k_{0\max}$ от m_2 , полученная в расчетах при указанных выше данных. При этом значение $m_{2\max}$ составляет $29/7$. Значения m_1 вычислялись по формуле (34). Расчет велся начиная со значения $m_2 = 2,1$. Видно, что во всем рассматриваемом диапазоне значений m_2 величина $k_{0\max}$ находится в диапазоне, соответствующем экспериментальным данным ($10^{-4} \div 10^{-3}$ Па), а аналитическое приближение дает значение $k_{0\max}$, которое не более чем в два раза меньше значения, полученного в численном расчете. Погрешность вычисления $k_{0\max}$, обусловленная неучетом членов с $\nu \geq 6$, составляет порядка 10^{-3} %.

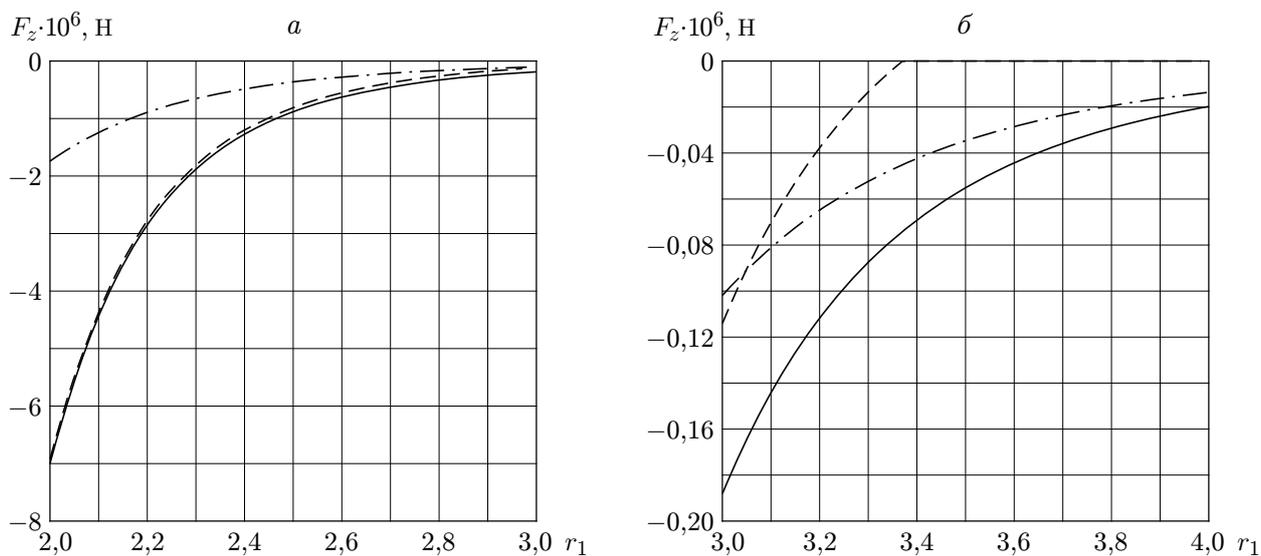
Для проведения дальнейших расчетов принимались значения $m_2 = 2,6$ (при этом $m_1 = 4$, $k_{0\max} = 4,529 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_2 = 5 \cdot 10^8$ Па, $G_1 = 10^9$ Па), $k_0 = 0,0003$ Па (среднее геометрическое минимального и максимального значений).

На рис. 3 приведены значения функций F_{z1} , F'_z и F_{z1}^a (см. п. 3 и формулу (20)) в зависимости от r_1 . При $r_1 \approx 3,36$ $F'_z = 0$, т. е. при этом значении r_1 капля не может начать двигаться. При увеличении r_1 отношение F_{z1}/F_{z1}^a уменьшается от значения $F_{z1}/F_{z1}^a = 4$ при $r_1 = 2$ до значения $F_{z1}/F_{z1}^a = 1,47$ при $r_1 = 4$.

Проведено исследование зависимостей рассматриваемых характеристик от отношения G_1/G_2 . При $G_1/G_2 > 1$ $m_2 = 2,6$, а значение m_1 вычислялось по формуле (34). При $G_1/G_2 < 1$ (в [12] такое отношение получено для гидравлического масла с $G_1 = 13$ Па и

Рис. 2. Зависимость $k_{0\max}$ от m_2 :

сплошная линия — результаты расчета по численной модели; штрихпунктирная — результаты расчета по приближенной формуле (20)

Рис. 3. Зависимости функций F_{z1} (сплошные линии), F'_z (штриховые) и F_{z1}^a (штрихпунктирные) от величины r_1 :

a — капли соприкасаются; b — расстояние между перифериями капель равно двум их радиусам

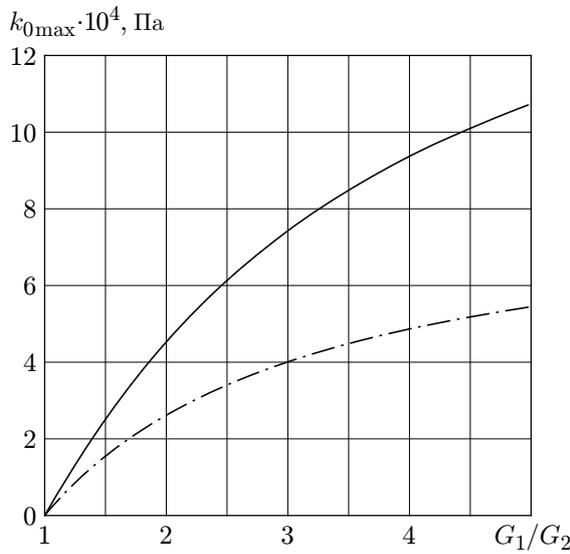


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость $k_{0\max}$ от G_1/G_2 :

сплошная линия — результаты расчета по численной модели; штрихпунктирная — результаты расчета по приближенной формуле (20)

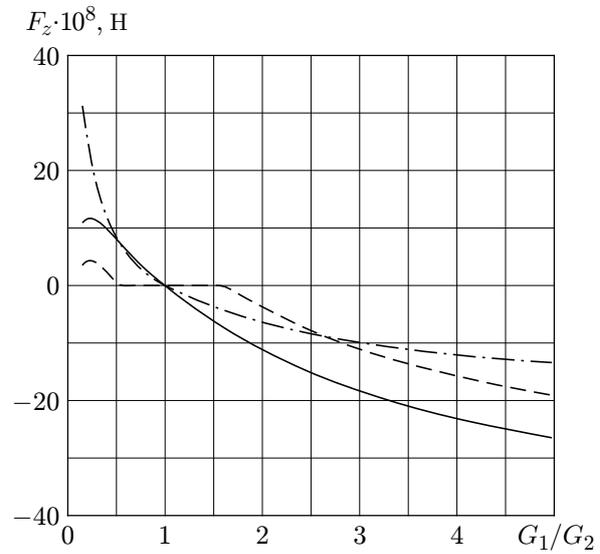


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости функций F_{z1} (сплошная линия), F'_z (штриховая) и F_{z1}^a (штрихпунктирная) от отношения G_1/G_2

воды с $G_2 = 18$ Па) $m_1 = 2,6$, а значение m_2 вычислялось по формуле (34). В первом случае, для того чтобы значение m_1 было положительным, необходимо выполнение условия

$$\frac{G_1}{G_2} < \frac{K_1}{K_2} \frac{m_2 + 1}{m_2 - 2} = 5,$$

во втором случае для положительности m_2 необходимо выполнение условия

$$\frac{G_1}{G_2} > \frac{K_1}{K_2} \frac{m_1 - 2}{m_1 + 1} = \frac{5}{36}.$$

На рис. 4 приведена зависимость функции $k_{0\max}$ (см. формулу (33)), определяемой численно по модели, разработанной в п. 1 (сплошная линия), и аналитически с использованием формулы (20) (штрихпунктирная линия), от отношения $G_1/G_2 \in [1, 5)$ при $r_1 = 3,2$. Видно, что при $G_1/G_2 \in [1,2, 4,5]$ значение $k_{0\max}$ находится в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-3}$ Па, соответствующем экспериментальным данным. Аналитические значения $k_{0\max}$ не более чем в два раза меньше значений $k_{0\max}$, полученных в численных расчетах.

На рис. 5 показаны зависимости функций F_{z1} , F'_z и F_{z1}^a от отношения $G_1/G_2 \in [0,2, 5)$ при $r_1 = 3,2$, $k_0 = 0,0003$ Па и значениях m_1, m_2 , определяемых по алгоритму, описанному выше. Видно, что при $G_1/G_2 < 0,5$ капли расходятся ($F'_z > 0$), а при $G_1/G_2 > 1,7$ сближаются ($F'_z < 0$). При $0,5 < G_1/G_2 < 1,7$ капли остаются в состоянии покоя ($F'_z = 0$). Заметим, что если F_{z1} разложить в ряд по ν (см. формулы (2)), то члены этого ряда будут знакопостоянными при $G_1/G_2 > 1$ и знакоперевающими при $G_1/G_2 < 1$. При $G_1/G_2 = 1$ $F_{z1} = 0$ и точное решение задачи получается за одну итерацию.

Выполним оценку пути, пройденного каплей, а также времени разгона и торможения капли в одном цикле (см. введение). Из эксперимента известно, что при $r_1 = 3$ средняя скорость капли радиусом $0,005$ м составляет $V_{cp} = -3,68 \cdot 10^{-7}$ м/с. Плотность капли

$\rho_0 = 10^3$ кг/м³, а ее масса $m = (4\pi/3)\rho_0 R_0^3 = 5,24 \cdot 10^{-4}$ кг. Время прохождения каплей расстояния Δz равно $\Delta t = \sqrt{2\Delta z/a}$ ($a = F'_z/m = -2,18 \cdot 10^{-4}$ м/с² — ускорение капли). Тогда ее средняя скорость равна $V_{\text{ср}} = \Delta z/\Delta t = -\sqrt{\Delta z a/2}$. Найдем Δz из условия, в соответствии с которым при $r_1 = 3$ средняя скорость капли равна экспериментальному значению: $\Delta z = 2V_{\text{ср}}^2/a = -1,24 \cdot 10^{-9}$ м. Ускорение капли на начальном этапе ее торможения без учета градиента давления равно $a' = \pi^2 R_0^2 k_0/m = 1,41 \cdot 10^{-4}$ м/с². Время торможения $\Delta t' = -2V_{\text{ср}}/a' = 5,22 \cdot 10^{-3}$ с. Длительность цикла без учета промежутка времени, в течение которого капля покоится (см. введение), равно $\Delta t + \Delta t' = 8,59 \cdot 10^{-3}$ с.

Заключение. Предложен алгоритм вычисления силы взаимодействия двух масляных капель, находящихся в пластической матрице. Нормальная компонента вектора напряжений на границах капель берется из решения задачи теории упругости, а касательная определяется пластическими свойствами среды (ее пределом текучести). На основе расчетов, проведенных по предложенной модели, получена оценка сверху предела текучести матрицы из условия соответствия знака силы взаимодействия капель их взаимному притяжению на предельном расстоянии между ними, когда в эксперименте наблюдается сближение капель. При подходящем выборе числа Пуассона эта оценка соответствует экспериментальным данным.

Автор выражает благодарность С. В. Стебновскому, В. В. Пухначеву, В. В. Кузнецову и В. В. Шелухину за полезные обсуждения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стебновский С. В.** Термодинамическая неустойчивость дисперсных сред, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 53–58.
2. **Стебновский С. В.** О взаимодействии жидких капель, взвешенных в растворах // Журн. техн. физики. 1981. Вып. 10. С. 2177–2180.
3. **Стебновский С. В.** О механизме коагуляции дисперсных элементов в средах, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 156–161.
4. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
5. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 1965.
6. **Мосолов П. П.** Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. М.: Наука, 1981.
7. **Шелухин В. В.** Модель жидкости Бингама в переменных напряжении — скорость // Докл. АН. 2001. Т. 377, № 4. С. 455–458.
8. **Рейнер М.** Десять лекций по теоретической реологии. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
9. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1962. Ч. 2.
10. **Таблицы физических величин** / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
11. **Апакашев Р. А., Павлов В. В.** Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
12. **Романов В. А., Сапожников С. Б.** Экспериментальное определение вязкоупругих характеристик жидкости // Изв. Челяб. науч. центра. 2002. Вып. 4. С. 69–74.

Поступила в редакцию 9/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 2008 г.