

УДК 532.591; 539.3.371

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОНВЕКТИВНОЙ ВОЛНЫ СДВИГОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В. М. Кулик

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: kulik@itp.nsc.ru

Решена двумерная задача деформирования слоя вязкоупругого материала, приклеенного к твердому основанию, бегущей волной касательного напряжения. Получены аналитические выражения для двух компонент сдвиговой податливости, соответствующих двум компонентам смещения поверхности. Показано, что безразмерные компоненты податливости зависят только от вязкоупругих свойств материала, отношения длины волны к толщине слоя λ/H и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых колебаний V/C_t^0 . Представлены данные о динамической податливости в диапазонах $0,2 < \lambda/H < 60,0$ и $0,2 < V/C_t^0 < 5,0$. Установлено, что в диапазоне $1,5 < \lambda/H < 5,0$ нормальная компонента сдвиговой податливости резко уменьшается. Приведены графики сдвига фаз компонент смещения относительно фаз приложенных пульсационных сдвиговых напряжений, а также графики смещений и сдвига их фаз по толщине вязкоупругого слоя.

Ключевые слова: вынужденные колебания, пульсации трения, динамическая податливость, модуль упругости, коэффициент потерь, коэффициент Пуассона.

В данной работе выполнен расчет комплексной податливости слоя вязкоупругого материала толщиной H с плотностью ρ , коэффициентом Пуассона σ и комплексным модулем упругости $E^* = E(1 - i\mu)$ (μ — коэффициент потерь), приклеенного к твердому основанию. Рассмотрен установившийся режим деформации этого покрытия под действием плоской монохроматической волны давления, распространяющейся вдоль оси x со скоростью V .

Смещение частиц среды определяется зависимостью

$$\boldsymbol{\xi} = i\zeta + j\eta = \mathbf{f}(y) e^{i\omega(x/V - t)},$$

где ζ , η — компоненты смещения, направленные соответственно вдоль покрытия и перпендикулярно ему.

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = C_t^2 \Delta \boldsymbol{\xi} + (C_l^2 - C_t^2) \text{grad div } \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

где $C_l = [E^*(1 - \sigma)/(\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma))]^{1/2}$ — скорость волны сжатия-растяжения в безграничном пространстве; $C_t = [E^*/(2\rho(1 + \sigma))]^{1/2}$ — скорость сдвиговой волны в безграничном пространстве.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-00270, 14-01-00052).

© Кулик В. М., 2014

Граничными условиями являются условие отсутствия смещения на твердой стенке

$$\zeta = \eta = 0, \quad y = H \quad (2)$$

и условия для напряжений на внешней границе:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{E^*}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left((1-\sigma) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0, \quad y = 0; \\ \sigma_{xy} &= \frac{E^*}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\tau e^{i\omega(x/V-t)}, \quad y = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau e^{i\omega(x/V-t)}$ — внешнее воздействие.

Для решения уравнения (1) используем метод разделения вектора смещения на градиентную и роторную части. Введем две скалярные функции Φ и Ψ , такие что

$$\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Подставляя эти функции в (1), получаем два уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - C_t^2 \Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - C_t^2 \Delta \Psi = 0,$$

решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(A_1 \frac{\text{sh}(\omega\alpha y/V)}{\omega\alpha/V} + B_1 \text{ch}(\omega\alpha y/V) \right) e^{i\omega(x/V-t)}, \\ \Psi &= \left(A_2 \frac{\text{sh}(\omega\beta y/V)}{\omega\beta/V} + B_2 \text{ch}(\omega\beta y/V) \right) e^{i\omega(x/V-t)}. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = [1 - (V/C_l)^2]^{1/2}$; $\beta = [1 - (V/C_t)^2]^{1/2}$.

Используя граничные условия (2), (3), получаем систему четырех уравнений для определения A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-2i(1+\sigma)F}{1+\beta^2-2F} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\tau}{E^*}, \quad A_2 = \frac{2(1+\sigma)S}{1+\beta^2-2F} \frac{\lambda}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{2(1-i\mu)} \left(\frac{V}{C_t^0} \right)^2 \right] \frac{\tau}{E^*}, \\ B_1 &= \frac{2i(1+\sigma)S}{1+\beta^2-2F} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{\tau}{E^*}, \quad B_2 = \frac{-2(1+\sigma)}{1+\beta^2-2F} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{\tau}{E^*}. \end{aligned}$$

Здесь

$$S = \frac{\beta \text{sh}(2\pi\beta H/\lambda) - (F/\alpha) \text{sh}(2\pi\alpha H/\lambda)}{D}, \quad F = \frac{\text{ch}(2\pi\beta H/\lambda) + (\beta D_1/D) \text{sh}(2\pi\beta H/\lambda)}{\text{sh}(2\pi\alpha H/\lambda) + (D_1/(\alpha D)) \text{sh}(2\pi\alpha H/\lambda)},$$

$$D = \left[1 - \frac{1}{2(1-i\mu)} \left(\frac{V}{C_t^0} \right)^2 \right] \text{ch} \left(\frac{2\pi\beta H}{\lambda} \right) - \text{ch} \left(\frac{2\pi\alpha H}{\lambda} \right), \quad C_t^0 = \left[\frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \right]^{1/2},$$

$$D_1 = \alpha \text{sh} \left(\frac{2\pi\alpha H}{\lambda} \right) - \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{1}{2(1-i\mu)} \left(\frac{V}{C_t^0} \right)^2 \right] \text{sh} \left(\frac{2\pi\beta H}{\lambda} \right),$$

$\lambda = 2\pi V/\omega$ — длина волны.

Используя соотношения (4), получаем выражения для компонент смещения поверхности покрытия

$$\eta|_{y=0} = \left(A_1 - i \frac{2\pi}{\lambda} B_2 \right) e^{i\omega(x/V-t)}, \quad \zeta|_{y=0} = \left(i \frac{2\pi}{\lambda} B_1 + A_2 \right) e^{i\omega(x/V-t)}.$$

Податливость есть отношение деформации к приложенному напряжению.

Сдвиговая податливость покрытия, так же как и податливость под действием волны давления [2], имеет две компоненты: перпендикулярную поверхности $C_n = |C_n|e^{i\theta_n}$ и параллельную ей $C_t = |C_t|e^{i\theta_t}$. Здесь $|C_n|$, $|C_t|$ — модули соответствующих компонент динамической податливости; θ_n , θ_t — фазовые отставания соответствующих компонент смещения поверхности от действующего напряжения.

При расчетах и анализе целесообразно использовать безразмерные комплексы

$$C_n^* = \frac{C_n}{H/G^*} = \frac{i(1-F)}{2\pi(1-i\mu)(1+\beta^2-2F)} \frac{\lambda}{H},$$

$$C_t^* = \frac{C_t}{H/G^*} = -\frac{S}{4\pi(1-i\mu)^2(1+\beta^2-2F)} \frac{\lambda}{H} \left(\frac{V}{C_t^0}\right)^2,$$

зависящие только от отношения длины волны к толщине покрытия λ/H и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых возмущений V/C_t^0 в безграничной среде, не имеющей потерь, обусловленных наличием вязкости ($\mu = 0$). Величина G^* есть динамический модуль сдвига. Предполагается, что потери при сдвиге и объемной деформации равны (при этом коэффициент Пуассона является действительной величиной), поэтому $G^* = E^*/[2(1+\sigma)]$. Это допущение основано на экспериментальных данных, показывающих, что отношение мнимой части коэффициента Пуассона к его действительной части очень мало ($10^{-3} \div 10^{-2}$), а для некоторых материалов равно нулю [3–5].

Для большинства резин значения коэффициента Пуассона находятся в диапазоне $\sigma = 0,47 \div 0,48$, поэтому расчеты проведены при $\sigma = 0,475$. На рис. 1 показана зависимость продольной компоненты безразмерной податливости от длины волны. Видно, что с увеличением отношения длины волны к толщине слоя до значения $\lambda/H \approx 10$ продольная компонента податливости увеличивается, а затем выходит на режим насыщения (см. рис. 1, а). При $V/C_t^0 < 0,75$ величина $|C_t^*|$ слабо зависит от коэффициента потерь для реальных материалов во всем диапазоне его значений ($0,02 < \mu < 0,50$).

При скорости волны, приближенно равной скорости распространения сдвиговых колебаний, при $\lambda/H = 1,35$ на кривой $|C_t^*(\lambda/H)$ появляется пик (кривая 3), высота которого

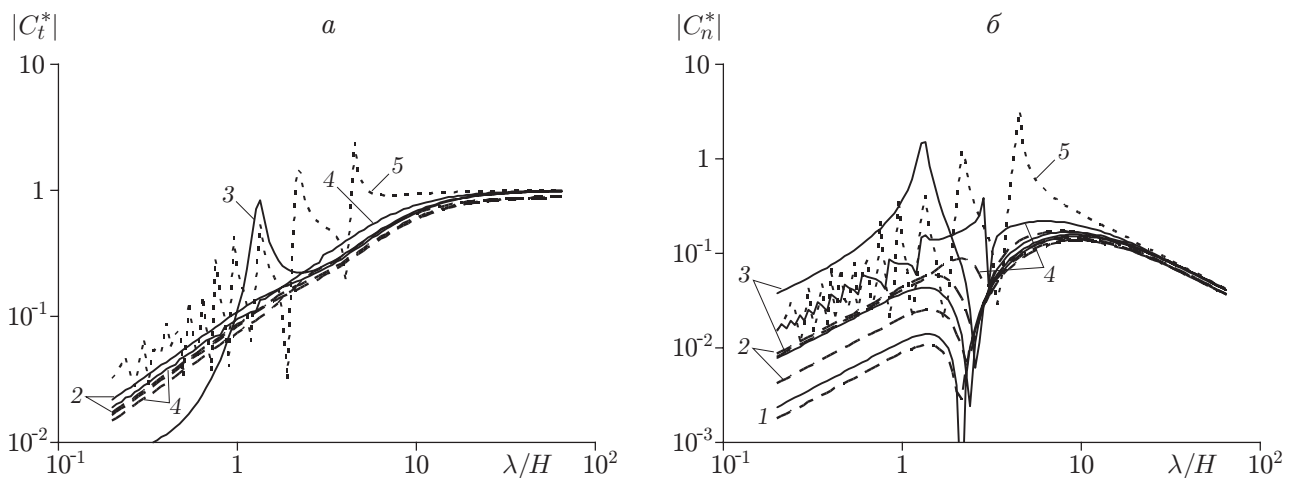


Рис. 1. Зависимости продольной компоненты безразмерной податливости (а) и компоненты, нормальной к поверхности (б), от отношения длины волны к толщине слоя при $\sigma = 0,475$:

сплошные и пунктирные линии — $\mu = 0,02$, штриховые — $\mu = 0,5$; 1 — $V/C_t^0 = 0,5$, 2 — $V/C_t^0 = 0,75$, 3 — $V/C_t^0 = 1$, 4 — $V/C_t^0 = 1,5$, 5 — $V/C_t^0 = 2$

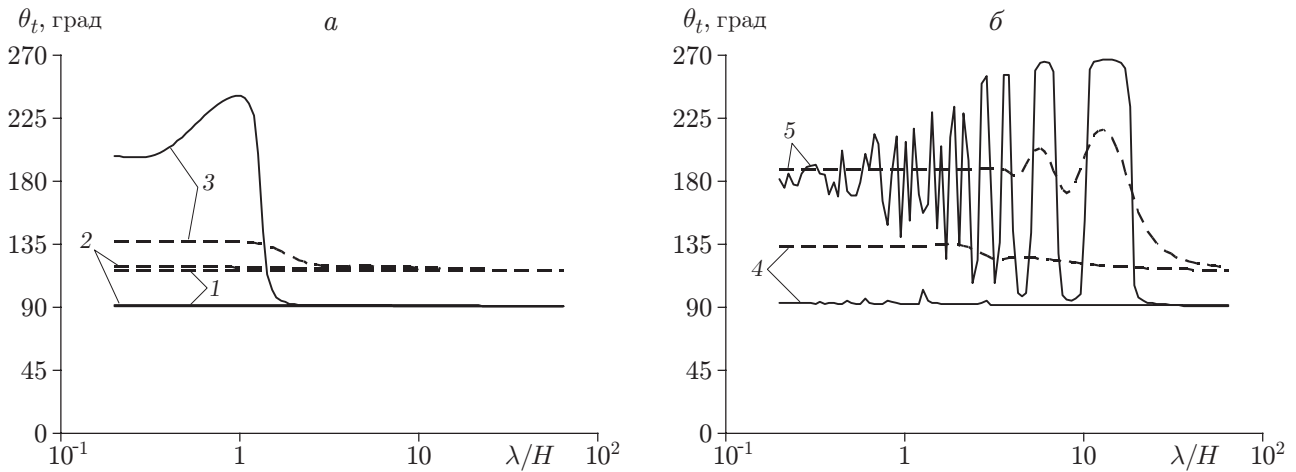


Рис. 2. Фазовый сдвиг продольных смещений относительно пульсаций трения при $V/C_t^0 \leq 1$ (а) и $V/C_t^0 > 1$ (б) в случае $\sigma = 0,475$:

сплошные линии — $\mu = 0,02$, штриховые — $\mu = 0,5$; 1 — $V/C_t^0 = 0,5$, 2 — $V/C_t^0 = 0,75$, 3 — $V/C_t^0 = 1$, 4 — $V/C_t^0 = 1,5$, 5 — $V/C_t^0 = 2$

увеличивается с уменьшением коэффициента потерь. При $V/C_t^0 > 1,5$ кривая продольной податливости приобретает колебательный характер при достижении определенной частоты (кривая 5). Так, при $V/C_t^0 = 2$ первый пик податливости появляется при $\lambda/H = 4,5$, а при $V/C_t^0 > 2$ сдвигается в сторону низких частот. С уменьшением потерь в материале амплитуда колебаний увеличивается.

При всех скоростях волны и частоте воздействия, равной нулю (квазиравновесный режим деформирования), значение безразмерной продольной податливости равно единице.

Основными отличиями нормальной компоненты податливости от продольной являются наличие “провала” в диапазоне $1,5 < \lambda/H < 5,0$ и монотонное уменьшение нормальной компоненты при больших значениях λ/H . Так, в случае $V/C_t^0 \leq 1$ (см. рис. 1, б) минимальное значение $|C_n^*|$ достигается при $\lambda/H = 2,14$, а в случае $V/C_t^0 = 1,5$ — при $\lambda/H = 3$. Слева от “провала” наблюдается расслоение кривых, соответствующих различным значениям V/C_t^0 и коэффициента потерь, а справа — незначительный сдвиг этих кривых, обусловленный различием значений величины потерь в материале.

На рис. 2 показано фазовое отставание смещений от приложенного напряжения. Фаза продольного смещения (см. рис. 2, а) не зависит от λ/H в области низких частот (например, при $V/C_t^0 = 1$ и $\lambda/H > 2$). В этой области ее значение зависит только от коэффициента потерь и при достаточно малых потерях равно 90° . С увеличением потерь продольные смещения отстают от пульсаций напряжения на угол $\theta > 90^\circ$. В высокочастотной области на фазовое отставание влияет скорость волны, особенно в случае $V/C_t^0 = 1$ (кривая 3 на рис. 2, а).

При $V/C_t^0 > 1,5$ зависимость $\theta(\lambda/H)$ имеет колебательный характер (см. рис. 2, б). При прохождении каждого максимума и минимума продольной податливости (см. рис. 1, а) фаза изменяется на 180° (в диапазоне $\theta = 90 \div 270^\circ$). С увеличением коэффициента потерь кривые $\theta(\lambda/H)$ становятся более плавными.

На участке, где имеет место “провал” нормальной компоненты податливости, фаза этой компоненты (рис. 3, а) при малых потерях и скоростях волны изменяется в диапазоне от -90 до 90° . С увеличением коэффициента потерь фазовое отставание коротковолновых деформаций уменьшается, а длинноволновых — увеличивается.

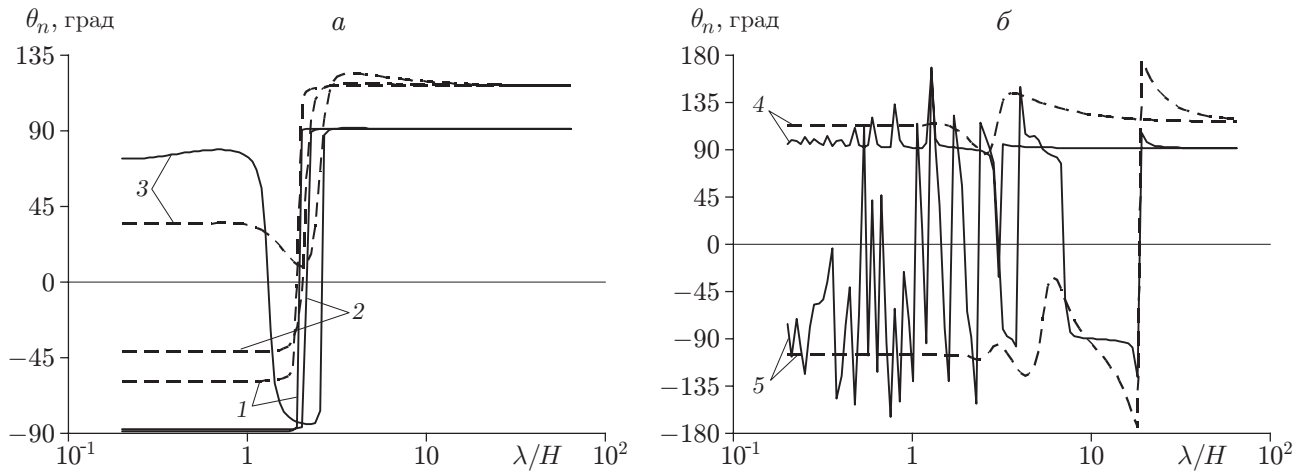


Рис. 3. Фазовый сдвиг нормальных к поверхности смещений относительно пульсаций трения при $V/C_t^0 \leq 1$ (а) и $V/C_t^0 > 1$ (б) в случае $\sigma = 0,475$ (обозначения те же, что на рис. 2)

При $V/C_t^0 = 1$ фаза коротковолновых деформаций является положительной (кривые 3 на рис. 3,а), при $V/C_t^0 = 1,5$ (кривая 4 на рис. 3,б) уменьшение фазы в области “провала” податливости происходит в узком диапазоне длин волн в окрестности значения $\lambda/H = 5,1$. При $V/C_t^0 > 1,5$ изменение фазы нормальной компоненты смещения имеет колебательный характер: колебания увеличиваются с увеличением скорости распространения волны и уменьшаются с увеличением коэффициента потерь.

Описанное поведение продольных и нормальных смещений можно объяснить тем, что величина и фаза смещения изменяются по толщине слоя вязкоупругого материала [6]. Так, наличие первого пика справа на кривой 5 рис. 1,а объясняется тем, что продольное смещение монотонно увеличивается по толщине покрытия и достигает максимума на внешней границе слоя. При уменьшении λ максимальное смещение достигается внутри покрытия. При дальнейшем уменьшении λ точка, в которой достигается максимальное смещение, будет сдвигаться вглубь слоя, а смещение внешней поверхности — уменьшаться. Наконец, при некоторой частоте нормальное смещение будет равно нулю и на внешней, и на внутренних поверхностях слоя, т. е. по толщине слоя реализуется “полуволна” смещения. В этом случае наблюдается минимум податливости (антирезонанс). На частоте, соответствующей резонансному пику, по толщине покрытия укладывается целое число “полуволн” и $1/4$ “волны”.

На рис. 4 представлены профили смещений при $V/C_t^0 = 1$. При больших длинах волн распределение продольного смещения по толщине слоя (см. рис. 4,а) приближается к линейному (кривая 5), что соответствует режиму квазистационарного сдвига. При уменьшении длины волны профиль становится нелинейным (кривая 4), а затем внутри покрытия появляется точка, в которой смещение равно нулю. Эта точка сдвигается к внешней поверхности слоя (кривые 1–3).

При больших значениях λ/H профиль нормального смещения (см. рис. 4,б) имеет монотонный характер (кривые 4, 5). С уменьшением длины волны внутри слоя появляется точка перегиба, при этом нормальное смещение на внешней поверхности стремится к нулю (кривая 3), а затем увеличивается и достигает максимума (кривая 2) (ср. со сплошной кривой 3 на рис. 1,б).

На рис. 5 представлено распределение фазы смещений по толщине слоя. В случае длинноволновых возмущений фаза продольных смещений постоянна по толщине слоя и рав-

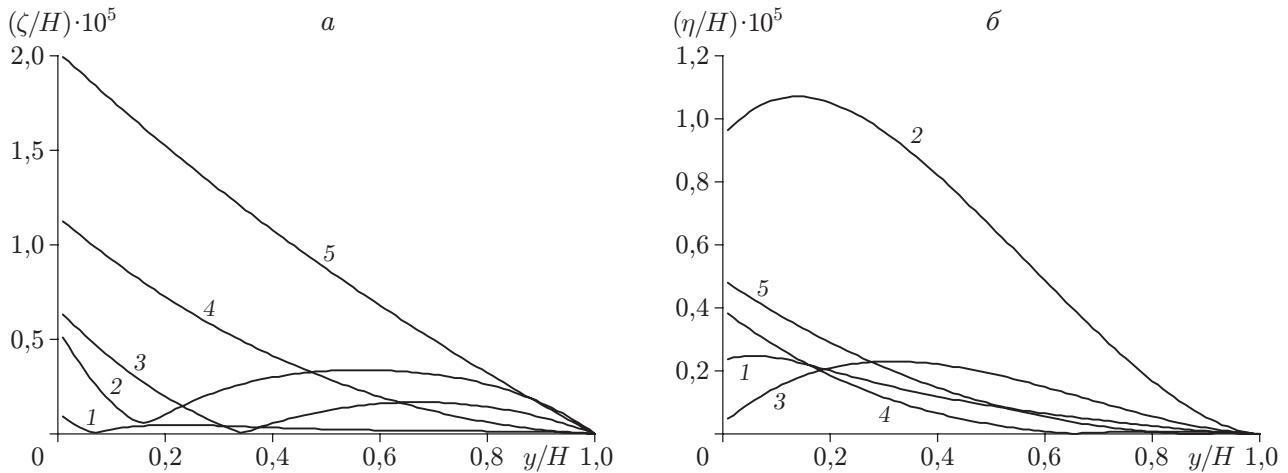


Рис. 4. Профили продольных (а) и нормальных к поверхности (б) смещений по толщине слоя при $V/C_t^0 = 1$, $\mu = 0,2$, $\sigma = 0,475$:
 1 — $\lambda/H = 0,2$, 2 — $\lambda/H = 1,25$, 3 — $\lambda/H = 2,5$, 4 — $\lambda/H = 5$, 5 — $\lambda/H = 10$

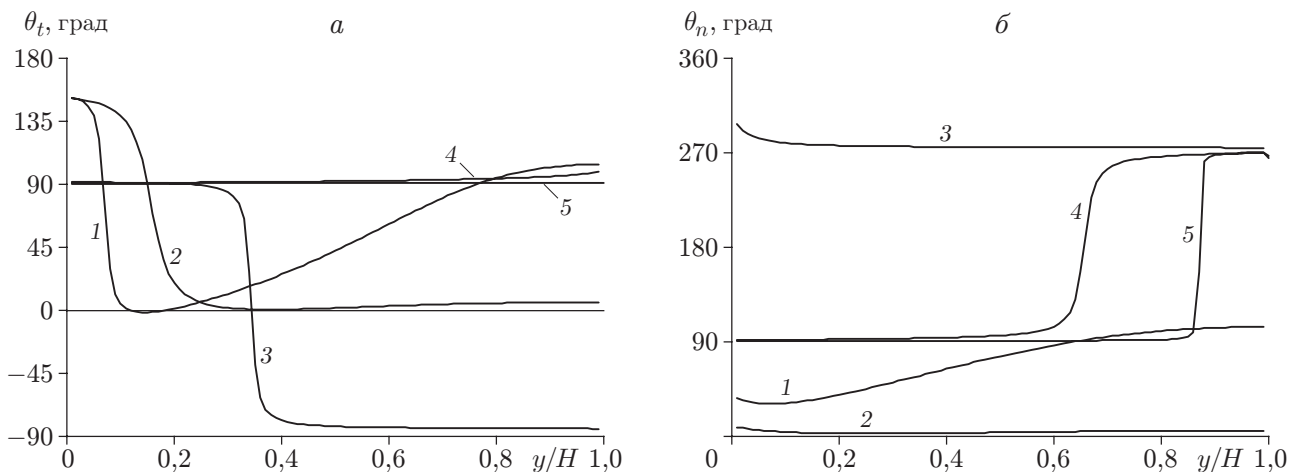


Рис. 5. Фазовый сдвиг продольных (а) и нормальных к поверхности (б) смещений по толщине слоя при $V/C_t^0 = 1$, $\mu = 0,2$, $\sigma = 0,475$ (обозначения те же, что на рис. 4)

на 90° . На частоте, соответствующей “провалу”, фаза изменяется от 90 до -90° в окрестности значения $y/H \approx 0,3$ (кривая 3). При максимальной податливости (кривая 2) на большем участке слоя ($0,2 < y/H < 1,0$) фаза остается равной нулю. С увеличением частоты точка, в которой фаза становится равной нулю, сдвигается к внешней поверхности (кривая 1).

В области максимальной податливости фаза нормальных смещений (см. рис. 5, б) остается равной нулю по всей толщине слоя (кривая 2), а в области “провала” приблизительно равна -90° (кривая 3). На больших длинах волн (кривые 4, 5) фаза внутри слоя увеличивается от 90 до 270° .

Анализ результатов, полученных в данной работе, показывает, что сдвиговая податливость определяется двумя параметрами: отношением скорости волны к скорости сдвиговых колебаний и отношением длины волны к толщине слоя. Продольная компонента сдвиговой податливости больше ее нормальной компоненты, особенно в случае длинно-

волновых возмущений при $\lambda/H > 5$. Нормальная компонента имеет “провал” в области $1,5 < \lambda/H < 5,0$. В случае если скорость волны в 1,5 раза больше скорости распространения сдвиговых колебаний, зависимости обеих компонент податливости от длины волны имеют колебательный характер.

Деформации, обусловленные пульсациями трения [7], необходимо учитывать при выяснении причин уменьшения трения в турбулентном течении на податливом покрытии [8]. Уменьшение трения зависит от продольных и вертикальных возмущений, вносимых покрытием в пристенную область течения, при этом весьма существенны фазовые соотношения между этими возмущениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fung Y. C.** Foundation of solid mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.
2. **Кулик В. М.** Вынужденные колебания слоя вязкоупругого материала под действием конвективной волны давления // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 90–97.
3. **Tschoegl N. W., Knauss W. G., Ermi I.** Poisson's ratio in linear viscoelasticity — a critical review // Mech. Time-Dependent Materials. 2002. V. 6. P. 3–51.
4. **Pritz T.** The Poisson's loss factor of solid viscoelastic materials // J. Sound Vibrat. 2007. V. 306. P. 790–802.
5. **Kulik V. M., Boiko A. V., Seoudi B. M., et al.** Measurement method of complex viscoelastic material properties // Intern. J. Solids Structures. 2010. V. 47, iss. 3/4. P. 374–382.
6. **Кулик В. М.** Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 104–111.
7. **Colella K. J., Keith W. J.** Measurements and scaling of wall shear stress fluctuations // Exp. Fluids. 2003. V. 34. P. 253–260.
8. **Kulik V. M.** Action of a turbulent flow on a hard compliant coating // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2012. V. 33. P. 232–241.

*Поступила в редакцию 21/VIII 2013 г.,
в окончательном варианте — 4/XII 2013 г.*
