ПМТФ, № 3, 1966

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

А. И. Чудновский

(Ленинград)

Одним из актуальных вопросов механики вязко-упругой среды является вопрос о влиянии температуры. Впервые этот вопрос был затронут в работах А. А. Александрова и Ю. С. Лазуркина, содержащих основные идеи принципа температурно-временной суперпозиции для изотермического нагружения при разных температурах. Аналогичный подход был проведен в работах Лидермана, Ферри и др. В дальнейшем в работе Морланда и Ли [1] этот принцип был формально обобщен на случай переменных температур.

В настоящей работе вопрос о неизотермической деформации вязко-упругой среды рассматривается на базе термодинамики необратимых процессов. Такой подход при достаточно обоснованных предположениях о конструкции основного термодинамического потенциала неизбежно приводит к выводу, что состояние вязко-упругой среды зависит не только от текущей величины поля температур, но и от истории его изменения. Полученные соотношения оказываются близкими к предложенным в работе [1], позволяя, таким образом, обосновать теоретико-физически упомянутый принцип и его обобщение на случай неизотермических процессов.

§ 1. При обычных для механики сплошной среды предположениях об отсутствии изменений электромагнитных полей, химических потенциалов и пр., учитывая только термомеханические эффекты, уравнение баланса энергии можно записать в виде

$$u^{\cdot} = \sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot} + q^i_{\ ,i}, \qquad q^i_{\ ,j} \equiv \frac{\partial q^i}{\partial x^j}, \quad q^i_{\ ,i} \equiv \frac{\partial q^i}{\partial x^j} g^{ij}$$

Здесь u — плотность внутренней энергии, q^i — вектор скорости теплового потока, g^{ij} — метрический тензор (точкой над функцией обозначается производная по времени). Пусть s — плотность энтропии и f — плотность свободной энергии, определяемая формулой

$$f = u - \mathrm{T}s \tag{1.2}$$

При этом уравнение баланса энергии (1.1) можно записать в иной форме

$$f^{\cdot} = \sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot} + q^i_{\ ,i} - \mathrm{T}s^{\cdot} - s\mathrm{T}^{\cdot} \tag{1.3}$$

Как известно, скорость возрастания энтропии всей системы представима в виде суммы

$$S^{\cdot} = S_e^{\cdot} + \int\limits_V \eta^{\cdot} dV \tag{1.4}$$

Здесь S_e — внешний поток энтропии, η — плотность внутреннего источника энтропии. Учитывая, что

$$\int\limits_V \frac{q^i_{\ ,i}}{\mathrm{T}} dV = \int\limits_F \frac{q^i}{\mathrm{T}} n_i dF + \int\limits_V \frac{q^i\mathrm{T}_{,i}}{\mathrm{T}^2} dV \tag{1.5}$$

Здесь F — поверхность, ограничивающая рассматриваемый объем V, из (1.3) и (1.4), получим

$$\eta^{\cdot} = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[-f^{\cdot} + \sigma^{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot} - s\mathrm{T}^{\cdot} - \frac{q^i\mathrm{T}_{,i}}{\mathrm{T}}\right] \tag{1.6}$$

§ 2. Особенно важную роль при термодинамическом анализе играет выбор базисной системы параметров. Все возможные изменения в вязкоупругой среде макроскопически проявляются в изменениях, по крайней мере, одной из величин σ^{ij}, ε_{ij} или T. Поэтому в качестве полной системы параметров состояния элемента среды можно принять

$$\{\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}, T\} \tag{2.1}$$

Выделим из полной деформации часть $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, мгновенно следующую за изменениями внешних воздействий. Как показывают эксперименты, ее с достаточной точностью можно считать идеально упругой, положив

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(t) = G_{ijkl}\,\sigma^{kl} + \alpha\delta_{ij}(T - T_0) \tag{2.2}$$

Этот факт, грубо говоря, объясняется тем, что мгновенная деформация обусловлена изменениями межатомных расстояний, т. е. имеет ту же природу, что и малые деформации обычных низкомолекулярных материалов. При этом деформация последействия определяется равенством

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{2.3}$$

Легко заметить, что система параметров

$$\{\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, T\} \tag{2.4}$$

эквивалентна системе (2.1) и может быть принята в качестве базисной.

Учитывая, что f — функция состояния, из соотношений (1.6) получим

$$\eta^{\cdot} = \frac{1}{T}\left[\left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(1)}}\right)\varepsilon_{ij}^{(1)\cdot} + \left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(2)}}\right)\varepsilon_{ij}^{(2)\cdot} - \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s\right)T^{\cdot} - \frac{q^i T_{,i}}{T}\right] \tag{2.5}$$

Согласно второму началу термодинамики

$$\dot\eta \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Причем равенство имеет место лишь в случае обратимых процессов.

При анализе процессов деформирования воспользуемся идеями, изложенными в работе [2]. В отличие от материалов, являющихся объектом исследования в упомянутой работе, для вязко-упругой среды характерны несколько типов обратимых процессов деформации. Объясняется это тем, что для такой среды обратимые процессы возможны при разных скоростях изменения внешних воздействий.

а) Допустим, что внешние силы изменяются «мгновенно», т. е. в течение столь малого промежутка времени, что деформация последействия не успевает развиться. Поле температур однородно и изменяется также мгновенно, оставаясь однородным

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = 0, \quad T_{,i} = 0$$

При этом из (2.5) получим

$$o = \left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(1)}}\right)\varepsilon_{ij}^{(1)\cdot} - \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s\right)T^{\cdot} \tag{2.7}$$

Отсюда, благодаря независимости $\varepsilon_{ij}^{(1)\cdot}$ и $T^{\cdot}$, следует

$$\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{1}} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} + s = 0 \tag{2.9}$$

В рассматриваемом случае вязко-упругая среда ведет себя как идеально упругая.

б) Пусть все внешние воздействия изменяются квазистатически (с «бесконечно малыми» скоростями), при однородном поле температур. При этом из (2.5) следует

$$o = \left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}}\right) d\varepsilon_{ij}^{(1)} + \left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}\right) d\varepsilon_{ij}^{(2)} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} + s\right) d\mathrm{T} \qquad (2.10)$$

Отсюда

$$\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}} = 0, \quad \sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} + s = 0 \qquad (2.11)$$

Разрешая первое из равенств (2.11) относительно $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, второе — относительно $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ с учетом того, что $\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}$, получим конечные соотношения, связывающие тензор напряжений с тензором полной деформации. Этот случай обратимой и равновесной вязко-упругой деформации формально укладывается в схему физически нелинейной теории упругости.

в) Положим, наконец, что внешние силы изменяются мгновенно, а поле температур — квазистатически, оставаясь однородным

$$\varepsilon_{ij}^{(2)\cdot} = 0, \quad \mathrm{T}_{,i} = 0, \quad \mathrm{T}^{\cdot} = 0$$

В этом случае из (2.5) получим

$$0 = \left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}}\right) \varepsilon_{ij}^{(1)\cdot} \qquad (2.12)$$

Отсюда вновь следует равенство (2.8), тогда как равенства (2.9) и третье из (2.11) теперь не выполняются. Таким образом, равенство (2.8) справедливо при любом обратимом изменении состояния вязко-упругой среды. Обратимый процесс хотя бы одного из указанных типов осуществим из любого состояния; следовательно, (2.8) должно быть справедливо также для любого состояния. В отличие от (2.8), равенства (2.9) и третье из (2.11) справедливы не для всякого состояния.

Учитывая это, можно утверждать, что в общем случае вязко-упругой деформации выражение плотности источника энтропии имеет вид

$$\eta^{\cdot} = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\left(\sigma^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}\right) \varepsilon_{ij}^{(2)\cdot} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} + s\right) \mathrm{T}^{\cdot} - \frac{q^i \mathrm{T}_{,i}}{\mathrm{T}}\right] \qquad (2.13)$$

Отметим еще, что из равенства (2.8), в силу (2.2), непосредственно следует

$$f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \mathrm{T}) = f_1(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \mathrm{T}) + f_2(\varepsilon_{ij}^{(2)}, \mathrm{T}) \qquad (2.14)$$

Последнее равенство, очевидно, справедливо в любой точке фазового пространства.

§ 3. В соответствии с представлениями термодинамики необратимых процессов [3], термодинамические силы можно представить в виде линейной комбинации потоков. Как видно из (2.13), в данном случае роль термодинамических сил играют

$$(\sigma^{ij} - \partial f_2 / \partial \varepsilon_{ij}^{(2)}), \ (\partial f / \partial \mathrm{T} + s), \ \mathrm{T}_{,i},$$

а соответствующих им потоков — величины $\varepsilon_{ij}^{(2)\cdot}$, $\mathrm{T}^{\cdot}$ и q^i.

Следовательно, можно записать

$$\sigma^{ij} - \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}} = B^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)\cdot} + B^{ij} \mathrm{T}^{\cdot} + B^{i} q^{j} + B_{k}^{\ ij} q^{k} \tag{3.1}$$

Примем

$$f_2 (\varepsilon_{ij}^{(2)}, \mathrm{T}) = \overset{mnkl}{A} (\mathrm{T}) \, \varepsilon_{mn}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(2)} + \varphi_2 (\mathrm{T}) \tag{3.2}$$

(По существу — это обычное допущение о линейности реологических соотношений).

Если считать материал изотропным, то последние два слагаемых в выражении (3.1) исключаются в силу принципа Кюри о тензорной размерности. В результате, учитывая (2.14), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sigma^{ij} - A^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)} = B^{ijmn} \varepsilon_{mn}^{(2)\cdot} + B^{ij} \mathrm{T}^{\cdot} \tag{3.3}$$

Запишем ее в привычной форме, разрешив относительно компонентов тензора скоростей деформации последействия $\varepsilon_{mn}^{(2)\cdot}$

$$\varepsilon_{mn}^{(2)\cdot} + L_{mn}^{kl} (\mathrm{T}) \, \varepsilon_{kl}^{(2)} = P_{mnij} \sigma^{ij} - Q_{mn} \mathrm{T}^{\cdot} \tag{3.4}$$

Структуру L, P и Q легко определить из условия изотропии. В дальнейшем будем интересоваться случаем

$$L_{kl}^{mn} (t) = L_{mn}^{kl} (t) \quad \text{при любых } t \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение объект $\Omega (t)$, удовлетворяющий уравнению

$$[\Omega_{ij}^{rs} (t)]^{\cdot} = - L_{ij}^{mn} (t) \, \Omega_{mn}^{rs} (t) \tag{3.6}$$

с начальным условием

$$\Omega_{ij}^{rs} = \delta_i^{\ r} \delta_j^{\ s} \quad \text{при } t = 0$$

(Ω часто называют матрицантом).

При этом общее решение системы (3.4) можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} (t) = \Omega_{ij}^{mn} \varepsilon_{mn}^{(2)} (t = 0) + \int_0^t K_{ij}^{mn} (t, \tau) \, [P_{mnkl} \sigma^{kl} (\tau) - Q_{mn} \mathrm{T}^{\cdot} (\tau)] \, d\tau \tag{3.7}$$

где $K_{ij}^{mn} (t, \tau)$ — так называемая матрица Коши (в данном случае четырехвалентный тензор), определяемая формулой

$$K_{ij}^{mn} (t, \tau) = \Omega_{ij}^{rs} (t) \, [\Omega_{rs}^{mn} (\tau)]^{-1} \tag{3.8}$$

Из предположения о существовании исходного ненапряженного и недеформированного состояния при $t = 0$ следует

$$\varepsilon_{mn}^{(2)} (t = 0) = 0 \tag{3.9}$$

В результате связь между тензором напряжений, тензором полных деформаций и температурой имеет вид (3.10)

$$\varepsilon_{ij} (t) = G_{ijkl} \sigma^{kl} (t) + \alpha \delta_{ij} (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + \int_0^t K_{ij}^{mn} (t, \tau) \, [P_{mnkl} \sigma^{hl} (\tau) - Q_{mn} \mathrm{T}^{\cdot} (\tau)] \, d\tau$$

Для определения матриканта воспользуемся представлением его в виде мультипликативного интеграла

$$\Omega_{ij}^{rs}(t) = \int_0^t (\delta_i^r \delta_j^s - L_{ij}^{rs} dt) \tag{3.11}$$

В том случае, когда выполняется условие (3.5), мультипликативный интеграл (3.11) сводится к тензору вида

$$\exp\Big(-\int_0^t L_{ij}^{rs}(\theta)\, d\theta\Big) \tag{3.12}$$

При этом в силу (3.8)

$$K_{ij}^{mn}(t, \tau) = \exp\Big(-\int_0^t L_{ij}^{rs}(\theta)\, d\theta\Big) \exp \int_0^\tau L_{rs}^{mn}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \exp\Big(-\int_\tau^t L_{ij}^{pq}(\theta)\, d\theta\Big) \exp\Big(-\int_0^\tau L_{pq}^{rs}(\theta)\, d\theta\Big) \exp \int_0^\tau L_{rs}^{mn}(\theta)\, d\theta \tag{3.13}$$

Учитывая, что

$$\exp\Big(-\int_0^\tau L_{pq}^{rs}(\theta)\, d\theta\Big) \exp \int_0^\tau L_{rs}^{mn}(\theta)\, d\theta = \delta_p{}^m \delta_q{}^n \tag{3.14}$$

окончательно получим

$$K_{ij}^{mn}(t, \tau) = \exp\Big(-\int_\tau^t L_{ij}^{mn}(\theta)\, d\theta\Big) \tag{3.15}$$

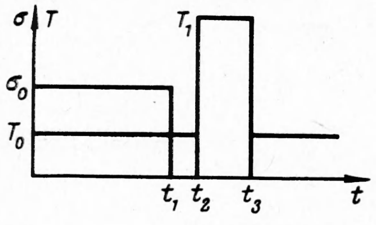
§ 4. Рассмотрим однородную деформацию при каком-нибудь простом напряженном состоянии, например — одноосное растяжение цилиндрического образца. В этом случае выражение (3.17) принимает вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \alpha\,(T(t) - T_0) + \int_\tau^t \exp\Big(-\int_0^t k(\theta)\, d\theta\Big)\Big[\frac{p(T)}{E_r}\sigma(\tau) - \beta T^{\cdot}(\tau)\Big] d\tau \tag{4.1}$$

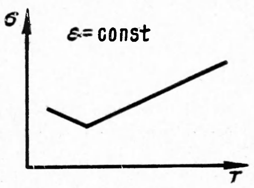
Для изотермического нагружения отсюда будем иметь

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \frac{p(T_0)}{E_r} \exp\left[-k(T_0)(t - \tau)\right] \sigma(\tau)\, d\tau \tag{4.2}$$

В соотношение (4.2) температура входит как параметр. Нетрудно видеть, однако, что



Фиг. 1



Фиг. 2

в общем случае деформация вязко-упругой среды не может зависеть от значения температуры только в текущий момент t (или только в момент τ). В самом деле, рассмотрим процесс, изображенный на фиг. 1.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } t < t_1 \\ 0 & \text{при } t \geqslant t_1 \end{cases}, \qquad T(t) = \begin{cases} T_0 & \text{при } t < t_2 \text{ и } t > t_3 \\ T_1 & \text{при } t_2 \leqslant t \leqslant t_3 \end{cases}$$

У реальных вязко-упругих материалов (например высокополимеров) деформация последействия весьма чувствительна к изменениям температуры, так как внутренний ее механизм существенно связан с тепловым движением молекул. Поэтому повышение температуры на интервале (t_2, t_3) оказывает влияние на деформацию в любой момент $t > t_3$. Однако, если допустить, что соотношение (4.2) справедливо и в случае неизотермической деформации (при $k = k$ (T), где $\mathrm{T} = \mathrm{T}(t)$ или $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\tau)$, то указанные изменения температуры на состояние тела в момент $t > t_3$ никакого влияния не оказывают.

По-видимому, подобные рассуждения послужили основой для обобщения выражения типа (4.2) на неизотермический случай, предложенного в работе [1]. Из этого обобщения вытекает уравнение, аналогичное уравнению (4.1), если положить в последнем $\beta \equiv 0$.

Подчеркнем следующие два обстоятельства: 1) реологическое уравнение (4.1) было получено выше на базе термодинамического анализа; 2) член с коэффициентом β в подынтегральном выражении имеет существенное значение. Последнее вытекает из результатов классических опытов Мейера и Ферри, Гута с сотрудниками и др. (см., например, [4]).

Напомним, что в этих опытах рассматривалось изменение напряжения в образце с фиксированной деформацией при изменении температуры. Типичная кривая, получаемая в опытах такого типа, для эластомеров имеет вид, показанный на фиг. 2. При меньшем некоторого характерного для данного эластомера и заданного $\varepsilon = \mathrm{const}$ значении T, σ с ростом T уменьшается (для обычных материалов это имеет место при любых T). При температуре, большей указанной, σ с ростом температуры увеличивается (практически — по линейному закону).

Из уравнения (4.1) следует (4.3)

$$\sigma(t) = E\left\{\varepsilon(t) - \alpha(\mathrm{T}(t) - \mathrm{T}_0) + \int_0^t \exp\left[-\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\right]\beta\mathrm{T}^{\cdot}(\tau)\,d\tau\right\} -$$

$$-\lambda\int_0^t \Gamma(t, \tau, \lambda)\left\{\varepsilon(\tau) - \alpha(\mathrm{T}(\tau) - \mathrm{T}_0) + \int_0^\tau \exp\left[-\int_s^\tau k(\theta)\,d\theta\right]\beta\mathrm{T}^{\cdot}(s)\,ds\right\}d\tau$$

где $\lambda = E / E_r$. Последний член в выражении (4.3) учитывает релаксационные эффекты, влияние которых в упомянутых опытах было сведено к минимуму. Это означает, что характер зависимости напряжения от температуры в этих опытах определяется выражением

$$\sigma(t) \approx E\left\{\varepsilon(t) - \alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + \int_0^t \exp\left[-\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\right]\beta\mathrm{T}^{\cdot}(\tau)\,d\tau\right\} \qquad (4.4)$$

Отсюда видно, что при подходящем выборе $\beta = \beta(\varepsilon, \mathrm{T})$ уравнение (4.1) описывает экспериментально установленное возрастание напряжений с ростом температуры. Если же положить $\beta = 0$ (при этом, подчеркнем, (4.1) сводится к выражению, предложенному в [1]), то вместо (4.4) получим

$$\sigma(t) \approx E\,[\varepsilon(t) - \alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)]$$

что дает при $\varepsilon = \mathrm{const}$ обычный эффект уменьшения напряжения с ростом T.

Поступила 27 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Morland L. W., Lee E. H. Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials With Temperature Variation. Techn., Rept. N 1. Contr. Nord 18594, Division Appl. Math, Brown University, Providence, 1959.
2. Вакуленко А. А. О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах. Исследования по упругости и пластичности. Сб. I. Изд. ЛГУ, 1961.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд. «Мир», 1964.
4. Трелоар Л. Физика упругости каучука. Изд. иностр. лит., 1953.