О СТРУКТУРЕ КОСОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

Ю. С. Саясов

(Москва)

Полная система уравнений, описывающая течение химически реагирующего невязкого газа за косой ударной волной в предположении, что ее фронт является плоским, а линии тока за скачком прямолинейными [1], имеет следующий вид:

$$p + \rho v^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \qquad w + \frac{1}{2} v^2 = w_2 + \frac{1}{2} v_2^2, \qquad \rho v = \rho_2 v_2 \tag{1}$$

$$\left(w = \sum_i \frac{\alpha_i}{m_i} (c_{p_i} T - \varepsilon_i), \quad \alpha_i = \frac{\rho_i}{\rho}\right)$$

Здесь w — энтальпия реагирующей смеси на единицу массы; α_i — концентрация i-ой компоненты смеси; m_i, ε_i — масса и энергия диссоциации частиц i-го типа; c_{p_i} — их теплоемкости, предполагаемые в дальнейшем постоянными; p, ρ, T, v — давление, массовая плотность, температура, скорость, меняющиеся вдоль линии тока за фронтом. Индексы 1 и 2 специализируют соответствующие величины по обе стороны фронта. К законам сохранения (1) следует добавить:

уравнение состояния

$$p = \frac{1}{\mu} \rho k T \qquad \left(\frac{1}{\mu} = \Sigma \frac{\alpha_i}{m_i}\right) \qquad (k \text{ — постоянная Больцмана}) \tag{2}$$

уравнения кинетики

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \rho, T) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\alpha_i = \alpha_{i_2} \quad \text{при } t = 0 \qquad \left(t = \int_0^s \frac{ds}{v}\right)$$

Здесь t — время движения частицы газа вдоль линии тока; s — длина, отсчитываемая вдоль линии тока от фронта; F_i — суммарная скорость химических процессов, в которых участвуют частицы i-го типа. Отметим, что связь величин, определенных по обе стороны скачка при сделанных предположениях (плоский фронт, прямолинейные линии тока), даются уравнениями

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad v_{1t} = v_{2t}, \quad p + \rho_2 v_{2n}^2 = p_1 + \rho_1 v_{1n}^2, \quad w_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = w_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \tag{4}$$

Здесь v_n, v_t — нормальная и тангенциальная составляющие скорости на фронте.

Если в выражении w_1 пренебречь членом

$$\sum_i \frac{\alpha_{i1}}{m_i} c_{p_{i_1}} T_1 \tag{5}$$

(это справедливо при $T_2/T_1 \gg 1$, т. е., если число Маха в натекающем потоке достаточно велико) и принять $\alpha_{i2} = \alpha_{i1}$ (так как газ непосредственно за фронтом не успел еще прореагировать), то последнее уравнение сводится к

$$\frac{1}{\mu_2} c_{p_2} T_2 + \frac{1}{2} v_{2n}^2 = \frac{1}{2} v_{1n}^2, \qquad c_{p_2} = \mu_2 \sum_i \frac{\alpha_{i_1}}{m_i} c_{p_{i2}} \tag{6}$$

Полученная система не отличается от имеющей место для химически стабильного газа ([1], стр. 391) и, следовательно, в рассматриваемом случае справедливы обычные газодинамические формулы ([1], стр. 411), позволяющие установить связь между величинами с индексами 1 и 2 по углу между фронтом и натекающим потоком φ, который предполагается заданным. Заметим, что сделанные выше допущения используются в дальнейшем. Пренебрегая во втором уравнении (1) членом (5), вводя величину ξ по формуле $v = v_2(1 + \xi)$ и исключая ξ из системы трех уравнений (1), получаем уравнение

$$s_m^2 \xi^2 - (s^2 - s_m^2)\, \xi - (s^2 - 1)\sigma = 0 \qquad \left(s_m^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad s = \frac{v_1}{v_2}\right) \tag{7}$$

---

[1] Эти допущения выполняются, например, в случае косой ударной волны, образующейся при сверхзвуковом обтекании клина химически реагирующим газом.

При выводе (7) сделано предположение, что

$$\frac{c}{c_{p2}} = \mu \sum_i \frac{\alpha_i}{m_i} c_{p_{i2}} / \mu_2 \sum_i \frac{\alpha_{i1}}{m_i} c_{p_{i2}} = 1$$

т. е., что средняя теплоемкость постоянна. Это предположение в большинстве случаев хорошо оправдывается. Подчеркнем, однако, что формулируемые ниже результаты справедливы с небольшими изменениями и в случае переменной c_p.

Величины γ и σ вводятся соотношениями

$$c_{p2} = \mu_2 \sum_i \frac{\alpha_{i1}}{m_i} c_{p_{i2}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} k, \qquad \sigma = \frac{2\mu_2}{v_1^2 - v_2^2} \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} (\alpha_{i1} - \alpha_i)$$

Ограничиваясь здесь рассмотрением эндотермических реакций, следует положить $\sigma > 0$. При этом температура, плотность и давление выражаются через σ следующим образом:

$$T = T_2 \left(1 - \frac{2\xi + \xi^2}{s^2 - 1} - \sigma\right) \qquad \left(T_2 = \frac{\mu_2 (v_1^2 - v_2^2)}{2c_{p2}}\right) \tag{8}$$

$$\rho = \frac{\rho_2}{1 + \xi}, \qquad p = \frac{k\rho_2 T_2}{\mu (1 + \xi)} \left(1 - \frac{2\xi + \xi^2}{s^2 - 1} - \sigma\right) \tag{9}$$

Так как все газодинамические величины выражены в функции концентраций α_i, задача сводится к исследованию системы кинетических уравнений (3).

Отметим, что величина s_m^2 имеет следующий простой смысл: она равна квадрату отношения v_1 / v_2 для угла $\varphi_m = \arcsin \sqrt{(\gamma + 1)/2\gamma}$, которому соответствует максимальный угол отклонения $\chi_m = \arcsin (1 / \gamma)$ потока за косой ударной волной. Как известно, величина φ_m играет фундаментальную роль в теории косых ударных волн. Именно при $\varphi > \varphi_m$ течение после скачка будет дозвуковым («сильное» семейство), а при $\varphi < \varphi_m$ значение за скачком будет сверхзвуковым («слабое» семейство). Решения уравнений (9), удовлетворяющие условию $\xi = 0$ при $\sigma = 0$ (т. е. при $t = 0$), в первом и во втором случаях даются формулами

$$\xi = \frac{s^2 - s_m^2 - \sqrt{(s^2 - s_m^2)^2 + 4s_m^2 (s^2 - 1)\sigma}}{2s_m^2} \qquad (\varphi > \varphi_m) \tag{10}$$

$$\xi = \frac{s^2 - s_m^2 + \sqrt{(s^2 - s_m^2) + 4s_m^2 (s^2 - 1)\sigma}}{2s_m^2} \qquad (\varphi < \varphi_m) \tag{11}$$

Отметим, что согласно (10), т. е. при $\varphi > \varphi_m$, $\xi < 0$ и, следовательно, скорость газа убывает с увеличением расстояния от фронта. Напротив, при $\varphi < \varphi_m$, $\xi > 0$, т. е. скорость газа возрастает с увеличением расстояния до фронта.

Если $(s^2 - s_m^2)^2 \gg 4s_m^2 (s^2 - 1)\sigma$, то (10), (11) упрощаются следующим образом:

$$\xi = -\frac{s^2 - 1}{s^2 - s_m^2} \sigma \qquad (\varphi > \varphi_m), \quad \xi = \frac{s^2 - 1}{s^2 - s_m^2} \sigma \qquad (\varphi < \varphi_m) \tag{12}$$

Согласно (8) изменение температуры в первом приближении по σ в этих случаях описывается формулами

$$\begin{aligned} T &= T_2 \left[1 - \left(1 - \frac{2}{s^2 - s_m^2}\right)\sigma\right] \qquad (\varphi > \varphi_m) \\ T &= T_2 \left[1 - \left(1 + \frac{2}{s_m^2 - s^2}\right)\sigma\right] \qquad (\varphi < \varphi_m) \end{aligned} \tag{13}$$

С другой стороны, при $(s^2 - s_m^2) \ll 4s_m^2 (s^2 - 1)\sigma$, т. е. при $\varphi \to \varphi_m$ получаем из (9), (10), (11)

$$\xi = -\sqrt{(s^2 - 1)\sigma} / s_m \quad \text{для } \varphi > \varphi_m, \qquad \xi = \sqrt{(s^2 - 1)\sigma} / s_m \quad \text{для } \varphi < \varphi_m \tag{14}$$

Соответственно температурные зависимости имеют вид (15)

$$T = T_2 \left(1 + \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{s^2 - s_m^2}} - \sigma\right) \quad (\varphi > \varphi_m), \qquad T = T_2 \left(1 - \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{s^2 - s_m^2}} - \sigma\right) \quad (\varphi < \varphi_m)$$

Согласно (15) температура T, как функция σ при $\varphi < \varphi_m$ имеет максимум, равный

$$T_2\left(1+\frac{1}{(s^2-1)\,s_m^2}\right) \quad \text{при} \quad \sigma = \frac{1}{(s^2-1)\,s_m^2}$$

в то время как при $\varphi < \varphi_m$ $T(\sigma)$ монотонно убывает.

Тот факт, что изменение газодинамических величин за косой ударной волной носит совершенно различный характер при $\varphi > \varphi_m$ и $\varphi < \varphi_m$, может иметь важное значение в задаче об обтекании конечных тел химически реагирующим газом. Действительно, в этих случаях перед телом образуется искривленный скачок уплотнения, для которого угол φ с натекающим потоком может быть как меньше, так и больше φ_m. Линия тока, отвечающая $\varphi = \varphi_m$, отделяет за скачком области с различными газодинамическими свойствами. Поэтому можно высказать предположение, что вдоль этой линии возникает тангенциальный разрыв особого типа (устойчивый или неустойчивый), связанный исключительно с тем, что в газе происходят химические реакции.)

Следует иметь в виду, что в реальных случаях (при обтекании конечных тел) образуются косые ударные волны, принадлежащие только одному семейству. Например, в задаче об обтекании клина химически реагирующим газом, когда могут образоваться косые ударные волны с постулированными свойствами (плоский фронт, прямолинейные линии тока за скачком), следует, как обычно, считать, что все они принадлежат к слабому семейству ([1], стр. 507).

Отметим, что в этом случае связь угла раствора клина χ с углом между линией фронта и направлением потока φ дается известным уравнением ударной поляры ([1] стр. 411) для слабого семейства. Мы специализируем теперь полученные формулы для ударных волн в воздухе. Если температура T за фронтом не слишком велика, то, как легко показать, все химические процессы сводятся к реакциям

$$O_2 + M \underset{k'}{\overset{k}{\rightleftarrows}} O + O + M \quad (k = k_0 e^{-T_0/T}\ \text{см}^3/\text{сек},\ k_0 \approx T^{-2})$$

В этом случае следует принять

$$c_p = \frac{9}{2}k, \qquad \gamma = \frac{9}{7}, \qquad \sigma = \frac{13\cdot 10^3(\alpha_1-\alpha)}{T_2} \qquad (\alpha\text{—концентрация } O_2)$$

$$(\text{т. е. } s_m^2 = 8,\ \varphi_m = 70^\circ,\ \chi_m = 51.5^\circ)$$

Система (3) сводится теперь к одному уравнению, которое в основной стадии процесса диссоциации, когда можно пренебречь обратной реакцией

$$O + O + M \to\to O_2 + M,$$

имеет вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_0 n\alpha \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right) \qquad \left(n = \frac{p}{kT}\right) \tag{16}$$

Учитывая, что экспонента $e^{-T_0/T}$ меняется гораздо быстрее величин k_0, n и α, можно записать приближенное решение (16) в виде

$$t = \frac{T_2}{k_0(\alpha_1)\,n(\alpha_1)\,T_0\,(\ln T)_2'}\exp\left(-\frac{T_0}{T_2}\right) - \frac{T(\alpha)}{k_0 n\alpha\,(\ln T)'}, \ \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right) \tag{17}$$

Здесь

$$(\ln T)' = \frac{d\ln T}{d\alpha}, \qquad (\ln T)_2' = \left.\frac{d\ln T}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_1}$$

Если, в частности, относительное изменение температуры невелико, так что, например, для слабого семейства применимы формулы (11), (13), то уравнение (17) упрощается; его можно привести к виду

$$t = \frac{e^{T_0/T_2}}{k_0(\alpha_1)n_2 b}\left(\frac{e^{b(\alpha_1-\alpha)}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_1}\right) \qquad \left(b = \left(1+\frac{2}{s_m^2-s^2}\right)\frac{7.7\cdot 10^6}{T_2^2}\right) \tag{18}$$

При этом изменение давления описывается формулой

$$p = p_2\left(1 - \frac{s_m^2+1}{s_m^2-s^2}\sigma\right)$$

Автор благодарит Э. И. Андрианкина, Г. И. Баренблатта и Ю. П. Райзера за обсуждение результатов этой работы.

Поступила 2 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1953.