

УДК 532.61.096

## КОНВЕКЦИЯ МАРАНГОНИ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Е. П. Магденко

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия  
E-mail: magdenko\_evgeniy@icm.krasn.ru

Рассмотрена находящаяся в цилиндре конечного размера жидкость, в которой возникает неустойчивость Марангони. Верхняя граница жидкости свободна и деформируема. С использованием метода разделения переменных решена задача о возникновении конвекции в цилиндрическом контейнере. Получено однородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами и сложными граничными условиями. Для случая монотонных возмущений получено аналитическое выражение для критических чисел Марангони. Рассмотрен случай, когда жидкость в цилиндре находится в состоянии невесомости.

**Ключевые слова:** критические числа Марангони, деформируемая свободная плоская граница, конвекция, метод разделения переменных.

DOI: 10.15372/PMTF20160103

**Введение.** Неустойчивость Марангони развивается в жидкости, находящейся в нагретом снизу сосуде, если ее поверхностное натяжение зависит от температуры. Термокапиллярная нестабильность обнаружена и объяснена в работе [1], в которой с использованием линейной теории устойчивости показано, что если число Марангони  $Mn$  достигает некоторого критического значения, то система становится неустойчивой. В [1] также установлено, что число Марангони  $Mn$  зависит от числа Био  $Bi$  и капиллярного числа  $C$ , которые являются безразмерными аналогами коэффициента теплообмена на свободной поверхности и среднего поверхностного натяжения соответственно. В работе [1] рассмотрен случай, когда свободная поверхность в результате возмущений не деформируется, обнаружено, что при  $Bi = 0$  в отсутствие силы тяжести критическое значение  $Mn = 79,6$ .

В [2, 3] линейная теория устойчивости в задаче о конвекции Марангони была распространена на случай двухфазных сред и случаи, когда капиллярное число не равно нулю и действует сила тяжести. В работах [4, 5] рассмотрена задача о неустойчивости Марангони в цилиндре конечных размеров. В [4] полагалось, что жидкость обладает достаточно большим поверхностным натяжением, поэтому деформация свободной поверхности не учитывалась. Кроме того, в состоянии покоя и при наличии возмущения краевой угол принимался равным  $\pi/2$ . В [4] при решении задачи об устойчивости состояния механического равновесия методом разделения переменных предполагалось, что боковые стенки адиабатически изолированы, т. е. поток тепла и поток массы равны нулю, боковая поверхность считалась недеформируемой, а условие прилипания на ней заменялось условием равенства нулю тангенциальной скорости.

---

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 38 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00067).

© Магденко Е. П., 2016

В работе [5] рассмотрены два случая: 1) боковые стенки сосуда адиабатически теплоизолированы; 2) возмущение температуры равно нулю. В обоих случаях компоненты вектора скорости на боковой границе равны нулю, вследствие чего на этой границе метод разделения переменных неприменим, и поэтому задача о неустойчивости Марангони решалась численно.

В данной работе рассматривается цилиндр конечных размеров, в котором находится жидкость с верхней свободной плоской поверхностью, имеющей форму круга. В состоянии покоя краевой угол равен  $\pi/2$ . Поверхностное натяжение зависит от температуры. Цилиндрический контейнер небольших размеров, находящийся в поле силы тяжести, нагревается снизу. В тот момент, когда разность температур на основаниях достигает некоторого критического значения, внутри контейнера возникает движение, обусловленное наличием градиента температуры (эффект Марангони). Целью настоящей работы является определение зависимости критической разности температур от геометрии контейнера и физических параметров жидкости. Для этого рассматривается задача о малых возмущениях системы, линеаризованная относительно равновесного состояния. Предполагается, что возмущения монотонны; свободная поверхность является деформируемой, при этом краевой угол остается равным  $\pi/2$ ; на боковых стенках цилиндра выполняется условие просачивания жидкости, при этом общий поток через всю поверхность равен нулю (вынужденная конвекция отсутствует), возмущение температуры также обращается в нуль.

**Состояние механического равновесия.** Обозначим через  $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h, 0)$  область, которую занимает жидкость ( $a, h$  — радиус и высота цилиндра соответственно). В рамках модели Обербека — Буссинеска в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  состояние системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_0(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{g}\beta\Theta, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \Theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\Theta &= \chi \Delta\Theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости;  $p$  — отклонение давления жидкости от гидростатического;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\Theta = \Theta_{in} - \Theta_{out}$ ;  $\Theta_{out}$  — температура внешней среды;  $\Theta_{in}$  — температура жидкости;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  — вектор ускорения свободного падения;  $\rho_0$  — плотность жидкости при средних значениях температуры;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости;  $\chi$  — температуропроводность. Ниже рассматривается стационарный случай, когда контейнер заполнен покоящейся жидкостью с верхней свободной плоской границей, на которой задано условие теплообмена с окружающей средой (рис. 1). В состоянии покоя краевой угол равен  $\pi/2$ . В этом случае из (1) получаем

$$p_z = \rho_0 g \beta \Theta; \quad (2)$$

$$\Theta = Az + B, \quad (3)$$

где  $A, B$  — температурные коэффициенты. На свободной поверхности  $\Gamma$  ( $z = 0$ ), которая является плоской (круг), справедливы следующие условия [6]:

$$k \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma \Theta = 0; \quad (4)$$

$$(p_{out} - p)\mathbf{n} = \nabla_{\Gamma}\sigma, \quad V_n = 0. \quad (5)$$

Здесь  $k$  — теплопроводность;  $\gamma$  — коэффициент межфазного теплообмена;  $p_{out}$  — постоянное давление окружающей среды;  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  — единичный вектор нормали, направленный из области  $\Omega$  к границе  $\Gamma$ ;  $\nabla_{\Gamma}$  — поверхностный градиент;  $\sigma = \sigma_0 - \varkappa\Theta$  — поверхностное натяжение;  $\varkappa > 0$  — коэффициент в линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры;  $V_n$  — скорость перемещения свободной границы в направлении

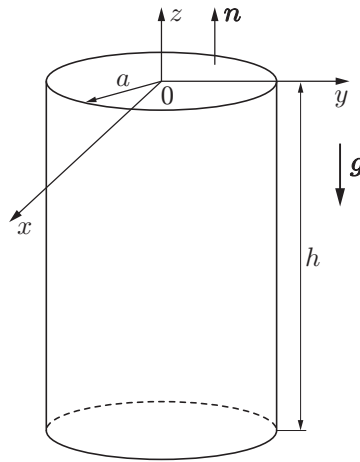


Рис. 1. Область решения задачи

вектора  $\mathbf{n}$ . На нижнем основании цилиндра задается температура  $\Theta_{1in}$ . Температурные коэффициенты вычисляются из условия теплового контакта (4):

$$A = -\frac{\text{Bi} \Theta_1}{(1 + \text{Bi})h}, \quad B = \frac{\Theta_1}{1 + \text{Bi}}. \quad (6)$$

Здесь  $\Theta_1 = \Theta_{1in} - \Theta_{out}$ ;  $\text{Bi} = \gamma h/k$  — число Био. Заметим, что  $\text{Bi} \neq 0$ , так как в противном случае  $\Theta = \text{const}$ , т. е. состояние равновесия и свободная поверхность будут изотермическими. В силу равенства (3) и первого равенства (5)  $\nabla_{\Gamma} \sigma = 0$  и давление квадратично зависит от  $z$ :

$$p = \rho_0 g \beta (Az^2/2 + Bz) + p_{out}.$$

Цилиндр нагревается снизу; в тот момент, когда разность температур на основаниях контейнера  $\Theta_1$  достигает некоторого критического значения, внутри сосуда возникает движение.

**Возмущенное решение.** При достижении некоторого критического значения  $\Theta_1$  возникает конвекция. С целью определения этого значения в рамках модели Обербека — Бусинеска (1) рассматривается линеаризованная относительно равновесного состояния (2)–(6) задача о малых возмущениях системы, решение которой ищется в виде нормальных волн:

$$(\mathbf{U}, P, T, R) = (\mathbf{U}(r, \varphi, z), P(r, \varphi, z), T(r, \varphi, z), N(r, \varphi)) \exp(-iCt).$$

Здесь  $P, T, \mathbf{U} = (U, V, W)$  — возмущение основного решения  $p, \Theta, \mathbf{u} = (u, v, w)$ ;  $R$  — нормальная составляющая вектора возмущений на свободной границе;  $N$  — отклонение свободной поверхности от начального положения в направлении вектора нормали;  $C$  — комплексный декремент. В случае монотонных возмущений ( $C = 0$ ) в безразмерных переменных (в качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно величины  $h, h^2/\nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость),  $\nu/h, \rho_0 \nu^2/h^2, Ah$ ) получаем

$$\begin{aligned} P_r &= U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} + U_{zz} - \frac{1}{r^2} U - \frac{2}{r^2} V_{\varphi}, \\ \frac{1}{r} P_{\varphi} &= V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + V_{zz} - \frac{1}{r^2} V + \frac{2}{r^2} U_{\varphi}, \\ P_z - \text{Gr} T &= W_{rr} + \frac{1}{r} W_r + \frac{1}{r^2} W_{\varphi\varphi} + W_{zz}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$U_r + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} V_\varphi + W_z = 0,$$

$$W = \frac{1}{\text{Pr}} \left( T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} + T_{zz} \right),$$

где  $\text{Gr} = g\beta Ah^4/\nu^2$  — число Грасгофа;  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля. На свободной границе ( $z = 0$ ), которая считается деформируемой, выполняются условия [6]

$$-P + 2W_z = \left( -\frac{\text{Gr}}{\text{Bi}} + \text{Ga} \right) N + \text{We} \left( N_{rr} + \frac{1}{r} N_r + \frac{1}{r^2} N_{\varphi\varphi} \right),$$

$$W_r + U_z = -\frac{\text{Mn}}{\text{Pr}} (N_r + T_r), \quad V_z + \frac{1}{r} W_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\text{Mn}}{\text{Pr}} (N_\varphi + T_\varphi), \quad (8)$$

$$T_z + \text{Bi} (T + N) = 0, \quad W = 0,$$

где  $\text{Ga} = gh^3/\nu^2$  — число Галилео;  $\text{We} = \sigma h/(\rho_0 \nu^2)$  — число Вебера;  $\text{Mn} = \kappa Ah^2/(\rho_0 \nu \chi)$  — число Марангони. Заметим, что в силу (6) числа Марангони и Грасгофа прямо пропорциональны искомой разности температур на нижнем и верхнем основаниях цилиндра. Выразив  $\text{Gr}$  через  $\text{Mn}$ , получаем

$$\text{Gr} = \frac{g\beta h^2 \rho_0}{\kappa \text{Pr}} \text{Mn}. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению зависимости числа Марангони от физических параметров жидкости, находящейся в цилиндре, и от геометрии контейнера.

Условия на нижнем основании ( $z = -1$ ) имеют вид

$$U(r, -1) = V(r, -1) = W(r, -1) = 0, \quad T(r, -1) = 0. \quad (10)$$

На боковой поверхности ( $r = 1/\alpha$ ,  $\alpha = h/a$ ) выполняются условия

$$U(\alpha^{-1}, z) \neq 0, \quad V(\alpha^{-1}, z) = 0, \quad W(\alpha^{-1}, z) = 0, \quad T(\alpha^{-1}, z) = 0, \quad (11)$$

т. е. жидкость может просачиваться в направлении нормали к стенке, при этом ее общий поток через боковую поверхность равен нулю. Также выполняется условие сохранения объема жидкости в сосуде.

Задача (7), (8), (10), (11) допускает разделение переменных

$$U = \cos(s\varphi) R_r(r) F_z(z), \quad V = -\frac{s}{r} \sin(s\varphi) R(r) F_z(z), \quad (12)$$

$$W = m^2 \cos(s\varphi) R(r) F(z), \quad T = m^2 \cos(s\varphi) R(r) D(z);$$

$$P = m^2 \cos(s\varphi) R(r) \Psi(z),$$

где  $s$  — азимутальное волновое число,

$$R = R_n(r) = J_s(mr), \quad (13)$$

$m = \alpha \delta_{sn}$ ;  $\delta_{sn}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — решение уравнения

$$J_s(\delta_s) = 0. \quad (14)$$

Из (13), (14) следует, что условия для возмущения температуры и касательной скорости на боковой поверхности заведомо выполнены. Также заметим, что согласно (11), (12) величина  $N$  пропорциональна  $R(r)$ , т. е.

$$N \equiv N_0 m^2 \cos(s\varphi) J_s(mr)$$

( $N_0$  не зависит от переменных  $\varphi, r$ ).

Подставляя выражения (12) в уравнения (7), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка

$$\frac{1}{\text{Pr}} L^3 D - m^2 \text{Gr} D = 0, \quad (15)$$

где  $L = d^2/dz^2 - m^2$ . В результате функция  $D$  определяется с точностью до шести постоянных, которые вычисляются из семи граничных условий ( $N_0$  входит в число неизвестных постоянных) (8), (10), функция  $F(z)$  определяется из уравнения

$$F = \frac{1}{\text{Pr}} LD, \quad (16)$$

функция  $\Psi(z)$  имеет вид

$$\Psi(z) = F_{zzz} - m^2 F_z.$$

**Зависимость числа Марангони от геометрии контейнера и физических параметров жидкости.** Решение уравнения (14) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} D = & \frac{H_1}{3m^2} \left( \frac{8(\text{ch}(\lambda_1 z) - \cos(\lambda_3 z) \text{ch}(\lambda_2 z) - \sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{sh}(\lambda_2 z))}{b^2} + \right. \\ & \left. + \frac{4\sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{sh}(\lambda_2 z)}{b} \right) + \\ & + \frac{H_2}{3m^2} \left( \frac{8(\text{ch}(\lambda_1 z) - \cos(\lambda_3 z) \text{sh}(\lambda_2 z) - \sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{ch}(\lambda_2 z))}{b^2} + \frac{4\sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{ch}(\lambda_2 z)}{b} \right) + \\ & + \frac{H_3}{3mb} \frac{4\sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{ch}(\lambda_2 z)}{b} + \frac{H_4}{3m} \frac{4\sqrt{3} \sin(\lambda_3 z) \text{sh}(\lambda_2 z)}{b} + \\ & + H_5 \text{ch}(\lambda_1 z) + H_6 \text{sh}(\lambda_1 z). \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_1 = m(1+b)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} m \left[ 1 - \frac{b}{2} + ((1-b)^2 + b)^{1/2} \right]^{1/2}, \\ \lambda_3 = \frac{mb\sqrt{6}}{4[1 - b/2 + ((1-b)^2 + b)^{1/2}]^{1/2}}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{\text{Pr Gr}}{m^4}}, \end{aligned}$$

$H_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) — неизвестные, не зависящие от  $z$ . Используя (16), находим функцию  $F(z)$ , а затем, подставляя найденное решение в условия (8), (10), получаем систему уравнений, однородную относительно неизвестных  $N_0$  и  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Нетривиальное решение данной системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Это позволяет, проведя соответствующие аналитические вычисления в системе Maple, показать, что числа Марангони зависят от геометрии контейнера и физических параметров жидкости. Формула, выражающая эту зависимость, является громоздкой и в данной работе не приводится.

Рассмотрим случай, когда в сосуде находится трансформаторное масло, имеющее следующие физические параметры:  $\rho_0 = 0,86 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 18,49 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\chi = 1,21 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $k = 0,63519 \cdot 10^{-4}$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\beta = 0,7 \cdot 10^{-3}$  К<sup>-1</sup>,  $\varkappa = 0,0022$  Н/(м·К),  $\sigma = 3,81 \cdot 10^{-2}$  Н/м.

В табл. 1–6 приведены зависимости критического числа Марангони  $\text{Mn}$  от параметров  $\delta_{sn}$ ,  $\alpha$ ,  $\text{Ga}$ ,  $\text{Bi}$ ,  $\text{We}$ . Из табл. 1–6 следует, что при увеличении номера  $n$  корня функции Бесселя, порядка  $s$  этой функции (значение  $s = 0$  соответствует осесимметричному случаю), при  $\alpha \geq 1$ , при увеличении значения числа Био и при  $\text{We} \leq 129,58$  критические значения числа Марангони возрастают по модулю. Увеличение  $\text{Ga}$  (см. табл. 4) приводит к незначительному уменьшению значения  $|\text{Mn}|$ .

Таблица 1

Зависимость критического числа Марангони от корня функции Бесселя и его номера при  $We = 129,58, Ga = 29,25, \alpha = 1, Bi = 2$

$n$	$\delta_{1n}$	Mn
1	3,8317	-197,81
2	7,0156	-506,47
3	10,1735	-990,74
4	13,3237	-1633,31
5	16,4706	-2433,75
10	32,1897	-8804,33
15	47,9015	-18 493,01

Таблица 2

Зависимость критического числа Марангони от порядка функции Бесселя при  $We = 129,58, Ga = 29,25, \alpha = 1, Bi = 2$

$s$	$\delta_{s1}$	Mn
0	2,40	-145,65
1	3,83	-197,81
2	5,14	-298,30
3	6,38	-428,87
4	7,59	-582,27
5	8,77	-755,85
6	9,94	-948,75

Таблица 3

Зависимость критического числа Марангони от параметра  $\alpha$  при  $We = 129,58, Ga = 29,25, \delta_{11} = 3,8317, Bi = 2$

$\alpha$	Mn
0,4	-161,749 43
0,8	-160,743 25
1,0	-197,814 38
2,0	-592,602 41
4,0	-2124,485 95
10,0	-12 358,615 56

Таблица 4

Зависимость критического числа Марангони от числа Галилео при  $Bi = 2, We = 129,58, \delta_{11} = 3,8317, \alpha = 1$

Ga	Mn
$2,925 \cdot 10^{-7}$	-203,171 70
$2,925 \cdot 10^{-3}$	-197,860 14
0,2925	-197,857 80
29,250	-197,814 38

Таблица 5

Зависимость критического числа Марангони от числа Вебера при  $Bi = 2, Ga = 29,25, \delta_{11} = 3,8317, \alpha = 1$

We	Mn
1,2958	-134,464 51
12,9580	-189,728 60
129,5800	-197,814 38
1295,8000	-191,864 42

Таблица 6

Зависимость критического числа Марангони от числа Био при  $We = 129,58, Ga = 29,25, \delta_{11} = 3,8317, \alpha = 1$

Bi	Mn
1	-163,921 47
2	-197,814 38
5	-299,476 93
10	-468,859 80

Приведенные результаты расчетов соответствуют диапазону значений параметра Буссинеска  $\beta\Theta_1$  и числа Грасгофа Gr, для которых справедлива модель Обербека — Буссинеска [7], т. е. при  $\beta\Theta_1 \rightarrow 0$  ( $\Theta_1$  — характерная разность температур нижней стенки цилиндра и воздуха) и конечном числе Грасгофа (см. (9)). Так как коэффициент теплового расширения жидкости фиксирован ( $\beta = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ), то чем меньше критическое значение разности температур  $\Theta_1$ , тем меньше значения параметра  $\beta\Theta_1$ . Из формулы для числа Марангони находим  $\Theta_1 = \rho_0 \nu \chi (1 + Bi) Mn / (\varkappa h Bi)$ . Таким образом, при фиксированной высоте цилиндра значение  $\Theta_1$  уменьшается при уменьшении значения Mn. Из табл. 1 следует, что при максимальном по модулю критическом значении числа Марангони  $|Mn| = 18 493,01$   $\Theta_1 = 2426,03 \text{ K}$ , поэтому  $\beta\Theta_1 \approx 1,698$ ,  $Gr \approx -33,16$ . При  $|Mn| = 12 358,615 56$  (см. табл. 3)  $\beta\Theta_1 < 1$ . При минимальном по модулю критическом значении числа Марангони  $|Mn| = 145,65$  (см. табл. 2)  $\Theta_1 = 19,11 \text{ K}$ , значит,  $\beta\Theta_1 \approx 0,013$ ,

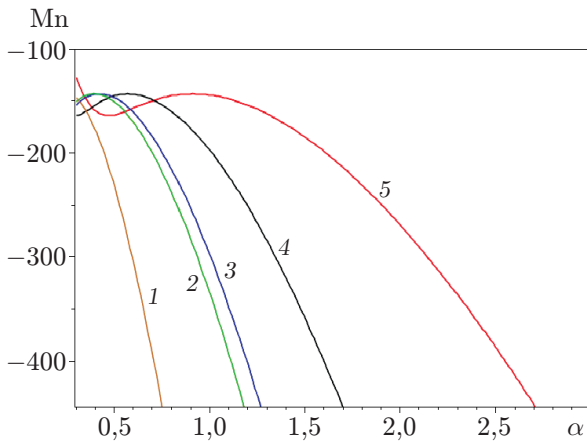


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость числа Марангони от  $\alpha$  при  $We = 10^4$ ,  $Bi = 2$ :

1 —  $s = 0$ ,  $\delta_{01} = 8,654$ ; 2 —  $s = 0$ ,  $\delta_{02} = 5,52$ ; 3 —  $s = 2$ ,  $\delta_{21} = 5,135$ ; 4 —  $s = 1$ ,  $\delta_{11} = 3,8317$ ; 5 —  $s = 0$ ,  $\delta_{01} = 2,4048$

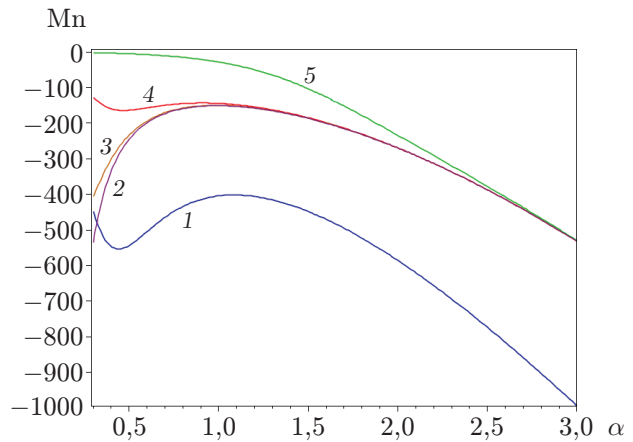


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость числа Марангони от  $\alpha$  при  $s = 0$ ,  $\delta_{01} = 2,4048$ :

1 —  $Bi = 10$ ,  $We = 10^4$ ; 2 —  $Bi = 2$ ,  $We = \infty$ ; 3 —  $Bi = 2$ ,  $We = 10^5$ ; 4 —  $Bi = 2$ ,  $We = 10^4$ ; 5 —  $Bi = 2$ ,  $We = 10^2$

$Gr \approx -0,26$ . Из формулы для  $\Theta_1$  и результатов, приведенных в табл. 5, следует, что с увеличением высоты цилиндра, т. е. с увеличением значения  $We$  значение параметра Буссинеска уменьшается. Так, при  $We = 1295,8$  получаем  $\beta\Theta_1 \approx 1,76 \cdot 10^{-3}$ ,  $Gr \approx -34,36$ . Заметим, что температура застывания трансформаторного масла находится в диапазоне  $208,15 \div 228,15$  К, температура вспышки — в диапазоне  $430,15 \div 423,15$  К, а температура самовоспламенения — в диапазоне  $623,15 \div 673,15$  К.

На основе изложенного выше можно сделать следующий вывод: чтобы для данной жидкости параметр  $\beta\Theta_1$  стремился к нулю ( $\beta\Theta_1 \rightarrow 0$ ) и при этом значение  $Gr$  оставалось конечным, необходимо изменять геометрию контейнера, а именно уменьшать отношение высоты цилиндра к его радиусу (параметр  $\alpha$ ), либо увеличивать высоту цилиндра при фиксированном значении  $\alpha$ .

Предположим, что  $g = 0$ . Тогда решение уравнения (15) имеет вид

$$D = (H_1 z^2 + H_3 z + H_5) \operatorname{ch} mz + (H_2 z^2 + H_4 z + H_6) \operatorname{sh} mz, \quad (18)$$

где  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) — некоторые неизвестные постоянные. Заметим, что при  $g \rightarrow 0$  решение (17) совпадает с (18). Вычислив  $F(z)$  по формуле (16), с использованием условий (8), (10) получаем систему уравнений, которая является алгебраической относительно постоянных. Нетривиальное решение системы уравнений существует тогда и только тогда, когда ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это позволяет найти критические значения числа Марангони. В результате аналитических вычислений, выполненных в системе Maple, получаем

$$\operatorname{Mn} = \frac{8m(\operatorname{Bi} \operatorname{sh} m + m \operatorname{ch} m)(m - \operatorname{sh} m \operatorname{ch} m)}{m^3 \operatorname{ch} m - \operatorname{sh}^3 m - 8m^3 \operatorname{ch} m (\operatorname{Pr} We)^{-1}}. \quad (19)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если  $a \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  и при этом  $m = h\delta_{sn}/a \rightarrow m_0 = \operatorname{const}$ , то выражение (19) совпадает с выражением для числа Марангони в случае бесконечного слоя [8].

Рассмотрим случай, когда в цилиндрическом контейнере расположено трансформаторное масло, физические параметры которого приведены выше. На рис. 2, 3 представлена

зависимость числа Марангони от физических параметров жидкости и геометрии контейнера при  $0,3 \leq \alpha \leq 3,0$ . Анализ рис. 2 показывает, что с увеличением азимутального числа (кривые 3–5) и номера корня функции Бесселя (кривые 1, 2, 5) критическое значение разности температур увеличивается. Анализ кривых 2–5 на рис. 3 позволяет сделать вывод, что чем больше значение числа Вебера, тем больше значение числа Марангони, но при  $We \geq 10^5$  влияние данного параметра на  $Mn$  уменьшается. Кроме того, при увеличении  $\alpha$  кривые 3–5 сближаются с кривой 2. Также можно заметить, что с увеличением числа Био увеличивается критическая разность температур.

Из результатов сравнения данных, приведенных в табл. 5 и на рис. 2 (кривая 4), следует, что если жидкость находится в поле силы тяжести, то значения числа Марангони при малых  $g$  и  $g = 0$  совпадают.

Таким образом, зная геометрию контейнера и физические параметры жидкости, находящейся в нем, можно определить критическое значение разности температур, при котором возникает конвекция.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за постановку задачи и ценные советы при проведении настоящего исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Pearson J. R. A.** One convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489–500.
2. **Scriven L. E., Sternling C. V.** On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 321–340.
3. **Smith K. A.** On convective instability induced by surface-tension gradients // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, pt 2. P. 401–414.
4. **Rosenblat S., Davis S. H., Homsy G. M.** Nonlinear Marangoni convection in bounded layers. 1. Circular cylindrical containers // J. Fluid Mech. 1982. V. 120. P. 91–122.
5. **Dauby P. C., Lebon G., Bouhy E.** Linear Bénard — Marangoni instability in rigid circular containers // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 520–530.
6. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
7. **Зейтунян Р. Х.** Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара — Марангони // Успехи физ. наук. 1998. Т. 169, вып. 3. С. 259–286.
8. **Рябицкий Е. А.** Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 1. С. 6–10.

*Поступила в редакцию 5/III 2014 г.,  
в окончательном варианте — 14/X 2014 г.*