

УДК 537.84

## **Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля**

**А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков**

*Алтайский государственный университет, Барнаул*

E-mail: runme5@ngs.ru

Рассмотрена устойчивость к малым возмущениям течения в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля. Исследованная конфигурация канала состоит из двух бесконечных коаксиальных цилиндров, между которыми помещена слабоэлектропроводящая вязкая несжимаемая жидкость, которая движется под действием осевого градиента давления. Азимутальное магнитное поле создается током, протекающим по центральному цилиндру, а продольное — внешним соленоидом. Использовано магнитогидродинамическое приближение. Обнаружено, что внесение азимутального магнитного поля может приводить к дестабилизации течения по сравнению со случаем только продольного магнитного поля.

**Ключевые слова:** магнитная гидродинамика, гидродинамическая устойчивость, вязкая жидкость.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Исследование ламинарно-турбулентного перехода в электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля представляет значительный интерес. Это связано с широкой распространенностью электропроводящих сред: жидких металлов, ионизованного газа, плазмы, электролитов, а также МГД течений в трубах — в проточных частях МГД-генераторов, плазмотронов, бланкетов токамаков. С помощью магнитного поля можно эффективно управлять устойчивостью МГД-течений таких жидкостей.

Переход к турбулентности или новым ламинарным течениям непосредственно связан с потерей устойчивости ламинарного потока. Наиболее исследована и теоретически обоснована линейная устойчивость параллельных течений в каналах. Однако несмотря на очень большой объем публикаций по данному вопросу, исчерпывающие результаты получены только в единичных случаях. Это связано со значительной трудностью решения задач гидродинамической устойчивости, которые, к тому же, обычно не поддаются аналитическим методам. Численное решение таких задач также может быть сопряжено со значительными трудностями. Для их решения используются специальные численные методы. Наиболее исследованными оказались течения между параллельными бесконечными плоскостями (течения в плоском канале): Пуазейля, Гартмана, Куэтта и некоторые другие.

© Проскурин А.В., Сагалаков А.М., 2009

Параллельное течение в трубе кольцевого сечения в присутствии внешнего продольного магнитного поля исследовалось в работах [5, 6, 8]. В настоящей работе исследуется устойчивость данного течения в присутствии внешнего спирального магнитного поля, азимутальная компонента которого создается током, протекающим по центральному цилиндру. В работе [7] отмечалось, что внесение азимутального магнитного поля при наличии продольного может приводить к уменьшению критических чисел Рейнольдса течения в трубе кольцевого сечения. В настоящей статье эти результаты значительно расширены.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой слабо электропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля. Обозначим: радиусы цилиндра —  $r_{\text{in}}$  (внутренний) и  $r_{\text{ex}}$  (наружный),  $d = r_{\text{ex}} - r_{\text{in}}$  — величина зазора между цилиндрами,  $\xi = r_{\text{in}}/d$  — безразмерный радиус внутреннего цилиндра (далее в качестве масштаба длины принята величина зазора между цилиндрами). Параметр  $\xi$  определяет геометрию канала: большие  $\xi$  соответствуют малому зазору между цилиндрами, малые  $\xi$  — большому.

Между цилиндрами под действием постоянного продольного градиента давления протекает слабоэлектропроводящая вязкая жидкость со средней по расходу скоростью  $V_a$ . Введем цилиндрическую систему координат: ось  $z$  направлена вдоль оси цилиндров,  $r$  — радиальная,  $\varphi$  — азимутальная координаты.

В настоящей работе рассматривается стационарное течение, возникающее под действием осевого градиента давления. Продольную компоненту скорости стационарного течения обозначим  $V_0(r)$ . Удобно ввести безразмерную скорость  $U(r) = V_0(r)/V_a$ , используя в качестве масштаба скорости среднерасходную скорость  $V_a$ , которая прямо пропорциональна градиенту давления:

$$U = ar^2 + b \ln(r) + c, \quad (1)$$

$$a = \frac{2 \ln(1+1/\xi)}{1+2\xi - (1+2\xi + 2\xi^2) \ln(1+1/\xi)}, \quad b = -a \frac{1+2\xi}{\ln(1+1/\xi)},$$

$$c = a \frac{\ln(\xi)(1+2\xi)}{\ln(1+1/\xi)},$$

где  $U$  — продольная компонента скорости,  $a, b, c$  — коэффициенты, зависящие от  $\xi$ .

Продольная составляющая магнитного поля  $H_{0z}$  однородна и направлена вдоль оси цилиндров. Азимутальная составляющая внешнего магнитного поля  $H_{0\varphi}$  создается электрическим током, протекающим по центральному цилиндру. Таким образом, внешнее магнитное поле можно представить в виде

$$H_{0z} = H_0 \cos \theta, \quad (2)$$

$$H_{0\varphi} = \frac{H_0 \sin \theta r_{\text{ex}}}{r}, \quad r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}], \quad (3)$$

где  $\theta$  — угол между вектором напряженности магнитного поля на внешней стенке и осью трубы,  $H_0$  — модуль напряженности внешнего магнитного поля на внешней границе канала, выбранный в качестве характеристического масштаба напряженности внешнего магнитного поля. Для перехода к безразмерным величинам

в формулах (2)–(3) следует положить  $H_0 = 1$ . Магнитное поле (2)–(3) не вызывает деформации профиля скорости (1).

Система уравнений магнитной гидродинамики (см., например, [9]) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} = (H\nabla)\mathbf{V} + (1/\text{Re}_m)\Delta\mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla\left(p + \text{Al}\frac{H^2}{2}\right) + \text{Al}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{V}, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

где  $\text{Al} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_a^2}$  — число Альфвена,  $\text{Re}_m = V_a d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$  — магнитное число Рей-

нольдса,  $\text{Re} = \frac{V_a d}{\nu}$  — число Рейнольдса,  $c$  — скорость света,  $d$  — ширина зазора

между цилиндрами (принята в качестве масштаба длины),  $\sigma$  — электропроводность жидкости,  $V_a$  — среднерасходная скорость (принята в качестве масштаба скорости),  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $H_0$  — модуль напряженности внешнего магнитного поля на внешней границе канала (принята в качестве масштаба напряженности магнитного поля). Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например,  $\text{Al}$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Re}_m$ ) полностью определяют поведение системы при заданных граничных условиях. Введем также обобщенное давление  $P = p + \text{Al}(H^2/2)$ .

Решение системы уравнений (4)–(7) представим в виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (9)$$

$$P = P_0 + P, \quad (10)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $P_0$  — стационарное решение, а вторые слагаемые — возмущения скорости, поля и давления. Подставим (8)–(10) в уравнения (4)–(7). После линеаризации получим:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{\text{Re}_m}\Delta\mathbf{h}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + \text{Al}(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + \text{Al}(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{H}_0 + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{v}, \quad (12)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (13)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (14)$$

Устойчивость рассматриваемого течения будем исследовать в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Для перехода к пределу  $\text{Re}_m \rightarrow 0$  в уравнениях (11)–(14), следуя [10], представим возмущения магнитного поля, скорости и давления в виде рядов по  $\text{Re}_m$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \text{Re}_m\mathbf{v}_1 + \dots$ ,  $\mathbf{h} = \text{Re}_m\mathbf{h}_1 + \text{Re}_m^2\mathbf{h}_2 + \dots$  ( $\mathbf{h} = 0$  при

$\text{Re}_m = 0$ ),  $P = P_0 + \text{Re}_m P_1 + \text{Re}_m^2 P_2 + \dots$ . Оставляя в уравнениях (11)–(14) только члены нулевого порядка малости по  $\text{Re}_m$ , получим:

$$(\mathbf{v}\nabla) \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + \Delta\mathbf{h}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{H}_0 + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (17)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (18)$$

Здесь индексы “0” и “1” опущены. Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \mathbf{h} = 0. \quad (19)$$

Решения системы (15)–(17) будем искать в виде

$$\{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} \exp^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (20)$$

где  $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z, h_r, h_\varphi, h_z$  — радиальная, азимутальная, осевая комплексные компоненты возмущений скорости и напряженности магнитного поля,  $q$  — возмущение давления,  $\alpha$  — продольное волновое число,  $m$  — азимутальное волновое число ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),  $C = X + iY$  — комплексная фазовая скорость, в которой  $X$  — собственно фазовая скорость, а  $\alpha Y$  — декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ).  $Y = 0$  соответствует нейтральным возмущениям. Минимальное число Рейнольдса, при котором наблюдаются нейтральные возмущения, называется критическим числом Рейнольдса по линейной теории  $\text{Re}$ .

В результате получаем (штрихи в формулах означают дифференцирование по  $r$ )

$$D\omega_r = -q' + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}(H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})h_r - 2\frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}\frac{H_{0\varphi}}{r}h_\varphi - \frac{1}{\text{Re}}\left[i\alpha\omega_z' + \frac{\gamma}{r}(r\omega_\varphi)'\right], \quad (21)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}(H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})h_\varphi + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}\left(H_{0\varphi}' + \frac{H_{0\varphi}}{r}\right)h_r + \frac{1}{\text{Re}}\left[\left(\frac{(r\omega_\varphi)'}{r}\right)' + \frac{2\gamma}{r}\omega_r\right], \quad (22)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}(H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})h_z + \frac{1}{\text{Re}}\frac{(r\omega_z)'}{r}, \quad (23)$$

$$\Omega h_r = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})\omega_r - \left[i\alpha h_z' + \frac{\gamma}{r}(rh_\varphi)'\right], \quad (24)$$

$$\Omega h_\varphi = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})\omega_\varphi - \omega_r\left(H_{0\varphi}' - \frac{H_{0\varphi}}{r}\right) + \left[\left(\frac{(rh_\varphi)'}{r}\right)' + \frac{2\gamma}{r}h_r\right], \quad (25)$$

$$\Omega h_z = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z})\omega_z + \frac{(rh_z)'}{r}, \quad (26)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z, \quad (27)$$

где  $D = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{\text{Re}^2} + \frac{\alpha^2}{\text{Re}}$ ,  $\Omega = \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2$ ,  $\gamma = \frac{im}{r}$ . Как отмечено в [12],

$\text{div } \mathbf{h} = 0$  удобно использовать вместо одной из проекций уравнения индукции. Вместо уравнения (26) запишем

$$\frac{(rh_r)'}{r} = -\gamma h_\varphi - i\alpha h_z, \quad (28)$$

и введем обозначения:

$$\begin{aligned} B &= r\omega_r, & \Psi &= rh_\varphi, \\ K &= r\omega_\varphi, & M &= \frac{\Psi'}{r} = \frac{(rh_\varphi)'}{r}, \\ Z &= r\omega'_z, & S &= rh_r, \\ \Phi &= \frac{K'}{r} = \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}, & E &= H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}. \end{aligned} \quad (29)$$

После этого систему (21)–(27) преобразуем к виду:

$$\frac{D}{r}B = -q' + \frac{\text{Ha}^2 E}{r \text{Re}} S - \frac{i\alpha}{r \text{Re}} Z - \frac{\gamma}{\text{Re}} \Phi - 2 \frac{\text{Ha}^2 H_{0\varphi}}{\text{Re}} \frac{1}{r^2} \Psi, \quad (30)$$

$$\frac{D}{r}K = -\gamma q + \frac{\text{Ha}^2 E}{r \text{Re}} \Psi + \frac{\text{Ha}^2 (H'_{0\varphi} + (H_{0\varphi}/r))}{r \text{Re}} S + \frac{1}{\text{Re}} \Phi' + \frac{2\gamma}{r^2 \text{Re}} B, \quad (31)$$

$$D\omega_z + U' \frac{B}{r} = -i\alpha q + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} E h_z + \frac{1}{r \text{Re}} Z', \quad (32)$$

$$\frac{\Omega}{r} S = \frac{E}{r} B - i\alpha h'_z - \gamma M, \quad (33)$$

$$\frac{\Omega}{r} \Psi = \frac{E}{r} K - \frac{(H'_{0\varphi} - (H_{0\varphi}/r))}{r} B + M' + \frac{2\gamma}{r^2} S, \quad (34)$$

$$\frac{S'}{r} = -\frac{\gamma}{r} \Psi - i\alpha h_z, \quad (35)$$

$$\frac{B'}{r} = -\frac{\gamma}{r} K - i\alpha\omega_z, \quad \omega'_z = \frac{Z}{r}, \quad (36)$$

$$K' = \Phi r, \quad \Psi' = M r. \quad (37)$$

Систему уравнений (30)–(37) удобно записать в матричной форме:

$$W' = M_1 W + M_2 V, \quad (38)$$

$$V' = M_3 W + M_4 V, \quad (39)$$

$$W = \{B, K, \omega_z, \Psi, S\}, \quad V = \{q, \Phi, Z, h_2, M\},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & -i\alpha r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha r & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -D/r & 0 & 0 & 2 \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \frac{H_{0\varphi}}{r^2} & \frac{(\text{Ha}^2/\text{Re})E}{r} \\ -2\gamma/r^2 & \frac{D\text{Re}}{r} & 0 & -\frac{E\text{Ha}^2}{r\text{Re}} & -\frac{\text{Ha}^2 \text{Re}(H'_{0\varphi} + (H_{0\varphi}/r))}{r\text{Re}} \\ U'\text{Re} & 0 & Dr\text{Re} & 0 & 0 \\ -\frac{iE}{\alpha r} & 0 & 0 & 0 & \frac{i\Omega}{\alpha r} \\ \frac{(H'_{0\varphi} - (H_{0\varphi}/r))}{r} & -\frac{E}{r} & 0 & \Omega/r & -\frac{2\gamma}{r^2} \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{\text{Re}} & \frac{-i\alpha}{r\text{Re}} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha r\text{Re} & 0 & 0 & -E \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} r\text{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\gamma}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия прилипания и непроницаемости на стенках канала, а также обращения в нуль возмущения магнитного поля имеют вид:

$$\omega = 0, \quad h = 0 \quad \text{при } r = \xi, \xi + 1. \quad (40)$$

Система уравнений (38)–(39) с граничными условиями (40) определяет задачу на отыскание собственных значений  $C$ .

#### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

При проведении массовых расчетов использовался метод дифференциальной прогонки, описанный в работах [10, 11]. Преимуществами этого метода являются его относительная простота, универсальность и высокая эффективность. Кроме того, его отличает высокая надежность получаемых результатов.

При использовании метода дифференциальной прогонки задача на собственные значения сводится к последовательности задач Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко интегрируется численно. Одновременно организуется итерационный процесс. Собственные значения определяются при прямой прогонке. После определения собственного значения соответствующую собственную функцию можно найти обратной прогонкой.

Проведенные численные эксперименты позволили выбрать наиболее подходящую для данной задачи схему дифференциальной прогонки. Было выяснено, что

схема, определенная непосредственно граничными условиями, неоптимальна в средней части канала. Поэтому только на небольших расстояниях от границ канала прогонка велась по схеме

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{V}, \quad (41)$$

определенной граничными условиями, а далее использовалась “обращенная” схема прогонки

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{W}. \quad (42)$$

Системы дифференциальных уравнений для матриц  $A$  и  $B$  можно получить, продифференцировав (41), (42) и подставив в них (38), (39). Находим:

$$A' = M_1 A + M_2 - A(M_3 A + M_4), \quad (43)$$

$$B' = M_3 + M_4 B - B(M_2 B + M_1). \quad (44)$$

Интегрирование уравнений (43), (44) велось методом Рунге–Кутты от границ канала к некоторой средней точке, в которой, так же как и в точках инверсии матрицы  $A$ , векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$  должны быть непрерывны, что позволяет записать дисперсионное соотношение в виде

$$\det(B^+(C) - B^-(C)) = 0, \quad (45)$$

где знаками  $+$  и  $-$  обозначены прогоночные коэффициенты  $B$ , полученные интегрированием их от разных границ канала. Уравнение (45) решалось итерационным методом (методом секущих) по схеме:

$$C_{n+1} = C_n - V_n \frac{C_n - C_{n-1}}{V_n - V_{n-1}}, \quad V_n = \det(B^+(C_n) - B^-(C_n)). \quad (46)$$

Собственные функции не исследовались.

#### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для сравнения результатов с экспериментом удобно использовать число Гартмана. На рис. 1 приведены зависимости  $Re_*$  ( $Ha$ ) при  $\theta = 0$  (случай только продольного магнитного поля),  $\xi = 10$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ . С увеличением числа Гартмана критические числа Рейнольдса увеличиваются, а критические числа мод  $m = 0, 1, 2, 3$  совпадают в пределах погрешности изображения. На рис. 2 представлен случай только азимутального магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ) при  $\xi = 10$ . Мода  $m = 0$  с азимутальным магнитным полем не взаимодействует, моды  $m = \pm 1, \pm 2$  монотонно возрастают при увеличении числа Гартмана. На рис. 3,  $a, b$  приведены зависимости  $Re_*$  ( $\theta$ ) при  $\xi = 10$ ,  $Ha = 50, 200$  соответственно. На графиках

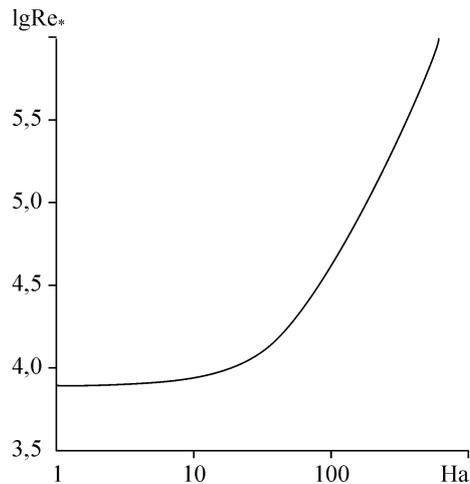


Рис. 1. Зависимости  $Re_*$  ( $Ha$ ) при  $\theta = 0$ ,  $\xi = 10$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ .

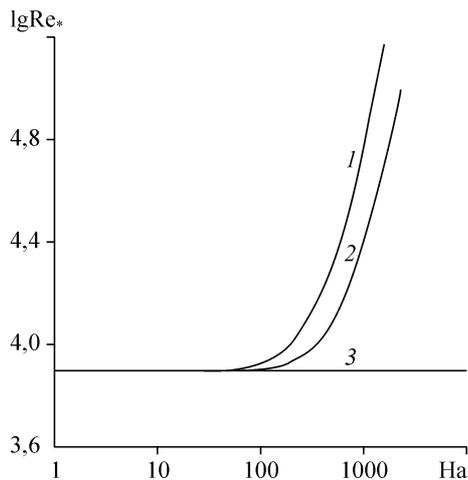


Рис. 2. Зависимости  $Re_*$  ( $Ha$ ) при  $\theta = \pi/2$ ,  $\xi = 10$ .  
Моды  $m = \pm 1$  (1),  $\pm 2$  (2), 0 (3).

наблюдается сложное поведение кривых в отличие от случаев только продольного и только азимутального магнитных полей. В частности, критические числа мод с  $m < 0$  заметно меньше, чем при  $m > 0$ . С увеличением  $\theta$  кривые  $m \geq 0$  убывают, а кривые  $m < 0$  сначала также убывают, а потом несколько возрастают и при  $\theta = \pi/2$  сливаются с парными положительными модами.

Интересны зависимости  $Re_*$  ( $\xi$ ) при  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ , приведенные на рис. 4, а, с. В продольном магнитном поле ( $\theta = 0$ ) кривые критических зависимостей имеют классический вид [10]. В винтовом магнитном поле при  $Ha = 150$ ,  $\theta = \pi/4$  рассматриваемое течение менее устойчиво за счет дестабилизирующего влияния мод с отрицательными азимутальными волновыми числами. На рис. 4, б выборочно приведены моды от  $m = -1$  до  $m = -11$ , по которым можно определить основную закономерность изменения критических чисел при увеличении  $m$ : моды с большими азимутальными номерами стабилизируются при уменьшении параметра  $\xi$ , поэтому для анализа устойчивости при небольших  $\xi$  достаточно ограничиться рассмотрением нескольких первых азимутальных мод с положительными и отрицательными  $m$ . Вид кривых критических зависимостей на рис. 4, с существенно отличается от зависимостей рис. 4, а, моды  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  не имеют характерных минимумов при небольших значениях параметра  $\xi$ . Такое течение более устойчиво к малым возмущениям при малых  $\xi$  по сравнению со случаем винтового поля. На рис. 5 выборочно приведены зависимости  $Re_*$  ( $Ha$ ) при  $\theta = \pi/4$ ,  $\xi = 4$ . Анализ устойчивости течения при данных параметрах показал, что наиболее опасны моды  $m = -4$  и  $m = -5$ . При дальнейшем увеличении  $m$  ( $m = -6, -7$ ) азимутальные моды

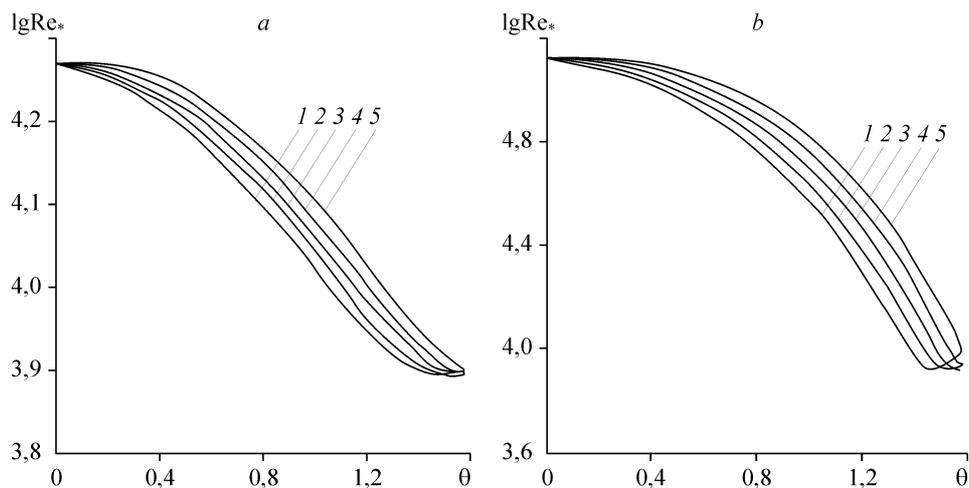
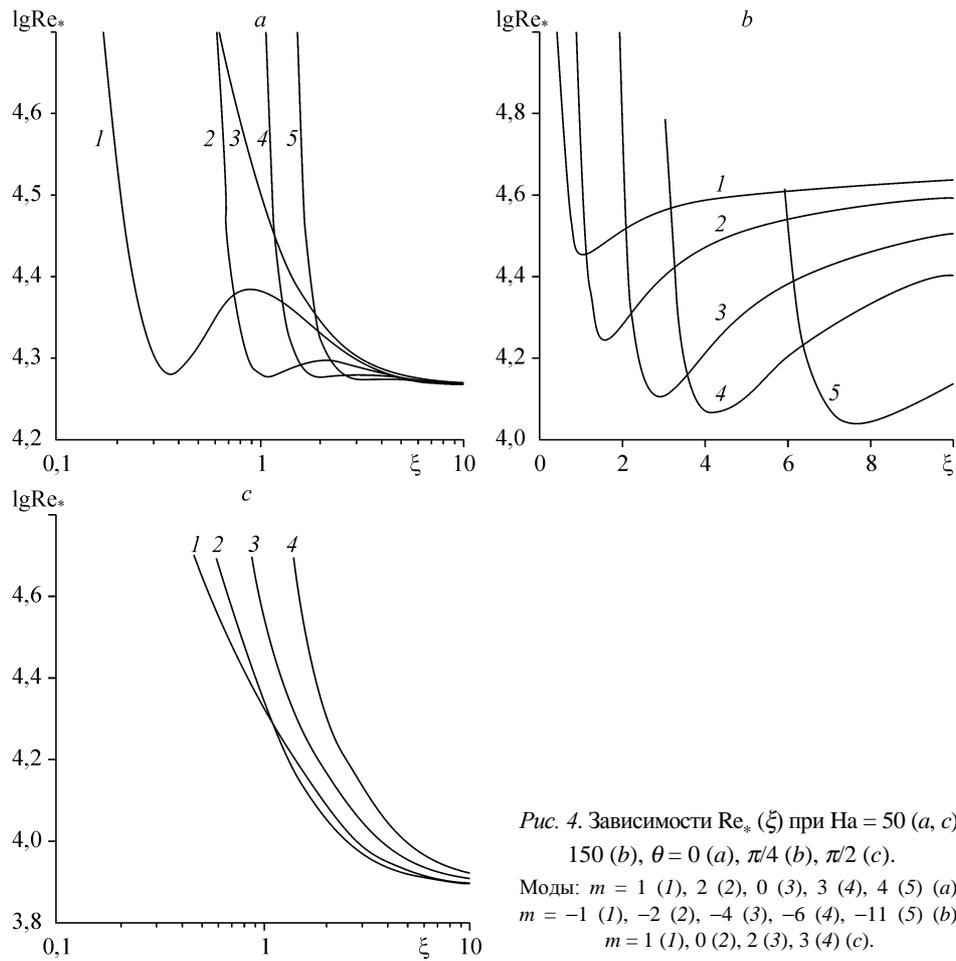


Рис. 3. Зависимости  $Re_*$  ( $\theta$ ) при  $Ha = 50$  (а),  $200$  (б),  $\xi = 10$ .  
Моды  $m = -1$  (1),  $-2$  (2), 0 (3), 1 (4), 2 (5).



становятся менее опасны. Остальные моды (для сравнения приведена  $m = 0$ ) более устойчивы.

На рис. 6 приведены нейтральные зависимости при  $\theta = \pi/2$ ,  $\xi = 2$ ,  $Na = 50$ .

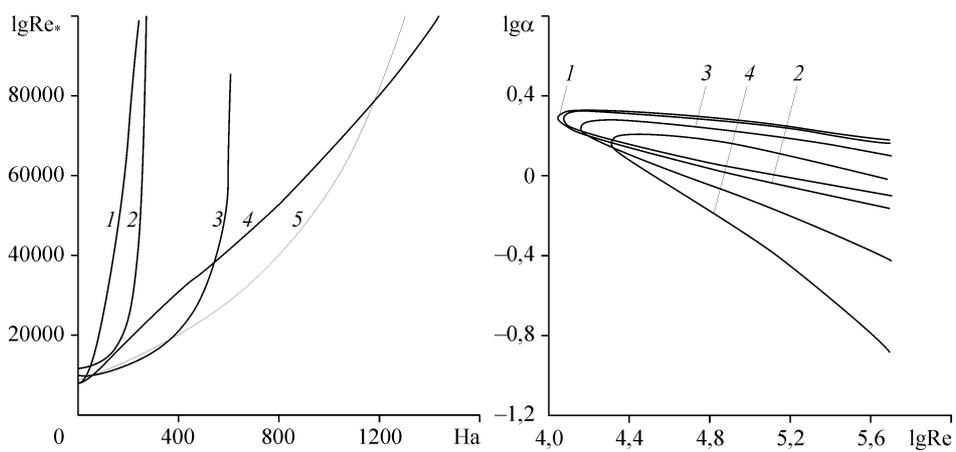


Рис. 5. Зависимости  $Re_*$  ( $Na$ ) при  $\theta = \pi/4$ ,  $\xi = 4$ .  
 Моды  $m = 0$  (1), -7 (2), -6 (3), -4 (4), -5 (5).

Рис. 6. Нейтральные зависимости при  $\theta = \pi/2$ ,  $\xi = 2$ ,  $Na = 50$ .  
 Моды  $m = 0$  (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы. Азимутальное магнитное поле вызывает уменьшение критических чисел Рейнольдса только при наличии продольного магнитного поля. Увеличение числа Альфвена в настоящей постановке задачи не всегда приводит к стабилизации данного течения. Уменьшение радиуса внутреннего цилиндра приводит к увеличению критических чисел Рейнольдса за счет стабилизации азимутальных мод с большими номерами (как с положительными, так и с отрицательными).

Полученные результаты могут использоваться при качественном анализе устойчивости потоков в проточной части плазмотрона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
3. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970.
4. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
5. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Устойчивость течения между коаксиальными цилиндрами при наличии продольного магнитного поля // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. 2004. № 24, апрель. С. 94–100.
6. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Устойчивость течений электропроводящей вязкой жидкости в продольном магнитном поле // Пятнадцатая зимняя школа по механике сплошных сред. Сб. ст. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 122–125.
7. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Устойчивость течения слабопроводящей жидкости в зазоре кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля // Тез. докл. Межд. конф. “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”, Бийск, 4-8 июля 2005. Новосибирск: ИГИЛ СО РАН. 2005. С. 65–66.
8. Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю. Автоколебания магнитогидродинамических течений в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1992. № 1. С. 7–12.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
10. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
11. Сапожников В.А. Численное решение задач гидродинамической устойчивости. // Автореф. канд. дисс. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1970.
12. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматлит, 1962.

*Статья поступила в редакцию 8 сентября 2008 г.*