

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ СТОКСОВА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ОБТЕКАНИЯ САМОДВИЖУЩЕГОСЯ ШАРА

В. И. Яковлев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Магнитогидродинамическое обтекание шара, снабженного внутренним источником электромагнитных полей в виде переменного магнитного диполя, исследовано в стоксовом приближении. Рассматриваемый диполь способен обеспечить поступательное движение шара относительно жидкости. Показаны особенности обтекания в самодвижущемся режиме работы источника, вызванные влиянием распределенных объемных сил на характер течения.

Создание магнитогидродинамических движителей для морской воды и средств управления картиной обтекания с использованием электромагнитных объемных сил (ЭОС) в наши дни становится практической задачей [1]. Соответствующие задачи магнитогидродинамического обтекания тел давно привлекают внимание исследователей. Первая замкнутая задача МГД-обтекания самодвижущегося тела с внутренним источником полей решена в [2]. Исследовано установившееся стоксово движение шара, вызванное переменным магнитным диполем, смещенным относительно центра шара, для предельного случая сильного скин-эффекта. Изучение этой системы было продолжено, получены новые результаты, которые в свое время не были опубликованы. Они касаются влияния параметров источника на поступательную скорость шара и величину отрывной зоны; один из неожиданных результатов связан с возможностью движения шара в направлении, противоположном направлению силы, действующей на диполь со стороны магнитного поля токов в жидкости.

Эти результаты являются скорее курьезными, чем практическими, но представляют научный интерес, поскольку демонстрируют возможности распределенных ЭОС для видоизменения гидродинамической картины обтекания.

1. В настоящей работе рассматривается самодвижущийся режим обтекания шара в проводящей жидкости. Шар снабжен некоторым электромагнитным источником, в качестве которого принят переменный магнитный диполь, смещенный относительно центра шара и направленный так, как показано на рис. 1. Шар считается непроводящим и немагнитным, его радиус равен a , проводимость жидкости σ , частота изменения магнитного момента ω .

Качественное объяснение, почему шар с таким внутренним источником может быть самодвижущимся, заключается в следующем. Рассматриваемый переменный магнитный диполь в окружающей жидкости создает вихревое электрическое поле и вихревые токи, имеющие одну лишь азимутальную α -компоненту. Магнитное поле этих переменных круговых токов действует на магнитный диполь с силой $\mathbf{F} = (-F_0 + Fe^{2i\omega t})\mathbf{e}_z$, состоящей из двух частей — постоянной и переменной. Постоянная составляющая, отличная от нуля при смещении диполя относительно центра шара, и является действующей на шар электромагнитной силой тяги. Она не может быть уравновешена градиентом давления в

жидкости, поскольку возникающие в жидкости ЭОС $\mathbf{f} = (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ в общем случае не являются потенциальными, следовательно, сила $-F_0 \mathbf{e}_z$ вызывает поступательное движение шара относительно жидкости.

Задача решается в стоксовом приближении при дополнительных предположениях, обеспечивающих расщепление общей магнитогидродинамической задачи на чисто электродинамическую и гидродинамическую части. Это возможно, если в законе Ома $\mathbf{j} = \sigma\{\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\}$ второе слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым:

$$(1/c)|[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]| \ll |\mathbf{E}|, \quad (1.1)$$

т. е. плотность тока не зависит от поля скоростей. При этом поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , а также поле объемных сил \mathbf{f} не зависят от поля скоростей и электродинамическая часть задачи отделяется от гидродинамической. Так как вихревое электрическое поле пропорционально ω , условие (1.1) выполняется при достаточно высоких частотах

$$\omega \gg (v_0/a) \quad (1.2)$$

(v_0 — масштаб скорости, определяемый в ходе решения).

2. Возникающая здесь электродинамическая задача о переменном магнитном диполе в сферической полости внутри безграничного проводящего пространства решается с помощью вектор-потенциала $\mathbf{A} = H_0 a A(r, \theta) e^{i\omega t} \mathbf{e}_\alpha$, $H_0 = m_0/a^3$. Безразмерная функция $A(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot}[A(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha] = \begin{cases} -(2i/\delta^2)A(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha & \text{при } r > 1, \\ 0 & \text{при } r < 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

($\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega a}$ — безразмерная толщина скин-слоя), граничным условиям непрерывности функции A и ее производной $\partial A/\partial r$ на поверхности шара ($r = 1$) и условию ограниченности на бесконечности. Решения внутри (A_1) и вне шара (A_2) имеют вид

$$A_1 = A_m(r, \theta) + \sum_{l=1}^{\infty} c_l r^l P_l^1(\cos \theta), \quad A_2 = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \frac{1}{\sqrt{r}} H_{l+1/2}^2(sr) P_l^1(\cos \theta). \quad (2.2)$$

Здесь $s = (1-i)/\delta$; $P_l^1(\cos \theta) = -\sin \theta (d/d \cos \theta)[P_l(\cos \theta)]$ и $H_{l+1/2}$ — присоединенные функции Лежандра и вторые функции Ганкеля полуцелого порядка, а $A_m(r, \theta) = r \sin \theta / (\epsilon^2 + r^2 - 2r\epsilon \cos \theta)^{3/2}$ — функция, задающая вектор-потенциал от магнитного диполя. Последнюю также можно разложить в ряд по $P_l^1(\cos \theta)$ с коэффициентами в виде степеней ϵ/r , где $\epsilon = d/a$ — относительная величина смещения диполя от центра шара:

$$A_m = -(1/r^2) \sum_{l=1}^{\infty} (\epsilon/r)^{l-1} P_l^1(\cos \theta),$$

что позволяет, используя граничные условия на поверхности ($r = 1$), определить коэффициенты b_l , c_l из (2.2):

$$b_l = \frac{2l+1}{s H_{l+1+1/2}^{(2)}(s)} \epsilon^{l-1}, \quad c_l = -\frac{H_{l-1+1/2}^{(2)}(s)}{H_{l+1+1/2}^{(2)}(s)} \epsilon^{l-1}$$

и тем завершить решение электродинамической задачи.

Отсюда искомая сила, действующая на диполь со стороны магнитного поля токов в жидкости, определяется градиентом этого поля в месте расположения диполя. Результат для усредненной по времени величины F_z имеет вид

$$\langle F_z \rangle = -F_0 = -H_0^2 a^2 F_1(\epsilon, \delta), \quad F_1(\epsilon, \delta) = -\text{Real} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1) c_l \epsilon^{l-2} \frac{P_l^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \Big|_{\theta=0}. \quad (2.3)$$

Электромагнитные объемные силы и ротор этих сил вычисляются независимо от поля скоростей как $\mathbf{f} = (\sigma/c)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$. Результат приводится к виду

$$f_r = f_0 \frac{1}{r} \operatorname{Real} \left[iA^* \frac{\partial}{\partial r} (rA) - iA \frac{\partial}{\partial r} (rA) e^{2i\omega t} \right],$$

$$f_\theta = f_0 \frac{1}{r \sin \theta} \operatorname{Real} \left[iA^* \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) - iA \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) e^{2i\omega t} \right], \quad f_\alpha = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{f_0}{a} [\Phi_0(r, \theta) + \operatorname{Real} \tilde{\Phi}(r, \theta) e^{2i\omega t}] \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\Phi_0(r, \theta) = \frac{2}{r} \operatorname{Real} \left(i \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right), \quad \tilde{\Phi}(r, \theta) = \frac{2}{r} iA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A}{\partial r} \right), \quad f_0 = \frac{\sigma \omega H_0^2 a}{2c^2}.$$

(Здесь и далее звездочками отмечены комплексно-сопряженные величины.) Из этих формул видно, что сила \mathbf{f} и ротор сил $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ имеют как стационарную, так и осциллирующую (с частотой 2ω) составляющие, причем по порядку величины они одинаковы. Вследствие этого и исследуемое течение складывается из аналогичных частей.

3. Гидродинамическая часть задачи сводится к решению уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{W}, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W} = \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{f},$$

содержащих ротор электромагнитных сил \mathbf{f} . В связи с линейностью этих уравнений стационарная и осциллирующая составляющие в поле скоростей определяются независимо друг от друга. При рассматриваемых высоких частотах (1.2) осциллирующая составляющая мала по сравнению со стационарной (в работе она не приводится).

Задача для стационарной составляющей течения сводится к определению безразмерных функции тока $\psi(r, \theta)$ и завихренности $w(r, \theta)$, введенных с использованием некоторого масштаба скорости \tilde{v}_0 :

$$\mathbf{V} = \tilde{v}_0 \operatorname{rot} [\psi(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha], \quad \mathbf{W} = \frac{\tilde{v}_0}{a} w(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha.$$

Функции ψ , w удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} [w(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha] = \frac{2f_0 a^2}{\rho \nu \tilde{v}_0} \frac{1}{r} \operatorname{Real} \left[i \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \frac{\partial A_2^*}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\alpha; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\psi(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha] = w(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha \quad (3.2)$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad \psi = (1/2)(u_0/\tilde{v}_0)r \sin \theta = -(1/2)(u_0/\tilde{v}_0)r P_1^1(\cos \hat{\theta}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1. \quad (3.3)$$

Безразмерный комплекс в правой части уравнения (3.1) представляет собой отношение масштабов электромагнитной силы и силы вязкости, т. е. квадрат числа Гартмана. Уже подчеркивалось, что масштаб скорости постановкой задачи не определен. Интуитивно представляется, что характерная скорость течения, обусловленного приложенными электромагнитными силами, такова, что силы вязкости по порядку величины уравнивают объемную силу, и, следовательно, названный безразмерный комплекс равен единице. Из этого условия определяется величина

$$\tilde{v}_0 = \frac{\sigma \omega H_0^2 a}{\rho c^2 \nu} = \frac{H_0^2 a}{2\pi \rho \nu} \frac{1}{\delta^2}, \quad (3.4)$$

которая временно используется в качестве масштаба скорости.

В условиях (3.3) u_0 — скорость набегающего потока (в системе шара). Так как в рассматриваемой задаче о самодвижущемся шаре скорость последнего неизвестна, граничные условия (3.3) необходимо дополнить уравнением движения шара, которое в случае стационарного движения сводится к равенству

$$\langle F_z \rangle + T_z = 0, \quad (3.5)$$

где $\langle F_z \rangle$ определена в (2.3), $T_z = 2\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta$ — проекция равнодействующей вязких напряжений $\sigma_{rr} = -p(1, \theta)$, $\sigma_{r\theta} = \rho\nu(\tilde{v}_0/a)w(1, \theta)$, приложенных к поверхности шара со стороны жидкости.

Распределение давления по поверхности шара находится из уравнения движения жидкости и выражается через $\langle f_\theta \rangle$ и величину $(\tilde{v}_0/a)\rho\nu(\partial/\partial r)(rw)|_{r=1}$. Касательные напряжения определяются завихренностью на поверхности шара. Результат вычислений для T_z имеет вид

$$T_z = 2\pi a^2 \left\{ \frac{a}{2} \int_0^\pi \langle f_\theta(1, \theta) \rangle \sin^2(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}_0}{a} \rho\nu \int_0^\pi \left[\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=1} - w(1, \theta) \right] \sin^2(\theta) d\theta \right\}. \quad (3.6)$$

Дифференциальные операторы в уравнениях (3.1), (3.2) совпадают с оператором в уравнении (2.1). Поэтому решения для ψ , w можно построить разделением переменных, если функцию, входящую в правую часть (3.1)

$$\begin{aligned} \text{Real} \left(i \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \frac{\partial A_2^*}{\partial r} \right) = \\ = \text{Real} \left\{ i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l'=1}^{\infty} \frac{b_l}{\sqrt{r}} H_{l+1/2}^{(2)}(sr) \frac{d}{ds} [P_l^1(\cos \theta)] b_{l'}^* \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} H_{l'+1/2}^{(2)}(s^*r) \right] P_{l'}^1(\cos \theta) \right\}, \end{aligned}$$

представить в виде разложения по присоединенным функциям Лежандра $P_l^1(\cos \theta)$. Можно показать, что произведение $P_l^1(\cos \theta)(d/d\theta)P_{l'}^1(\cos \theta)$ представляется в виде конечной суммы $\sum_{n=0}^M C_{l,l',n} P_{l+l'-2n}^1(\cos \theta)$, где

$$M = \begin{cases} (l+l')/2 - 1, & \text{если } l+l' \text{ — четное число,} \\ (l+l'-1)/2, & \text{если } l+l' \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Следовательно, решения уравнений (3.1), (3.2) в общем случае (2.2) получаются в виде двойных рядов. Громоздкость этих решений затрудняет их физический анализ, сводя на нет преимущества аналитического решения по сравнению с численным. Поэтому здесь приводится исследование для относительно простого случая

$$\varepsilon = d/a \ll 1 \quad (3.7)$$

малого смещения диполя относительно центра шара, когда в решении можно ограничиться небольшим числом членов ряда. В то же время рассматриваемое решение не является тривиальным; оно демонстрирует интересные особенности обтекания шара, приводимого в движение за счет внутреннего источника полей, и позволяет дать им физическое объяснение.

При выполнении условия (3.7) в выражениях для поля сил \mathbf{f} и силы тяги \mathbf{F} оставим только члены нулевого и первого порядков по параметру ε . При этом правая часть (3.1) легко приводится к нужной форме — сумме по функциям $P_l^1(\cos \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \operatorname{Real} \left(i \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \frac{\partial A_2^*}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{r} \sum_{l=1}^3 \Phi_l(r) P_l^1(\cos \theta), \\ \Phi_1(r) &= -\varepsilon \frac{9\delta^2}{2} \operatorname{Real} \frac{i}{H_{5/2}^*(s) H_{7/2}(s)} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[3H_{5/2}(sr) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} H_{3/2}^*(sr) \right) + \right. \\ &\quad \left. + H_{3/2}^*(sr) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} H_{5/2}(sr) \right) \right], \\ \Phi_2(r) &= \frac{3\delta^2}{2} \frac{1}{|H_{5/2}(s)|^2} \frac{1}{r} \operatorname{Real} i s^* H_{3/2}(sr) H_{1/2}^*(sr), \\ \Phi_3(r) &= \varepsilon 3\delta^2 \operatorname{Real} \frac{i}{H_{5/2}(s) H_{7/2}^*(s)} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[H_{3/2}(sr) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} H_{5/2}^*(sr) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2H_{5/2}^*(sr) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} H_{3/2}(sr) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

(Здесь под H_ν следует понимать вторые функции Ганкеля $H_\nu^{(2)}$.) Ряд (2.3) для безразмерной силы тяги начинается с члена, пропорционального ε , и в рассматриваемом приближении

$$F_1(\varepsilon, \delta) = -3\varepsilon \operatorname{Real} \frac{H_{3/2}(s)}{H_{7/2}(s)} = 6\varepsilon \frac{4 + 14\delta + 12\delta^2}{(2 + 12\delta + 15\delta^2)^2 + [2 - 15\delta^2(1 + \delta)]^2}. \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.1) с правой частью (3.8), ограниченное на бесконечности, имеет вид

$$w(r, \theta) = \sum_{l=1}^3 \left\{ \alpha_l r^{-(l+1)} + \frac{1}{2l+1} \int_r^\infty \left[\left(\frac{x}{r} \right)^{l+1} - \left(\frac{x}{r} \right)^{-l} \right] \Phi_l(x) dx \right\} P_l^1(\cos \theta), \quad (3.10)$$

а уравнение (3.2) имеет решение

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \sum_{l=1}^3 \psi_l(r) P_l^1(\cos \theta), \\ \psi_l(r) &= \mu_l r^{-(l+1)} + \beta_l r^l + \frac{\alpha_l}{2(2l-1)} r^{-(l-1)} + \frac{1}{2l+1} \gamma_l(r), \\ \gamma_l(r) &= -\frac{1}{2} \int_r^\infty x^2 \Phi_l(x) \left[\frac{1}{2l+3} \left(\left(\frac{x}{r} \right)^{l+1} - \left(\frac{x}{r} \right)^{-(l+2)} \right) - \frac{1}{2l-1} \left(\left(\frac{x}{r} \right)^{l-1} - \left(\frac{x}{r} \right)^{-l} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Константы α_l , β_l , μ_l определяются из граничных условий (3.3) и равенства (3.5). Из условия на бесконечности следуют соотношения $\beta_1 = -u_0/2\tilde{v}_0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$. Чтобы использовать (3.5), предварительно заметим, что первый интеграл, входящий в (3.6), пропорционален ε , так как $\langle f_\theta \rangle$ отлично от нуля только в случае диполя, смещенного относительно центра шара:

$$\langle f_\theta(r, \theta) \rangle = -\varepsilon \frac{45\delta^2}{2} f_0 \sin^3 \theta \frac{1}{r^2} \operatorname{Real} \frac{i H_{3/2}^*(sr) H_{5/2}(sr)}{H_{5/2}^*(s) H_{7/2}(s)}.$$

Во второй интеграл (3.6) ненулевой вклад вносит первый член из суммы (3.9), также обусловленный смещением диполя от центра шара. Окончательно

$$T_z = 2\pi a^2 \left\{ \frac{3}{\pi} \varepsilon H_0^2 \operatorname{Re} \frac{iH_{3/2}(s)H_{5/2}(s)}{H_{7/2}^*(s)H_{5/2}(s)} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{v}_0}{a} \rho \nu \left[3\alpha_1 + \int_1^\infty x^2 \Phi_1(x) dx \right] \right\}.$$

Используя выражение (3.4) для масштаба \tilde{v}_0 , из равенства (3.5) определяем

$$\alpha_1 = -3\varepsilon \delta^2 \operatorname{Re} \left[\frac{iH_{3/2}(s)H_{5/2}^*(s)}{H_{7/2}^*(s)H_{5/2}(s)} + \frac{1}{2} \frac{H_{3/2}(s)}{H_{7/2}(s)} \right] - \frac{1}{3} \int_1^\infty x^2 \Phi_1(x) dx.$$

Оставшиеся константы легко находятся из кинематических условий (3.3). Здесь приведем выражение лишь для параметра β_1 , определяющего значение скорости жидкости на бесконечности:

$$\beta_1 = -\frac{1}{9} \left[\frac{d\gamma_1}{dr} \Big|_{r=1} + 2\gamma_1(1) + 3\alpha_1 \right]. \quad (3.12)$$

4. Анализ решения показывает, что фактический масштаб скорости возникающего течения отличается от (3.4) и более подходящим является значение $v_0 = (3/4)(\delta^2/140)\tilde{v}_0 = (3/140)(aH_0^2/8\pi\rho\nu)$. Это обстоятельство не говорит о несправедливости соображений, использованных при выводе (3.4). Оно связано с тем, что характерный размер, на котором скорость меняется от нуля (на поверхности шара) до своего характерного значения, не равен радиусу шара, как молчаливо предполагалось при введении \tilde{v}_0 , а зависит еще от толщины скин-слоя.

Исследуемое поле скоростей, как следует из (3.10), складывается из двух частей $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \varepsilon\mathbf{V}_1$. Первая описывается слагаемым (3.10) с номером $l = 2$, не зависящим от ε , соответствует центральному диполю и исследована в [3]. Наличие смещения, как уже отмечалось, может сделать шар самодвижущимся. Представляется, что движение такого шара относительно жидкости направлено по линии действия силы \mathbf{F} , т. е. в сторону отрицательной полуоси z . Следовательно, в системе шара скорость течения на бесконечности должна быть направлена вдоль z , причем по величине она равна $u_0 = -2\beta_1\tilde{v}_0$. Имея в виду, что β_1 (3.12) пропорциональна ε , и используя новый масштаб скорости, выражение для u_0 представим в виде

$$u_0 = \varepsilon \frac{3}{140} \frac{aH_0^2}{8\pi\rho\nu} u(\delta), \quad u(\delta) = -\frac{2\beta_1}{\varepsilon} \frac{140 \cdot 4}{3\delta^2}. \quad (4.1)$$

Для случая сильного скин-эффекта, т. е. при $\delta \ll 1$ (см. [2]), константу β_1 (3.12) можно разложить в асимптотический ряд по степеням δ . Результат для $u(\delta)$ имеет вид

$$u(\delta) = 140\delta^2 \left[1 - \frac{3}{5}\delta + O(\delta^2) \right]. \quad (4.2)$$

Безразмерная сила тяги (3.9) при $\delta \ll 1$ равна

$$F_1(\varepsilon, \delta) = 3\varepsilon \left[1 - \frac{5}{2}\delta + O(\delta^2) \right]. \quad (4.3)$$

Из (4.1), (4.2) видно, что при $\delta \ll 1$ скорость u_0 пропорциональна δ^2 (как и скорость \mathbf{V}_0 от центрального диполя [3]) и стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. На первый взгляд данный результат кажется противоречащим соотношению (4.3), согласно которому электромагнитная сила тяги отлична от нуля и при $\delta = 0$. На самом деле противоречия нет, так как при $\delta = 0$ электромагнитные силы и их ротор в жидкости вне шара тождественно

равны нулю. Равна нулю также действующая на шар суммарная сила, поскольку поверхностные электромагнитные силы приводят к перераспределению давления в жидкости по поверхности шара и обусловленная этим равнодействующая сил давления на шар со стороны жидкости уравнивает электромагнитную силу тяги. Следовательно, при $\delta = 0$ имеем дело с непривычной ситуацией, когда при отсутствии движения твердое тело испытывает «сопротивление» со стороны окружающей жидкости (сопротивление давления), которое уравнивает электромагнитную силу тяги. (Как будет отмечено ниже, почти аналогичная ситуация возникает при $\delta = \delta_* \simeq 1$.) При $\delta > 0$ сила тяги превышает силу сопротивления давления и шар приходит в движение относительно жидкости.

Для произвольных δ величина безразмерной силы тяги (3.9) как функция δ и зависимость $u(\delta)$ приведены на рис. 1 (сплошная и штриховая линии соответственно). Видно, что сила тяги при всех δ имеет неизменное направление и убывает при увеличении δ . Из графика зависимости $u(\delta)$ видно, что максимальное значение безразмерной скорости движения шара, достигаемое при $\delta \simeq 0,25$, близко к единице. Следовательно, ϵv_0 действительно характеризует масштаб поступательной скорости шара. Как видно из рис. 1, изучаемое движение обладает еще одной особенностью. Заключается она в том, что при $\delta > \delta_* \simeq 1$ функция $u(\delta)$ принимает отрицательные значения, в то время как F_1 положительна. Это означает, что при $\delta > \delta_*$ шар движется в направлении, противоположном направлению силы тяги (силы, действующей на диполь со стороны магнитного поля от токов в жидкости). Возможность отрицательных скоростей можно усмотреть также из асимптотического (для $\delta \gg 1$) выражения

$$u(\delta) = -\frac{224}{45} \frac{1}{\delta^4} + O\left(\frac{1}{\delta^5}\right).$$

Чтобы понять причину указанной особенности в движении шара и получить представление о характере течения вокруг самодвижущегося шара, обратимся к исследованию поля скоростей, складывающегося из \mathbf{V}_0 и дополнительного поля скоростей \mathbf{V}_1 , пропорционального ϵ . Это дополнительное векторное поле определяется первым и третьим слагаемыми (3.11) и может быть представлено в виде

$$\mathbf{V}_1 = \epsilon \frac{3}{140} \frac{aH_0^2}{8\pi\rho\nu} \{[\chi_r^{(1)}(r) \cos \theta + \chi_r^{(2)}(r) \cos \theta \sin^2 \theta] \mathbf{e}_r + [\chi_\theta^{(1)}(r) \sin \theta + \chi_\theta^{(2)}(r) \sin^3 \theta] \mathbf{e}_\theta\}, \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_r^{(1)} \\ \chi_r^{(2)} \\ \chi_\theta^{(1)} \\ \chi_\theta^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \frac{140}{3\delta^2} \begin{pmatrix} -\frac{2}{r} (\psi_1 + 6\psi_3) \\ 30 \frac{\psi_3}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(\psi_1 + 6\psi_3)] \\ -\frac{15}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi_3) \end{pmatrix}.$$

Качественное поведение функций, входящих в (4.4), представлено на рис. 2 кривыми, относящимися к фиксированному значению параметра $\delta = 0,25$, которому соответствует максимальная скорость движения шара. Видно, что при $r \rightarrow \infty$ функции $\chi_r^{(1)}$, $\chi_\theta^{(1)}$ асимптотически стремятся к значениям $u(\delta)$ и $-u(\delta)$ соответственно (горизонтальные черточки), а функции $\chi_r^{(2)}$, $\chi_\theta^{(2)}$ стремятся к нулю. Вблизи поверхности шара абсолютные значения функций обладают резкими максимумами, причем максимальные значения функций $|\chi_r^{(2)}|$, $|\chi_\theta^{(2)}|$ многократно превышают $|u(\delta)|$. Следовательно, картина обтекания характеризуется наличием интенсивных вихревых течений вокруг шара с характерными скоростями, значительно превышающими скорость поступательного движения.

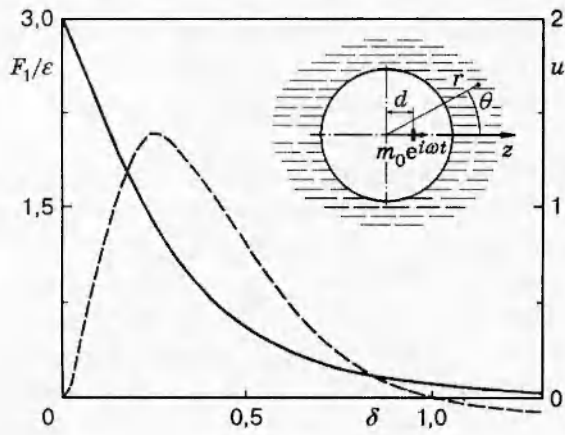


Рис. 1

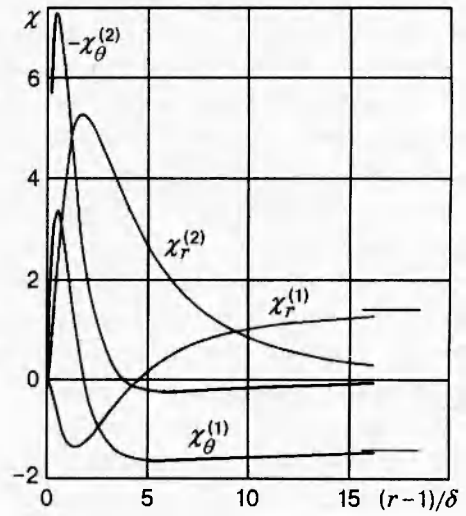


Рис. 2

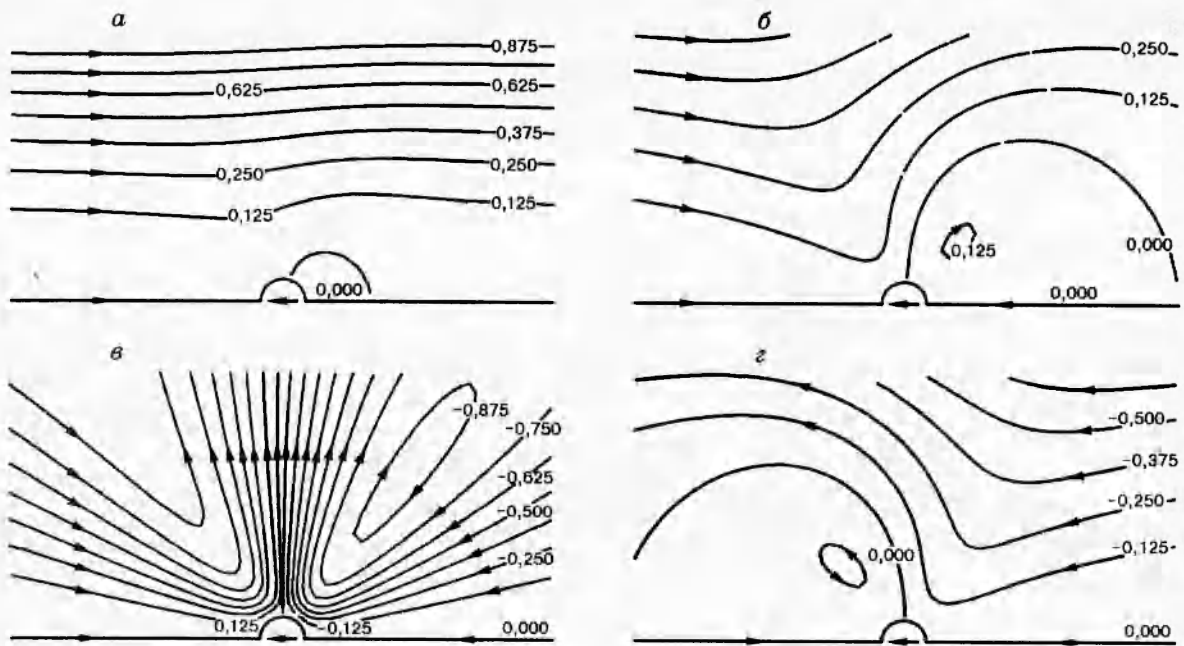


Рис. 3

Это обстоятельство приводит к тому, что поверхностные силы, действующие на шар со стороны жидкости, в существенной степени определяются этими вихревыми течениями. Получается, что при $\delta > \delta_*$ равнодействующая этих сил может уравновесить силу тяги только в том случае, если шар движется в сторону оси z . Картины обтекания представлены на рис. 3. Линии тока суммарного течения, складывающегося из \mathbf{V}_0 и \mathbf{V}_1 , приведены для $\epsilon = 0,1$ и четырех значений δ : 0,25; 0,8; 1,0; 1,5 (рис. 3, *a-g* соответственно). Стрелки внутри шара указывают направление силы, действующей на диполь со стороны магнитного поля, стрелки на линиях тока — направление скорости течения (относительно шара). Видно, что для всех δ , при которых поступательная скорость шара отлична от нуля, независимо от направления движения обтекание отрывное. Отрывная зона находится в кормовой зоне, ее размер зависит от δ . При $\delta = 1$ поступательная скорость шара почти равна нулю и картина обтекания напоминает картину течения [3] от центрального диполя. Напомним, что при $\delta = 1$ сила \mathbf{F} , действующая на диполь со стороны магнитного поля, уравновешивается силой сопротивления при нулевой поступательной скорости шара, т. е. имеет место ситуация, аналогичная описанной выше. Только здесь, в отличие от случая $\delta = 0$, гидродинамическое сопротивление складывается как из сопротивления давления, так и сопротивления трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Менг Дж. К. С., Хрюбс Дж. Д. Электромагнитогидродинамика морской воды: новые перспективы // Магнитная гидродинамика. 1994. № 4. С. 483–506.
2. Хоничев В. И., Яковлев В. И. Движение шара в безграничной проводящей жидкости, вызванное переменным магнитным диполем, расположенным внутри шара // ПМТФ. 1978. № 6. С. 64–71.
3. Яковлев В. И. Вихревые течения в несжимаемой вязкой проводящей жидкости, возникающие под действием переменного магнитного поля // ПМТФ. 1976. № 5. С. 50–57.

Поступила в редакцию 18/XII 1996 г.
