

УДК 536.24

О ДИФФУЗИИ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В КОНВЕКТИВНОМ ПОТОКЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Дж. Палани, Кванг Енг Ким*

Правительственный колледж искусств, 632209 Тирутани, Индия

* Университет Инха, 402751 Инчхон, Республика Корея

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

Исследовано численное решение задачи о нестационарном свободно-конвективном потоке на полубесконечной вертикальной пластине при наличии гомогенной химической реакции первого порядка. Безразмерные определяющие уравнения решаются с использованием эффективной абсолютно устойчивой и быстросходящей неявной конечно-разностной схемы высокого порядка. Определено влияние различных параметров течения, таких как число Прандтля, число Шмидта, параметр плавучести и параметр химической реакции, на скорость и температуру потока. Показано, что полученные значения скорости хорошо согласуются с известными результатами. Рассчитаны локальные и средние значения коэффициента поверхностного трения, чисел Нуссельта и Шервуда. Обсуждается влияние параметров химической реакции на указанные значения в случае как реакции порождения, так и реакции разрушения. Установлено, что при наличии химической реакции первого порядка скорость потока увеличивается в случае реакции порождения и уменьшается в случае реакции разрушения.

Ключевые слова: химически реагирующие вещества, конвективный поток, вертикальная пластина, метод конечных разностей, трение поверхности.

Введение. Во многих технологических процессах перенос тепла и массы происходит одновременно. Одним из примеров тепломассопереноса является испарение воды в озере, обдуваемом ветром. В одних случаях процесс переноса массы является преобладающим, а теплопередача незначительна, в других случаях оба процесса равноправны. Перенос массы происходит до тех пор, пока имеется различие концентраций химических компонентов смеси. Следовательно, действие градиента концентрации на диффузию веществ при перемещении массы аналогично действию градиента температуры при теплопередаче. Массовая диффузия происходит как в жидкостях, так и в твердых частицах и газах (например, диффузия закиси азота в результате автомобильного выхлопа в воздух, растворение кислорода в воде и гелия в пирексе (термостойком стекле) и т. д.). Многие технологические процессы сопровождаются молекулярной диффузией веществ при наличии химической реакции внутри потока или на его границе. Существует два типа химической реакции: гомогенная и гетерогенная. Диффузия веществ под влиянием гомогенной химической реакции может быть такой же, как диффузия тепла при действии внутреннего источника энергии. В случае когда в воздухе или воде присутствуют примеси, может происходить какая-либо химическая реакция, например между воздухом и бензолом. В последние годы требования технологии стимулировали интерес к исследованиям течений жидкости, в которых одновременно происходит несколько процессов, например диффузия химически активного вещества в ламинарном пограничном слое на вертикальной пластине с комбинированным тепломассопереносом. Задача такого типа может возникнуть при гальванопокрытии пластины. Явление тепломассопереноса имеет место в перераба-

тывающих отраслях химической промышленности, таких как производство полимеров, а также в пищевой промышленности.

В работе [1] исследованы течения в окрестности плоской пластины при наличии химических реакций разрушения (порождения) первого порядка. В природе чистый воздух и вода не встречаются, так как в них содержатся различные примеси. В таких случаях течение обусловлено различием температур и концентраций. В работе [2] с использованием переменных подобия изучено влияние переноса массы в естественно-конвективном потоке на вертикальной пластине с переменной температурой поверхности при наличии переменной массовой диффузии. В [3] с использованием явного метода расчета исследована задача о свободном конвективном течении на изотермической вертикальной пластине с переносом массы. В работе [4] с помощью неявного метода численно решена задача для случая переходного режима свободно-конвективного течения с переносом массы на вертикальной пластине. В [5] представлено точное решение задачи о течении, обусловленном импульсным движением бесконечной вертикальной пластины при наличии примеси, химической реакции первого порядка и однородного теплового потока на пластине. В работе [6] получено точное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости на вертикальной пластине, приведенной в движение импульсом, при наличии переноса массы и химической реакции первого порядка. Конечно-разностное решение для случая переходного естественно-конвективного течения несжимаемой вязкой жидкости на полубесконечной пластине, приведенной в движение импульсом, с постоянным тепловым потоком и массовой диффузией найдено в работе [7], в которой учитывалось наличие гомогенной химической реакции первого порядка. В [8] получено точное решение задачи о течении на приведенной в движение импульсом бесконечной вертикальной пластине с переменной температурой и однородной массовой диффузией при наличии гомогенной химической реакции первого порядка. Численное решение задачи о переходном естественно-конвективном течении несжимаемой вязкой жидкости на приведенной в движение импульсом полубесконечной изотермической вертикальной пластине при наличии массовой диффузии приведено в [9]. В работе [10] с использованием метода Р. К. Гилла найдено приближенное численное решение задачи об устойчивом ламинарном магнитогидродинамическом течении в пограничном слое на ускоряющейся вертикальной поверхности при наличии отсоса (вдува), примеси и массовой диффузии. Теоретическое решение задачи о течении на бесконечной вертикальной пластине, приведенной в движение импульсом, при наличии однородного теплового потока и переменной массовой диффузии с учетом гомогенной химической реакции первого порядка получено в работе [11]. В [12] с использованием метода конечных разностей изучена химическая реакция первого порядка на движущейся полубесконечной вертикальной пластине в присутствии оптически тонкого серого газа.

В данной работе исследуется влияние переноса массы на течение, имеющее место на полубесконечной изотермической вертикальной пластине при наличии химической реакции. Насколько известно авторам настоящей работы, анализ переходного естественно-конвективного течения на полубесконечной вертикальной пластине при наличии химической реакции не проводился, что обусловлено математическими и вычислительными трудностями в случае неконгруэнтных пограничных слоев.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарный свободно-конвективный поток вязкой несжимаемой жидкости на полубесконечной вертикальной пластине. В данной работе используются следующие предположения: ось x направлена вдоль пластины, ось y — по нормали к ней. В начальный момент пластина и жидкость имеют одну и ту же температуру T'_∞ и концентрацию C'_∞ . С течением времени температура пластины и концентрация жидкости повышаются до значений T'_w , C'_w соответственно. Также предполагается, что между примесью и жидкостью происходит гомогенная химическая реакция первого поряд-

ка. При этом концентрация примеси очень мала и, следовательно, теплом, выделяющимся при химической реакции, можно пренебречь. Реагирующий компонент, выделяющийся на поверхности, имеет очень малую концентрацию, поэтому предполагается, что конвективный перенос массы к поверхности или от нее, обусловленный влиянием вязкой диссипации в уравнении энергии, незначителен. С учетом данных предположений с использованием приближения Буссинеска течение в пограничном слое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g\beta(T' - T'_\infty) + g\beta^*(C' - C'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial C'}{\partial t'} + u \frac{\partial C'}{\partial x} + v \frac{\partial C'}{\partial y} &= D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} - K'C' \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} t' \leq 0: \quad u &= 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty, \quad C' = C'_\infty, \\ t' > 0: \quad u &= 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_w, \quad C' = C'_w \quad \text{при } y = 0, \\ u &= 0, \quad T' = T'_\infty, \quad C' = C'_\infty \quad \text{при } x = 0, \\ u &\rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty, \quad C' \rightarrow C'_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях осей x, y соответственно; T' — температура жидкости в пограничном слое; C' — концентрация примеси в пограничном слое; t' — время; T'_∞ — температура жидкости вдали от пластины; C'_∞ — концентрация примеси в жидкости вдали от пластины; β — коэффициент объемного теплового расширения; β^* — коэффициент объемного концентрационного расширения; ν — кинематическая вязкость; K' — параметр химической реакции ($K' > 0$ в случае реакции разрушения, $K' < 0$ в случае реакции порождения, $K' = 0$ в отсутствие реакции); g — ускорение свободного падения; α — температуропроводность; D — коэффициент диффузии примеси.

Вводя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{uL}{\nu} \text{Gr}^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu} \text{Gr}^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2} \text{Gr}^{1/2}, \\ T &= \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad C = \frac{C' - C'_\infty}{C'_w - C'_\infty}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta L^3 (T'_w - T'_\infty)}{\nu^2}, \\ \text{Gr}_C &= \frac{g\beta^* L^3 (C'_w - C'_\infty)}{\nu^2} \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad N = \frac{\text{Gr}_C}{\text{Gr}}, \quad K = \frac{K' L^2}{\nu} \text{Gr}^{-1/2} \end{aligned}$$

(L — длина пластины; Gr — число Грасгофа; Gr_C — массовое число Грасгофа; N — отношение плавучестей; K — безразмерный параметр химической реакции; Pr, Sc — числа Прандтля, Шмидта), определяющие уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\
\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= T + NC + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \\
\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} - KC.
\end{aligned} \tag{2}$$

Соответствующие начальные и граничные условия в безразмерной форме можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
t \leq 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = 0, \quad C = 0 \quad \forall y, \\
t > 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = 1, \quad C = 1 \quad \text{при } Y = 0, \\
U &= 0, \quad T = 0, \quad C = 0 \quad \text{при } X = 0, \\
U &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad C \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Численный метод. Двумерные нелинейные нестационарные связанные уравнения в частных производных (2) с начальными и граничными условиями (3) решались с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона, которая является быстроходящейся и безусловно устойчивой:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k + U_{i,j-1}^{k+1} - U_{i-1,j-1}^{k+1} + U_{i,j-1}^k - U_{i-1,j-1}^k}{4 \Delta X} + \\
+ \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j-1}^{k+1} + V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{2 \Delta Y} = 0; \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{2 \Delta X} + V_{i,j}^k \frac{U_{i,j+1}^{k+1} - U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k}{4 \Delta Y} = \\
= \frac{1}{2} (T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j}^k) + \frac{N}{2} (C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j}^k) + \frac{U_{i,j-1}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k}{2(\Delta Y)^2}; \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2 \Delta X} + V_{i,j}^k \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{4 \Delta Y} = \\
= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_{i,j-1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j+1}^k}{2(\Delta Y)^2}; \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i-1,j}^{k+1} + C_{i,j}^k - C_{i-1,j}^k}{2 \Delta X} + V_{i,j}^k \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1} + C_{i,j+1}^k - C_{i,j-1}^k}{4 \Delta Y} = \\
= \frac{1}{\text{Sc}} \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1} + C_{i,j-1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j+1}^k}{2(\Delta Y)^2} - K \frac{C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j}^k}{2}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Здесь нижние индексы i, j соответствуют точкам сетки вдоль направлений X, Y , а верхний индекс k — точке сетки вдоль направления t .

Область интегрирования представляла собой прямоугольник со сторонами $X_{\max} = 1$ и $Y_{\max} = 16$, где Y_{\max} соответствует значению $Y = \infty$ (эта граница области интегрирования находится на большом расстоянии от теплового и гидродинамического пограничных слоев). Было выбрано значение $Y = 16$, чтобы были удовлетворены последние два граничных условия в (3). На любом временном шаге коэффициенты $U_{i,j}^k, V_{i,j}^k$ в разностных уравнениях считались постоянными. При $t = 0$ значения U, V, T, C известны из начальных условий во всех точках сетки. Вычисление значений U, V, T, C на временном шаге $k + 1$ с использованием значений на предыдущем шаге k выполняется следующим образом. Во внутренних узлах на i -м уровне конечно-разностное уравнение (7) представляет собой тридиагональную систему уравнений, которая решается с помощью алгоритма Томаса (см. [13]). Таким образом, значения C вычисляются в каждом узле на $(k + 1)$ -м шаге по времени. Таким же способом вычислялись значения T из уравнения (6). После подстановки значений C и T на $(k + 1)$ -м шаге по времени в уравнение (5) аналогично находились значения U на $(k + 1)$ -м временном шаге. Наконец, с использованием уравнения (4) вычислялись явно значения V в каждом узле на i -м уровне на $(k + 1)$ -м шаге по времени. Повторяя эту процедуру для всех i -х уровней, можно определить значения C, T, U, V во всех точках сетки в прямоугольной области на $(k + 1)$ -м временном шаге.

Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние. Стационарное решение считается достигнутым, когда абсолютная разность значений U , так же как и значений T, C , на двух последовательных временных шагах во всех точках сетки меньше 10^{-5} . Выбраны следующие шаги сетки: $\Delta X = 0,05, \Delta Y = 0,25$; временной шаг $\Delta t = 0,01$. При уменьшении в два раза размеров ячейки сетки в каждом из направлений X, Y и одновременно в обоих направлениях результаты расчетов различаются в четвертом десятичном разряде.

3. Устойчивость схемы. С использованием техники Ньюмана (см. [13]) проведено исследование критерия устойчивости конечно-разностной схемы при постоянных размерах ячейки сетки. Предполагается, что общий член разложения Фурье для U, T, C в произвольно выбранный момент времени $t = 0$ имеет вид $\exp(i\alpha X) \exp(i\beta Y)$, где $i = \sqrt{-1}$. В последующие моменты времени t коэффициенты U, T, C можно представить в виде

$$\begin{aligned} U &= F(t) \exp(i\alpha X) \exp(i\beta Y), & T &= G(t) \exp(i\alpha X) \exp(i\beta Y), \\ C &= H(t) \exp(i\alpha X) \exp(i\beta Y). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнения (5)–(7) с учетом предположения, что коэффициенты U, T, C являются константами на любом временном шаге, значения на следующем шаге по времени обозначим F', G', H' . В результате упрощения получаем

$$\begin{aligned} \frac{F' - F}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(F' + F)(1 - \exp(-i\alpha \Delta X))}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(F' + F)i \sin \beta \Delta Y}{\Delta Y} &= \\ &= \frac{G' + G}{2} \text{Gr} + \frac{H' + H}{2} \text{Gr}_C + \frac{(F' + F)(\cos \beta \Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2}, \\ \frac{G' - G}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(G' + G)(1 - \exp(-i\alpha \Delta X))}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(G' + G)i \sin \beta \Delta Y}{\Delta Y} &= \\ &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{(G' + G)(\cos \beta \Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{H' - H}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(H' + H)(1 - \exp(-i\alpha \Delta X))}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(H' + H)i \sin \beta \Delta Y}{\Delta Y} = \\ = \frac{1}{Sc} \frac{(H' + H)(\cos \beta \Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2}. \end{aligned}$$

Уравнения (9) можно записать в виде

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + (Gr/2)(G' + G) \Delta t + (Gr_C/2)(H' + H) \Delta t; \quad (10)$$

$$(1 + B)G' = (1 - B)G; \quad (11)$$

$$(1 + E)H' = (1 - E)H, \quad (12)$$

где

$$A = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - \exp(-i\alpha \Delta X)) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta \Delta Y) - (\cos \beta \Delta Y - 1) \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2},$$

$$B = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - \exp(-i\alpha \Delta X)) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta \Delta Y) - \frac{\cos \beta \Delta Y - 1}{Pr} \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2},$$

$$E = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - \exp(-i\alpha \Delta X)) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta \Delta Y) - \frac{\cos \beta \Delta Y - 1}{Sc} \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

Исключив G' и H' из уравнения (10) с использованием (11) и (12), получим уравнение

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + G \frac{Gr \Delta t}{1 + B} + H \frac{Gr_C \Delta t}{1 + E}. \quad (13)$$

Уравнения (11)–(13) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} F' \\ G' \\ H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - A)/(1 + A) & D_1 & D_2 \\ 0 & (1 - B)/(1 + B) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - E)/(1 + E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \\ H \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$D_1 = \frac{Gr \Delta t}{(1 + A)(1 + B)}, \quad D_2 = \frac{Gr_C \Delta t}{(1 + A)(1 + E)}.$$

Для того чтобы конечно-разностная схема была устойчивой, модуль каждого собственного значения матрицы перехода не должен превышать единицу. Так как матрица системы уравнений (14) является треугольной, то ее собственные значения — диагональные элементы: $(1 - A)/(1 + A)$, $(1 - B)/(1 + B)$, $(1 - E)/(1 + E)$. В предположении, что U является всюду неотрицательной величиной, а величина V всюду неположительна, получаем

$$A = 2a \sin^2(\alpha \Delta X/2) + 2c \sin^2(\beta \Delta Y/2) + i(a \sin \alpha \Delta X - b \sin \beta \Delta Y),$$

где

$$a = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X}, \quad b = \frac{|V|}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y}, \quad c = \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

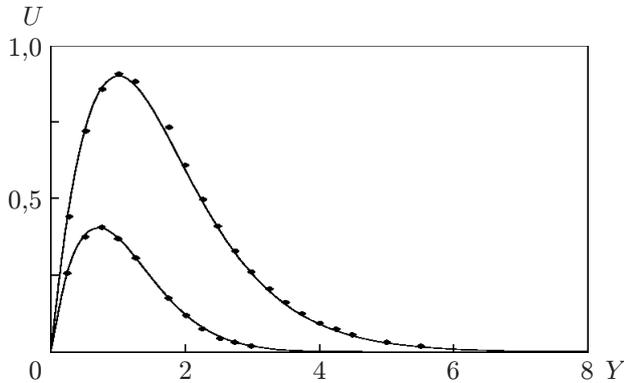


Рис. 1

Рис. 1. Профили скорости при $X = 1$, $Pr = 1$, $Sc = 0,7$, $N = 2$, $K = 0$ в различные моменты времени:

линии — данные настоящей работы; точки — данные работы [3]

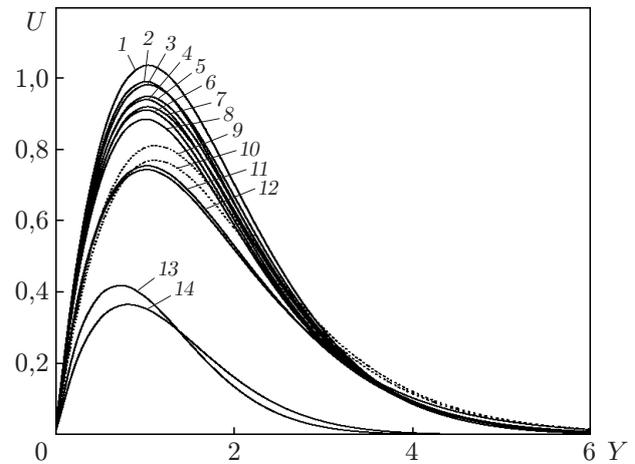


Рис. 2

Рис. 2. Профили скорости переходного режима при $X = 1$, $Pr = 0,7$, $Sc = 0,78$ и различных значениях N и K :

сплошные линии — $N = 2$, пунктирные — $N = 1$; 1, 2, 9 — $K = -0,5$ ($1 - t = 1,51$, $2 - t = 4,22$ (стационарное состояние), $9 - t = 5,04$ (стационарное состояние)); 3, 4, 10, 14 — $K = -0,2$ ($3 - t = 1,54$, $4 - t = 3,59$ (стационарное состояние), $10 - t = 4,04$ (стационарное состояние), $14 - t = 0,77$); 5, 6 — $K = 0$ ($5 - t = 1,57$, $6 - t = 3,50$ (стационарное состояние)); 7, 8, 13 — $K = 0,2$ ($7 - t = 1,59$, $8 - t = 3,52$ (стационарное состояние), $13 - t = 0,62$); 11, 12 — $K = 2$ ($11 - t = 1,84$, $12 - t = 4,75$ (стационарное состояние))

Так как реальные части $A \geq 0$, $B \geq 0$, $E \geq 0$, то $|(1 - A)/(1 + A)| < 1$, $|(1 - B)/(1 + B)| < 1$ и $|(1 - E)/(1 + E)| < 1$. Таким образом, конечно-разностная схема является безусловно устойчивой. Локальная ошибка аппроксимации равна $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$ и стремится к нулю, когда Δt , ΔY и ΔX стремятся к нулю. Следовательно, схема согласована. Устойчивость и согласованность схемы гарантируют ее сходимость.

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Для тестирования предложенной схемы профили скорости, полученные в данной работе при $Pr = 0,1$, $Sc = 0,7$, $N = 2,0$, $K = 0$, сравнивались с профилями скорости, полученными в работе [3] с использованием явной конечно-разностной схемы (рис. 1). Следует отметить, что эти профили хорошо согласуются.

Расчеты проводились при различных значениях параметра химической реакции K и числа Шмидта для жидкостей с числом Прандтля $Pr = 0,7$ (воздух) и $Pr = 7,0$ (вода).

На рис. 2 представлены профили скорости переходного режима при $X = 1,0$ и различных значениях отношения плавучести N и параметра химической реакции K . Видно, что при $Pr = 0,7$, $Sc = 0,78$, $N = 2,0$, $K = -0,5$ скорость увеличивается со временем, достигает максимума в момент времени $t = 1,51$ и выходит на стационарный режим при $t = 4,22$. Наблюдается увеличение скорости в случае реакции порождения и уменьшение ее в случае реакции разрушения. Отметим, что с увеличением параметра химической реакции время достижения стационарного состояния увеличивается. С увеличением N увеличиваются комбинированные силы плавучести, а следовательно, и скорость вблизи пластины, однако в области $Y > 3$ скорость уменьшается. Заметим, что влияние силы тепловой плавучести

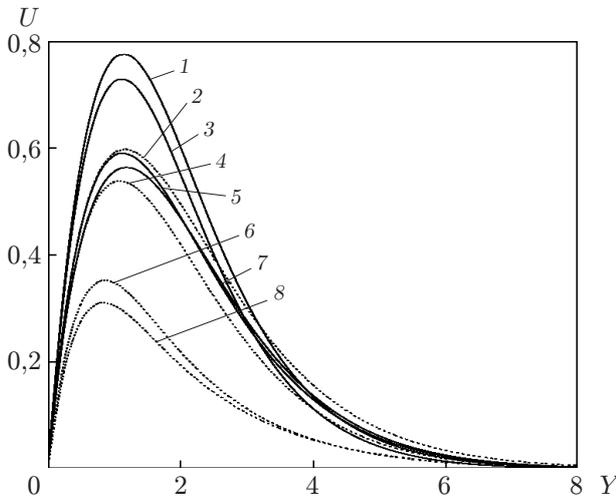


Рис. 3

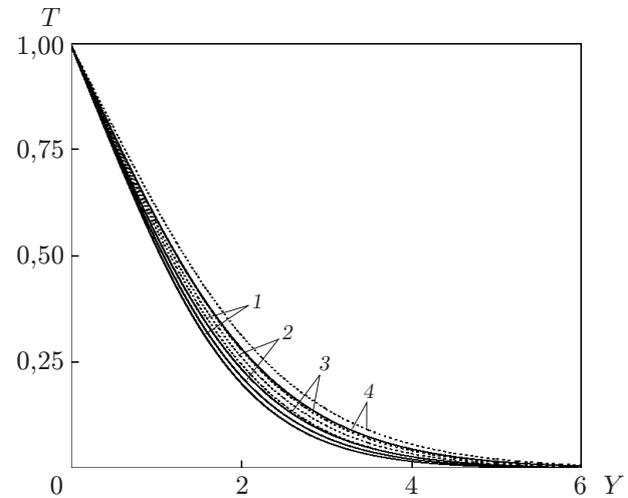


Рис. 4

Рис. 3. Стационарные профили скорости при $X = 1$, $N = 1$, $K = 0,2$ и различных значениях Pr и Sc :

сплошные линии — $Pr = 0,7$, пунктирные — $Pr = 7,0$; 1, 2 — $Sc = 0,5$ (1 — $t = 3,84$, 2 — $t = 4,77$); 3, 4 — $Sc = 0,78$ (3 — $t = 4,01$, 4 — $t = 4,94$); 5, 6 — $Sc = 5$ (5 — $t = 5,04$, 6 — $t = 7,87$); 7, 8 — $Sc = 10$ (7 — $t = 5,09$, 8 — $t = 8,50$)

Рис. 4. Стационарные профили температуры при $X = 1$, $Pr = 0,7$, $Sc = 0,78$ и различных значениях N и K :

сплошные линии — $N = 2$, пунктирные — $N = 1$; 1 — $K = -0,5$; 2 — $K = -0,2$; 3 — $K = 0,2$; 4 — $K = 2$

в пограничном слое на рост скорости более существенно по сравнению с влиянием силы концентрационной плавучести вдали от пластины.

На рис. 3 представлены стационарные профили скорости при различных значениях чисел Шмидта и Прандтля. Видно, что с увеличением Pr скорость уменьшается, а с увеличением Sc увеличивается. Время достижения стационарного состояния увеличивается с увеличением числа Шмидта независимо от числа Прандтля жидкости.

На рис. 4 показаны стационарные профили температуры при различных значениях N и K . Видно, что с увеличением значения параметра химической реакции температура увеличивается, а с увеличением N уменьшается. Стационарные профили температуры при различных значениях Pr и Sc представлены на рис. 5. Число Прандтля оказывает существенное влияние на профили температуры. С увеличением значения Pr температурный профиль становится более крутым, так как при этом увеличивается коэффициент теплопередачи. Более низкая температура наблюдалась в системе с меньшими значениями Sc .

На рис. 6 представлены профили концентрации переходного режима и стационарные профили концентрации при различных значениях N и K . Влияние параметра химической реакции на распределение концентрации очень значительно. С увеличением параметра химической реакции или отношения плавучестей концентрация уменьшается.

Влияние чисел Шмидта и Прандтля на концентрацию показано на рис. 7. Видно, что с увеличением числа Прандтля концентрация увеличивается, тогда как с увеличением числа Шмидта она уменьшается.

В безразмерных переменных выражения для локального τ_x и среднего $\bar{\tau}$ поверхностного трения, локального Nu_x и среднего \bar{Nu} числа Нуссельта, локального Sh_x и среднего \bar{Sh}

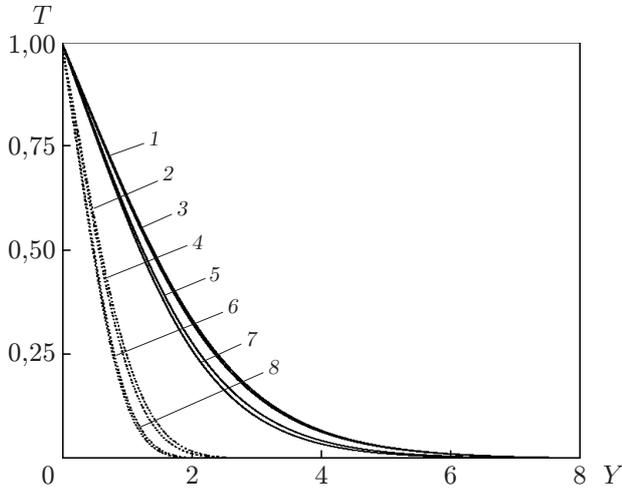


Рис. 5

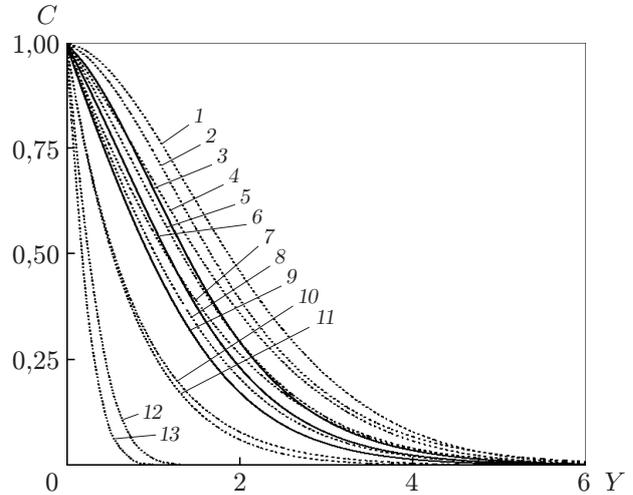


Рис. 6

Рис. 5. Стационарные профили температуры при $X = 1$, $N = 1$, $K = 0,2$ и различных значениях Pr и Sc :

сплошные линии — $Pr = 0,7$, пунктирные — $Pr = 7,0$; 1, 2 — $Sc = 10$ (1 — $t = 5,09$, 2 — $t = 8,50$); 3, 4 — $Sc = 5$ (3 — $t = 5,04$, 4 — $t = 7,87$); 5, 6 — $Sc = 0,78$ (5 — $t = 4,01$, 6 — $t = 4,94$); 7, 8 — $Sc = 0,5$ (7 — $t = 3,84$, 8 — $t = 4,77$)

Рис. 6. Профили концентрации переходного режима при $X = 1$, $Pr = 0,7$, $Sc = 0,78$ и различных значениях N и K :

сплошные линии — $N = 2$, пунктирные — $N = 1$; 1-3 — $K = -0,5$ (1 — $t = 1,71$, 2 — $t = 5,04$ (стационарное состояние), 3 — $t = 4,22$ (стационарное состояние)); 4-6, 12 — $K = -0,2$ (4 — $t = 1,69$, 5 — $t = 4,04$ (стационарное состояние), 6 — $t = 3,59$ (стационарное состояние), 12 — $t = 0,60$); 7-9, 13 — $K = 0,2$ (7 — $t = 1,66$, 8 — $t = 4,01$ (стационарное состояние), 9 — $t = 3,52$ (стационарное состояние), 13 — $t = 0,30$); 10, 11 — $K = 2$ (10 — $t = 1,56$, 11 — $t = 4,83$ (стационарное состояние))

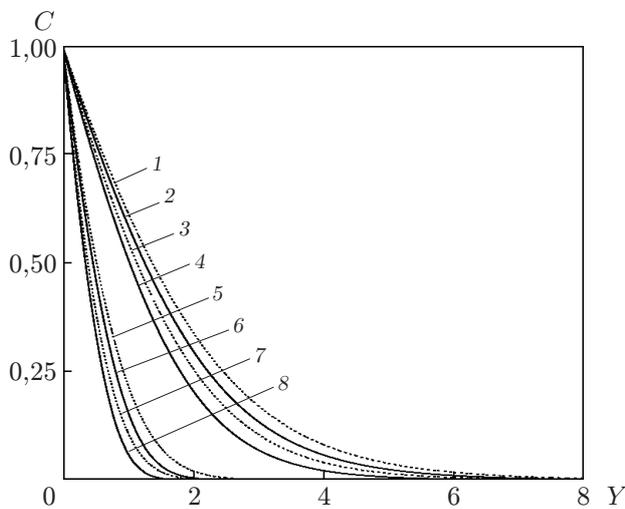
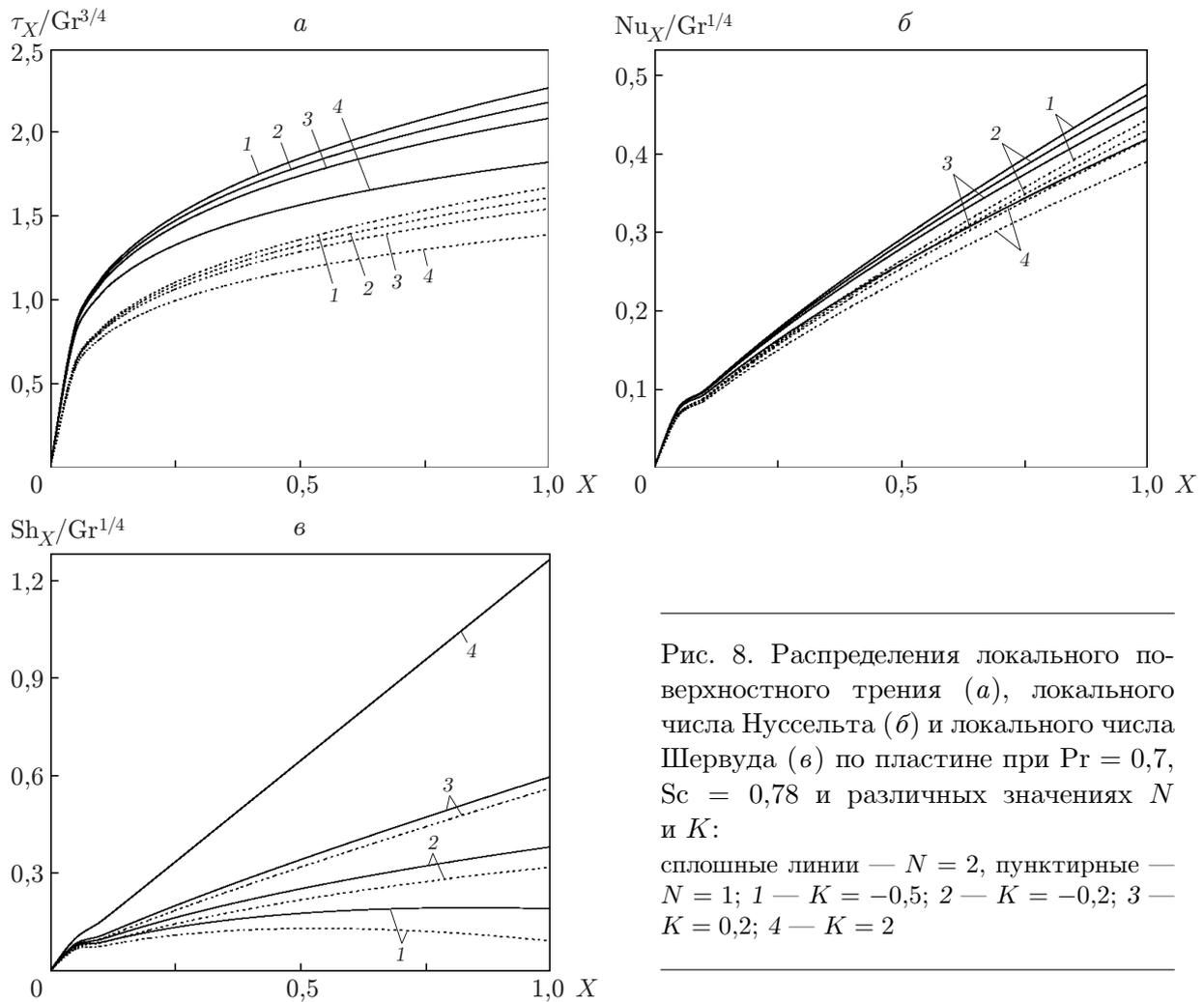


Рис. 7. Стационарные профили концентрации при $X = 1$, $N = 1$, $K = 0,2$ и различных значениях Pr и Sc :

сплошные линии — $Pr = 0,7$, пунктирные — $Pr = 7,0$; 1, 2 — $Sc = 0,5$ (1 — $t = 4,77$, 2 — $t = 3,84$); 3, 4 — $Sc = 0,78$ (3 — $t = 4,94$, 4 — $t = 4,01$); 5, 6 — $Sc = 5$ (5 — $t = 7,87$, 6 — $t = 5,04$); 7, 8 — $Sc = 10$ (7 — $t = 8,50$, 8 — $t = 5,09$)



числа Шервуда имеют вид

$$\tau_X = Gr^{3/4} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad \bar{\tau} = Gr^{3/4} \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} dX; \quad (15)$$

$$Nu_X = -X Gr^{1/4} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad \bar{Nu} = -Gr^{1/4} \int_0^1 \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} dX,$$

$$Sh_X = -X Gr^{1/4} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad \bar{Sh} = -Gr^{1/4} \int_0^1 \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} dX. \quad (16)$$

В уравнениях (15), (16) производные вычислялись с использованием пятиточечной аппроксимации, а интегралы — по формуле интегрирования Ньютона — Котеса.

Локальные значения поверхностного трения определялись из первого уравнения в (15). На рис. 8, а представлена зависимость локального поверхностного трения от координаты X при различных значениях K и N . С увеличением X локальное поверхностное трение уве-

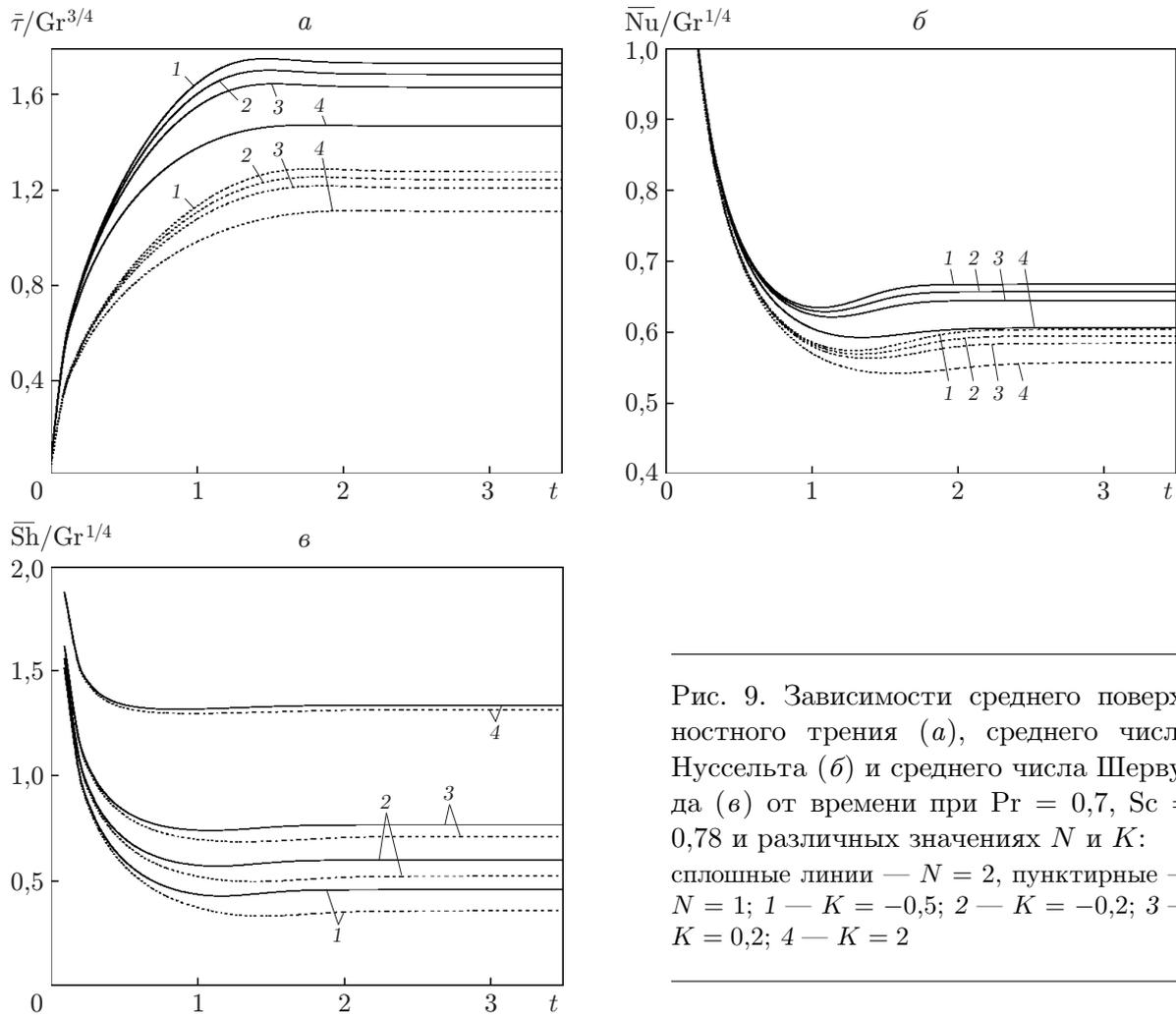


Рис. 9. Зависимости среднего поверхностного трения (а), среднего числа Нуссельта (б) и среднего числа Шервуда (в) от времени при $Pr = 0,7$, $Sc = 0,78$ и различных значениях N и K : сплошные линии — $N = 2$, пунктирные — $N = 1$; 1 — $K = -0,5$; 2 — $K = -0,2$; 3 — $K = 0,2$; 4 — $K = 2$

личивается. Локальное касательное напряжение увеличивается в случае реакции порождения и уменьшается в случае реакции разрушения. С увеличением значения N локальное поверхностное трение увеличивается, поскольку увеличивается скорость (см. рис. 2).

На рис. 8,б приведены локальные значения числа Нуссельта при различных значениях K и N . Видно, что с увеличением отношения плавучестей значение числа Нуссельта увеличивается. Скорость теплопередачи уменьшается с увеличением значения K .

На рис. 8,в приведены локальные значения числа Шервуда в случае стационарного состояния. Видно, что с увеличением координаты X и отношения плавучестей N локальные значения числа Шервуда увеличиваются. Скорость изменения распределения концентрации увеличивается в случае реакции разрушения и уменьшается в случае реакции порождения.

Влияние параметра химической реакции K и отношения плавучестей N на среднее поверхностное трение и средние числа Нуссельта и Шервуда показано на рис. 9,а-в соответственно. На рис. 9,а видно, что поверхностное трение со временем увеличивается и выходит на стационарное значение. Среднее поверхностное трение увеличивается с увеличением N , со временем выходя на стационарное значение. В случае реакции разрушения с увеличением значения K поверхностное трение уменьшается, а в случае реакции порождения

дения увеличивается. На рис. 9,б видно, что зависимость среднего числа Нуссельта от параметров N и K имеет тот же характер, что и зависимость среднего поверхностного трения от этих параметров. Характер зависимостей от N и K среднего числа Шервуда (см. рис. 9,в) и локального числа Шервуда (см. рис. 8,в) также одинаков. Однако при больших значениях t среднее число Шервуда не зависит от времени.

Заключение. Представлена математическая модель, описывающая нестационарный теплоперенос при наличии химической реакции в случае естественной конвекции на вертикальной пластине. С использованием конечно-разностного метода решены определяющие уравнения для пограничного слоя. Установлено, что в случае реакции порождения скорость увеличивается, а в случае реакции разрушения уменьшается. С увеличением параметра химической реакции температура увеличивается.

Показано, что влияние параметра химической реакции на распределение концентрации очень существенно: при увеличении параметра химической реакции или отношения плавучести концентрация резко уменьшается. Местные касательные напряжения на стенке увеличиваются в случае реакции порождения и уменьшаются в случае реакции разрушения. Установлено, что при интегрировании системы (4)–(7) число временных шагов для достижения стационарного решения существенно зависит от параметра химической реакции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chambre P. L., Young J. D.** On the diffusion of a chemically reactive species in laminar boundary layer flow // *Phys. Fluids*. 1958. V. 1. P. 48–54.
2. **Gebhart B., Pera L.** The nature of vertical natural convection flows resulting from the combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1971. V. 14. P. 2025–2050.
3. **Callahan G. D., Marner W. J.** Transient free convection with mass transfer on an isothermal vertical at plate // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1976. V. 19. P. 165–174.
4. **Soundalgekar V. M., Ganesan P.** Finite difference analysis of transient free convection with mass transfer on an isothermal vertical at plate // *Intern. J. Engng Sci.* 1981. V. 19. P. 757–770.
5. **Das U. N., Deka R. K., Soundalgekar V. M.** Effects of mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant heat flux and chemical reaction // *Engng Res.* 1994. V. 60. P. 284–287.
6. **Das U. N., Deka R. K., Soundalgekar V. M.** Effects of mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with chemical reaction // *Bull. GUMA*. 1998. V. 5. P. 13–20.
7. **Muthucumaraswamy R., Ganesan P.** On impulsive motion of a vertical plate with heat flux and diffusion of chemically reactive species // *Forsch. Ingenieurw.* 2000. Bd 66. S. 17–23.
8. **Muthucumaraswamy R., Ganesan P.** Diffusion and first order chemical reaction on impulsively started infinite vertical plate with variable temperature // *Intern. J. Thermal Sci.* 2002. V. 41. P. 475–479.
9. **Muthucumaraswamy R., Ganesan P.** Natural convection on a moving isothermal vertical plate with chemical reaction // *J. Engng Phys. Thermophys.* 2002. V. 75. P. 113–119.
10. **Anjali Devi S. P., Kandasamy R.** Effects of chemical reaction, heat and mass transfer on non-linear MHD flow over an accelerating surface with heat source and thermal stratification in the presence of suction or injection // *Comm. Numer. Methods Engng.* 2003. V. 19. P. 513–520.

11. **Muthucumaraswamy R., Kulandaivel T.** Chemical reaction effects on moving infinite vertical plate with uniform heat ux and variable mass diffusion // Forsch. Ingenieurw. 2003. Bd 68. S. 101–104.
12. **Loganathan P., Kulandaivel T., Muthucumaraswamy R.** First order chemical reaction on moving semi-infinite vertical plate in the presence of optically thin gray gas // Intern. J. Appl. Math. Mech. 2008. V. 4, N 5. P. 26–41.
13. **Carnahan B.** Applied numerical methods / B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

Поступила в редакцию 17/XI 2009 г.
