УДК 539.217.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ГАЗОВ И ПОЛЫХ ИЗБИРАТЕЛЬНО ПРОНИЦАЕМЫХ МИКРОСФЕР

А. С. Верещагин, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия
E-mails: vereshchag@itam.nsc.ru, fomin@itam.nsc.ru

С использованием принципов осреднения механики многофазных сред получена математическая модель движения твердых избирательно проницаемых частиц и смеси движущихся газов. Для частного одномерного изотермического случая проведено исследование полученной системы дифференциальных квазилинейных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: проницаемость, гелий, микросфера, математическая модель, механика многофазных сред.

DOI: 10.15372/PMTF20150501

Введение. В настоящее время в промышленном масштабе гелий извлекают из природного газа с помощью криогенной технологии, основанной на конденсации углеводородных фракций, являющихся компонентами природного газа. Поэтому выделение небольших объемов гелия из природного газа требует больших затрат [1]. Альтернативой криогенной технологии может стать принципиально новая мембранно-сорбционная технология извлечения гелия из природного газа газоконденсатных месторождений. Эта технология основана на экспериментально подтвержденной способности полых проницаемых сферических частиц (микросфер или ценосфер) избирательно поглощать гелий из гелиеносных газов [2], а затем выделять его и накапливать в виде концентрата с высоким содержанием гелия.

Для описания процесса сорбции гелия микросферами разработан ряд математических моделей и проведены экспериментальные и теоретические исследования [3–5], позволяющие находить требуемые константы проницаемости материалов. Представляет интерес построение модели, описывающей нестационарные эффекты, происходящие при одновременном движении смеси гелиеносного газа и микросфер в качестве сорбента гелия. В настоящей работе такая модель получена в рамках механики многофазных сред с использованием подхода [6, 7], согласно которому осреднение уравнений движения смеси газов и твердых частиц проводится по некоторому макрообъему.

1. Основные обозначения и порядок осреднения. Для вывода законов сохранения массы, импульса и энергии для смеси двух газов и избирательно проницаемых относительно одного из них частиц сделаны следующие основные предположения:

— размеры твердых частиц много больше длины свободного пробега в каждом из газов;

— размеры частиц много меньше характерной длины изменения макроскопических параметров;

— в окрестности каждой точки системы справедливы первый и второй законы термодинамики;

— объемная концентрация частиц много меньше единицы;

— гелий способен проникать внутрь микросфер, плотность потока гелия через оболочку пропорциональна разности парциальных давлений гелия внутри и снаружи частиц;

— гелий, попавший в частицу, начинает двигаться со скоростью этой частицы, а его температура становится равной температуре частицы;

— гелий, покинувший частицу, начинает двигаться со скоростью несущего газа, а его температура становится равной температуре несущего газа;

— скорости и температуры несущих газов гелия и метана равны;

— скорости и температуры оболочки микросфер и гелия внутри микросфер равны;

— гелий и метан полагаются идеальными газами;

— внутри микросфер все параметры однородны;

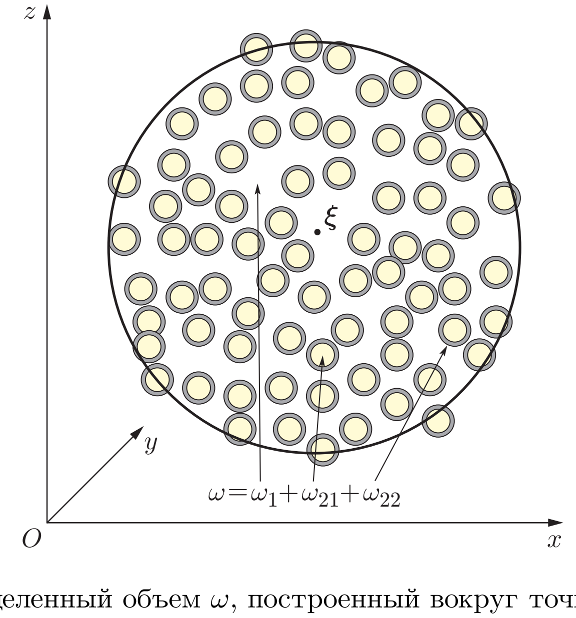
— геометрические и физические свойства всех микросфер одинаковые.

В рамках феноменологического подхода [6] проводится осреднение основных параметров среды по выделенному микрообъему. Для этого рассмотрим точку $\boldsymbol{\xi}$ пространства и содержащий ее объем ω:

$$\omega = \omega_1 + \omega_{21} + \omega_{22}, \tag{1}$$

где ω_1 — часть объема ω, не занятая микросферами; ω_{21} — часть объема ω, занимаемая полостями всех микросфер; ω_{22} — часть объема ω, занятая твердой оболочкой микросфер (см. рисунок).

На объем ω налагается следующее ограничение [6]: с одной стороны, в этом объеме содержится большое число микросфер, с другой — этот объем мал по сравнению с расстоянием, на котором происходит изменение параметров газа вокруг частиц. Первое допущение гарантирует репрезентативность выборки и позволяет проводить осреднения



Выделенный объем ω, построенный вокруг точки $\boldsymbol{\xi}$

по параметрам частиц, второе необходимо для того, чтобы средние параметры газа по ω незначительно отличались от истинных.

Определим границы области межфазного взаимодействия s_i:

$$s_i = \partial\omega_i \setminus \partial\omega,$$

где $i \in \{1, 2, 21, 22\}$.

2. Осреднение и правила дифференцирования. Для оператора осреднения по пространству введем обозначения

$$\langle\varphi(t,\boldsymbol{x})\rangle_i(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\varphi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

$$\langle\varphi(t,\boldsymbol{x})\rangle(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\varphi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

$$\langle\varphi(t,\boldsymbol{x})\rangle_{s_i}(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\int\limits_{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\varphi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

где φ — скалярная, векторная или тензорная величина, определенная в исследуемой области ω_i или s_i, $i \in \{1, 2, 21, 22\}$.

Введем основные правила для преобразования дифференцирования и осреднений.

Для производной по времени имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\varphi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial\varphi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \int\limits_{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\varphi(t,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\,dS, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{v}_2$ — скорость перемещения границы, равная скорости микросферы; $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности $s_i(t,\boldsymbol{\xi})$.

Для производных по пространству имеем

$$\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\operatorname{grad}_{\boldsymbol{x}}\psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\Big) + \int\limits_{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\psi(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\,dS; \tag{4}$$

$$\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\Big) + \int\limits_{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}\,dS; \tag{5}$$

$$\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\Pi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\int\limits_{\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})}\Pi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\Big) + \int\limits_{s_i(t,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{n}\cdot\Pi(t,\boldsymbol{x})\,dS, \tag{6}$$

где $i \in \{1, 21, 22\}$; ψ, $\boldsymbol{a}$, Π — скалярное, векторное и тензорное поля, определенные в $\omega_i(t,\boldsymbol{\xi})$.

В соответствии с (1) в некоторый момент времени t выберем точку пространства $\boldsymbol{\xi}_0$ и введем область $\omega_i(\boldsymbol{\xi}_0)$. Величины $\varphi(\boldsymbol{x})$, $\psi(\boldsymbol{x})$, определенные в ω_i, представим в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \langle\varphi\rangle_i(\boldsymbol{\xi}_0) + \varphi'(\boldsymbol{x}); \tag{7}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \langle\psi\rangle_i(\boldsymbol{\xi}_0) + \psi'(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

В результате осреднения (7), (8) в точке $\boldsymbol{\xi}_0$ получаем

$$\langle\varphi'\rangle_i(\boldsymbol{\xi}_0) = 0, \qquad \langle\psi'\rangle_i(\boldsymbol{\xi}_0) = 0. \tag{9}$$

Используя выражения (7)–(9) для произведения $\varphi\psi$ в точке $\boldsymbol{\xi}_0$, получаем осреднение

$$\langle\varphi\psi\rangle_i = \langle\varphi\rangle_i\langle\psi\rangle_i + \langle\varphi'\psi'\rangle_i. \tag{10}$$

Согласно [6] последнее слагаемое в формуле (10) равно нулю вследствие справедливости гипотезы эргодичности. В дальнейшем, в случае если величины φ, ψ, например пульсации скорости $\varphi = \psi = \boldsymbol{v}_1$, являются зависимыми, $\langle\varphi'\psi'\rangle_i$ пренебрегается как малой величиной. Поэтому будем полагать, что с большой точностью выполняется условие

$$\langle\varphi\psi\rangle_i = \langle\varphi\rangle_i\langle\psi\rangle_i.$$

3. Геометрия системы. Объект исследования — микросфера — представляет собой полую микросферическую частицу с внешним радиусом R, радиусом полости r, толщиной оболочки $d = R - r$.

Справедливы соотношения

$$V^+ = 4\pi R^3/3; \tag{11}$$

$$V^- = 4\pi r^3/3; \tag{12}$$

$$V^s = 4\pi(R^3 - r^3)/3 = 4\pi R^3(1 - \beta^3)/3; \tag{13}$$

$$S^+ = 4\pi R^2, \qquad S^- = 4\pi r^2,$$

где V^+ — объем микросферы; V^- — объем полости микросферы; V^s — объем оболочки микросферы; $\beta = r/R$.

Разделив обе части выражения (1) на ω, получаем

$$m_1 + m_{21} + m_{22} = 1, \tag{14}$$

где

$$m_1 = \omega_1/\omega, \qquad m_{21} = \omega_{21}/\omega, \qquad m_{22} = \omega_{22}/\omega, \tag{15}$$

m_1 — доля свободного объема в ω; m_{21} — доля объема, занятого полостями микросфер; m_{22} — доля объема, занятого твердой оболочкой микросфер.

Введем дополнительно $\omega_2 = \omega_{21} + \omega_{22}$ — объем, занимаемый всеми микросферами в ω. Тогда из (15) находим $m_2 = m_{21} + m_{22}$, из (14) — $m_1 + m_2 = 1$ ($m_2 = \omega_2/\omega$ — доля объема ω, занимаемая микросферами).

Пусть в объеме ω содержится k микросфер, тогда

$$m_{21} = kV^-/\omega; \tag{16}$$

$$m_{22} = kV^s/\omega; \tag{17}$$

$$m_2 = kV^+/\omega; \tag{18}$$

$$s_1 = kS^+. \tag{19}$$

Используя (11)–(13), разделим выражения (16), (17) на (18):

$$m_{21} = \beta^3 m_2, \qquad m_{22} = (1 - \beta^3)m_2.$$

Разделив выражение (19) на (18), получаем

$$\frac{s_1}{\omega} = \frac{3}{R}\,m_2. \tag{20}$$

Разделив на ω обе части формулы (4), где $\psi(t,\boldsymbol{x}) = 1$, $i = 1$, находим

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{n}\,dS = -\nabla_{\boldsymbol{\xi}} m_1(t,\boldsymbol{\xi}). \tag{21}$$

С использованием (2), (21), (20) получаем

$$\langle \boldsymbol{n} \rangle_{s_1} = -\frac{R}{3}\,\frac{\nabla m_1}{m_2} = \frac{R}{3}\,\frac{\nabla m_2}{m_2}. \tag{22}$$

4. Осредненные законы сохранения массы, импульса и энергии для газовой фазы. Рассмотрим движение смеси газов гелия и метана в объеме $\omega_1(t, \boldsymbol{\xi})$ в односкоростном однотемпературном приближении, которое подчиняется следующим законам сохранения, записанным в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{11} \boldsymbol{v}_1 = 0; \tag{23}$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{12} \boldsymbol{v}_1 = 0; \tag{24}$$

$$\frac{\partial \rho_1 \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_1 \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1 - \sigma) = 0,$$

$$\frac{\partial\,(\rho_{11} E_{11} + \rho_{12} E_{12})}{\partial t} + \operatorname{div} [(\rho_{11} E_{11} + \rho_{12} E_{12}) \boldsymbol{v}_1 - \sigma \cdot \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{q}] = 0.$$

Здесь

$$\sigma = \sigma^*, \quad E_{11} = \varepsilon_{11} + \boldsymbol{v}_1^2/2, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + \boldsymbol{v}_1^2/2, \quad \rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12},$$

ρ_{11} — плотность гелия; ρ_{12} — плотность метана; $\boldsymbol{v}_1$ — линейная скорость газов; σ — совместный тензор напряжения для метангелиевой смеси; $\boldsymbol{q}$ — вектор перетока тепла; E_1 — полная удельная энергия смеси; ε_1 — удельная внутренняя энергия смеси; ε_{11} — удельная внутренняя энергия гелия; ε_{12} — удельная внутренняя энергия метана.

На межфазной границе s_1, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}_2$, выполняются условия

$$\rho_{11}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{n} = C_m \beta (p_{11} - p_{21})/d; \tag{25}$$

$$\rho_{11}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \tag{26}$$

$$\rho_{12}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}; \tag{27}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \sigma = \boldsymbol{f}_{12}(\rho_{11}, \rho_{12}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, R, \mu_1, \mu_2, \ldots); \tag{28}$$

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = Q(T_1, T_2, \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots), \tag{29}$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к s_1; C_m — коэффициент проницаемости стенки микросферы; d — толщина стенки микросферы; $\beta = r/R$ — отношение радиуса полости к радиусу частицы; $\boldsymbol{f}_{12}$ — удельная (на единицу площади) сила взаимодействия газа и микросферы; Q — удельный (на единицу площади) поток тепла между смесью газов и микросферой; p_{11} — парциальное давление гелия в смеси газов на границе; p_{21} — парциальное давление гелия в микросфере, находящейся в рассматриваемой точке.

Уравнение (25) определяет плотность массового потока гелия через стенку микросферы, уравнение (26) является условием прилипания газа в направлении по касательной, уравнение (27) — условием прилипания газа к стенке микросферы. Уравнение (28) определяет значение силы, действующей со стороны газа на частицу, а уравнение (29) отвечает за обмен теплом. Неизвестные параметры $\boldsymbol{f}_{12}$, Q уточняются далее.

Изменение массы гелия в объеме ω_1 с помощью (3) определяется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{11}(t, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial \rho_{11}(t, \boldsymbol{x})}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{11}(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n})\, d\boldsymbol{x}. \tag{30}$$

Используя (23), (5), первое слагаемое в (30) представим в виде

$$\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{11}\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{x} = -\operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{11}\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{11}\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (30), приводя подобные и деля на ω, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{11}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{11}\boldsymbol{v}_1\rangle = -\frac{s_1}{\omega}\langle\rho_{11}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{s_1}. \qquad (32)$$

С учетом (27) выражение для метана, аналогичное (32), принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{12}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{12}\boldsymbol{v}_1\rangle = 0. \qquad (33)$$

С использованием формулы (3) выражение для импульса газа в объеме ω_1 запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_1\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1\boldsymbol{v}_1)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_1\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\, d\boldsymbol{x}. \qquad (34)$$

Подставляя в (34) формулу (24) и используя для преобразования дивергенции уравнение (6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_1\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{x} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} (\rho_1\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_1 - \sigma)\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= -\int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} [(\rho_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{n}\cdot\sigma]\, dS. \qquad (35)$$

С использованием формул для осреднения соотношение (35) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_1\boldsymbol{v}_1\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_1\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_1 - \sigma\rangle = -\frac{s_1}{\omega}\langle(\rho_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{n}\cdot\sigma\rangle_{s_1}. \qquad (36)$$

Аналогичное выражение можно получить для полной энергии газа в объеме ω_1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} (\rho_{11}E_{11} + \rho_{12}E_{12})\, d\boldsymbol{x} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\int\limits_{\omega_1(t,\boldsymbol{\xi})} ((\rho_{11}E_{11} + \rho_{12}E_{12})\boldsymbol{v}_1 - \sigma\cdot\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= -\int\limits_{s_1(t,\boldsymbol{\xi})} [((\rho_{11}E_{11} + \rho_{12}E_{12})(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\sigma)\cdot\boldsymbol{v}_1]\, dS. \qquad (37)$$

Записав соотношение (37) через оператор осреднения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{11}E_{11} + \rho_{12}E_{12}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle(\rho_{11}E_{11} + \rho_{12}E_{12})\boldsymbol{v}_1 - \sigma\cdot\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{q}\rangle =$$

$$= -\frac{s_1}{\omega}\langle\rho_{11}E_{11}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\sigma)\cdot\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1}. \qquad (38)$$

В правой части равенства (37) первое слагаемое определяет межфазный обмен энергией за счет межфазного перехода массы, второе слагаемое — переток тепла, третье представляет собой работу силы по перемещению газа на межфазной поверхности.

Рассмотрим правые части уравнений (32), (36), (38).

С учетом (25) правая часть уравнения (32), описывающая плотность массового потока гелия через оболочку микросферы, принимает вид

$$\langle \rho_{11}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{s_1} = \Big\langle \frac{C_m\beta}{d}\,(p_{11}-p_{21})\Big\rangle_{s_1} =$$

$$= \frac{C_m\beta}{d}\Big(\langle p_{11}\rangle_{s_1} - \frac{1}{s_1}\sum_{i=1}^{k} s_1^i p_{21}^i\Big) \approx \frac{C_m\beta}{d}\,(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21}), \tag{39}$$

где p_{21}^i — парциальное давление гелия в i-й частице; s_1^i — часть поверхности i-й частицы, находящейся в объеме ω. Последняя аппроксимация выполнена в предположении, что среднее значение давления p_{11} на границе незначительно отличается от среднего в объеме ω_1 [6].

В правой части равенства (36) первое слагаемое M_{g1} описывает потерю импульса газом за счет уменьшения его массы, а второе слагаемое M_{g2} — за счет силы взаимодействия частиц и газа на поверхности s_1:

$$M_{g1} = -\frac{s_1}{\omega}\,\langle(\rho_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1}, \qquad M_{g2} = \frac{s_1}{\omega}\,\langle\boldsymbol{n}\cdot\sigma\rangle_{s_1}. \tag{40}$$

Используя формулы (10), (20), (39) и граничное условие (27), получаем

$$M_{g1} = -\frac{s_1}{\omega}\,\langle(\rho_{11}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} - \frac{s_1}{\omega}\,\langle(\rho_{12}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} \approx$$

$$\approx -\frac{s_1}{\omega}\,\langle\rho_{11}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{s_1}\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} \approx -\frac{3C_m\beta}{dR}\,m_2(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21})\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1}. \tag{41}$$

Среднее значение скорости $\boldsymbol{v}_1$ на поверхности s_1 отличается от среднего значения в ω_1, так как зависит от массопереноса гелия внутрь частицы. Используя граничные условия (25), (26), выражение для $\boldsymbol{v}_1$ на s_1 представим в виде

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{C_m\beta}{d\rho_{11}}\,(p_{11}-p_{21})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_2.$$

С помощью выражения (22) получаем следующее приближение:

$$\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} \approx \frac{C_m R\beta}{3d}\,\frac{\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21}}{\langle\rho_{11}\rangle_1 m_2}\,\nabla m_2 + \langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2. \tag{42}$$

Значение параметра M_{g2}, представляющего собой удельную силу в единице объема ω, действующую на частицы со стороны газа, можно найти из решения соответствующих задач обтекания сферы набегающим потоком газов. Например, в случае потоков с малой объемной концентрацией частиц можно ограничиться рассмотрением одной частицы [8, 9]:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_D + \boldsymbol{f}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{f}_m + \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}}, \tag{43}$$

где

$$\boldsymbol{f}_D = 6\pi f_D R\mu(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1); \tag{44}$$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}} = (4\pi/3)R^3\nabla p; \tag{45}$$

$$\boldsymbol{f}_m = \frac{2}{3}\,\pi R^3\rho_1\,\frac{d_2}{dt}\,(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2); \tag{46}$$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} = 6R^2(\pi\rho_1\mu)^{1/2}\int\limits_0^t \frac{d_2}{d\tau}\,(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\,\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}, \tag{47}$$

$\boldsymbol{f}_D$ — сила Стокса; $\boldsymbol{f}_{\rm A}$ — сила Архимеда; $\boldsymbol{f}_m$ — сила присоединенной массы; $\boldsymbol{f}_{\rm B}$ — сила Бассе; f_D — коэффициент в выражении для силы Стокса, зависящий от режима обтекания частицы и стесненности потока; μ — вязкость смеси газов; $\boldsymbol{v}_2$ — скорость частицы; $\boldsymbol{v}_1$ — скорость газа на бесконечности; R — радиус частицы; ρ_1 — плотность газа на бесконечности; ∇p — градиент давления в окрестности частицы; $d_i/dt = \partial/\partial t + (v_i \nabla)$ — субстанциональная производная ($i = 1, 2$).

Иной подход представлен в работе [6].

Зафиксируем $\boldsymbol{\xi}$ и рассмотрим в $\omega_1(\boldsymbol{\xi})$ тензор напряжения $\sigma = -p_1 I + \tau$, где I — единичный тензор; p_1 — давление газа; τ — девиаторная составляющая тензора напряжений. Давление в окрестности точки $\boldsymbol{\xi}$ представим в виде

$$p_1(\boldsymbol{x}) = \langle p_1\rangle_1(\boldsymbol{\xi}) + p'(\boldsymbol{x}).$$

Составляющую силы (40), образованную шаровой частью тензора напряжения, запишем в виде

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{s_1(\boldsymbol{\xi})} p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\,dS = \frac{\langle p_1\rangle_1(\boldsymbol{\xi})}{\omega}\int\limits_{s_1(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{n}\,dS + \frac{1}{\omega}\int\limits_{s_1(\boldsymbol{\xi})} p'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\,dS \approx -\langle p_1\rangle_1(\boldsymbol{\xi})\nabla_{\boldsymbol{\xi}} m_1(\boldsymbol{\xi}). \qquad (48)$$

В (48) пренебрегается интегралом от пульсаций $p'(\boldsymbol{x})$ и используется формула (21).

Из анализа формул (44)–(47) следует, что полученное выражение является аналогом силы Архимеда $\boldsymbol{f}_{\rm A}$, введенной формально. Шаровая часть тензора напряжений, которой пренебрегается, также определяет силу присоединенных масс $\boldsymbol{f}_m$. Девиаторная составляющая определяет силу Бассе $\boldsymbol{f}_{\rm B}$ и силу Стокса $\boldsymbol{f}_D$.

В дальнейшем сила Архимеда, полученная в рамках подхода [6], и сила Стокса, определенная в (44), рассматриваются в качестве первого приближения.

Таким образом,

$$M_{g2} = \langle p_1\rangle_1 \nabla m_1 + \frac{m_2}{(4/3)\pi R^3}\, 6\pi f_D R \langle\mu\rangle_1 (\langle \boldsymbol{v}_2\rangle_2 - \langle \boldsymbol{v}_1\rangle_1). \qquad (49)$$

Правая часть уравнения (37) состоит из суммы трех слагаемых

$$E_{g1} = -\frac{s_1}{\omega}\,\langle \rho_{11}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot \boldsymbol{n} E_{11}\rangle_{s_1} - \frac{s_1}{\omega}\,\langle \rho_{12}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot \boldsymbol{n} E_{12}\rangle_{s_1};$$

$$E_{g2} = \frac{s_1}{\omega}\,\langle \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{s_1}; \qquad (50)$$

$$E_{g3} = \frac{s_1}{\omega}\,\langle (\boldsymbol{n}\cdot\sigma)\cdot \boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1},$$

где E_{g1} — количество энергии, потерянной газом при переходе части гелия в частицу; E_{g2} — суммарная теплоотдача газа частицам через межфазную поверхность; E_{g3} — работа поверхностных сил по перемещению газа на межфазной границе.

Используя аналогичную использованной ранее технику осреднения и выражения (25), (27), получаем следующее соотношение для E_{g1}:

$$E_{g1} \approx \frac{3C_m\beta}{dR}\, m_2(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21})(\langle \varepsilon_{11}\rangle_{s_1} + \langle \boldsymbol{v}_1\rangle^2_{s_1}). \qquad (51)$$

С помощью закона Ньютона — Рихмана выражение (50) можно записать в виде

$$E_{g2} \approx \frac{3\alpha}{R}\, m_2(\langle T_2\rangle_2 - \langle T_1\rangle_1), \qquad (52)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; T_1 — температура газа; T_2 — температура микросфер.

Используя (49), получаем аппроксимацию для E_{g3}

$$E_{g3} \approx M_{g2} \cdot \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle_{s_1}. \tag{53}$$

5. Осредненные законы сохранения массы, импульса и энергии для твердой фазы, занятой микросферами. Частица с газом внутри движется как твердое тело со скоростью $\boldsymbol{v}_2$. Используя (3), рассмотрим изменение массы газа внутри всех частиц в объеме ω_{21}:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{54}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (54) представим в виде

$$\int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = s_1 \frac{C_m \beta}{d} \left(\langle p_{11} \rangle_1 - \langle p_{21} \rangle_{21}\right).$$

С использованием (5) находим

$$0 = \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{55}$$

Подставляя поверхностный интеграл из уравнения (55) в (54), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{21} \rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \langle \rho_{21} \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{s_1}{\omega} \frac{C_m \beta}{d} \left(\langle p_{11} \rangle_1 - \langle p_{21} \rangle_{21}\right). \tag{56}$$

Уравнения движения для твердой фазы частиц, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}_2$ и имеющей плотность $\rho_{22}^0 = \text{const}$, запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{22}^0 \rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \langle \rho_{22}^0 \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0. \tag{57}$$

С учетом (3) изменение во времени полного импульса всех частиц в ω описывается выражением

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big(\int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0 \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} \Big) &= \\
= \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{21} \boldsymbol{v}_2)\, d\boldsymbol{x} &+ \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{22}^0 \boldsymbol{v}_2)\, d\boldsymbol{x} + \\
&+ \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21} \boldsymbol{v}_2 (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n})\, dS + \int\limits_{s_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0 \boldsymbol{v}_2 (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n})\, dS.
\end{aligned} \tag{58}$$

Закон сохранения импульса для всех микросфер в ω с учетом поглощения (выделения) гелия запишем в виде

$$\sum_i \Big(\omega_{21}^i(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{21} \boldsymbol{v}_2^i) + \omega_{22}^i(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{22}^0 \boldsymbol{v}_2^i) \Big) = s_1 \frac{C_m \beta}{d} \left(\langle p_{11} \rangle_1 - \langle p_{21} \rangle_{21}\right) \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle_{s_1} - \omega \boldsymbol{f},$$

где $\boldsymbol{f}$ — сила, действующая на частицы со стороны газа. В соответствии с условием баланса сил согласно (49) эта сила равна

$$\boldsymbol{f} = \langle p_1 \rangle_1 \nabla m_1 + \frac{m_2}{(4/3)\pi R^3}\, 6\pi f_D R \langle \mu \rangle_1 \left(\langle \boldsymbol{v}_2 \rangle_2 - \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle_1\right).$$

Силой взаимодействия частица — частица пренебрегается.

Для того чтобы избавиться от поверхностных интегралов в формуле (58), необходимо выполнить следующее преобразование с использованием (6):

$$\int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{21}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{n}\cdot(\rho_{21}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2)\, dS; \qquad (59)$$

$$\int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{22}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{n}\cdot(\rho_{22}\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2)\, dS. \qquad (60)$$

Левые части уравнений (59), (60) равны нулю, так как функции, к которым применяется операция дивергенции, являются постоянными внутри микросфер. Таким образом, закон сохранения импульса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\langle\rho_{21}\boldsymbol{v}_2\rangle + \langle\rho_{22}^0\boldsymbol{v}_2\rangle) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\,(\langle\rho_{21}\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_2\rangle + \langle\rho_{22}\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{v}_2\rangle) =$$

$$= \frac{s_1}{\omega}\,\frac{C_m\beta}{d}\,(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21})\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} - \boldsymbol{f}. \qquad (61)$$

Используя (3), производную по времени от полной энергии второй фазы запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}E_{21}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0E_{22}\, d\boldsymbol{x}\Big) =$$

$$= \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial\rho_{21}E_{21}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial\rho_{22}^0E_{22}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}E_{21}(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\, dS + \int\limits_{s_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0E_{22}(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\, dS, \qquad (62)$$

где $E_{21} = \varepsilon_{21} + \boldsymbol{v}_2^2/2$; $E_{22} = \varepsilon_{22} + \boldsymbol{v}_2^2/2$.

С использованием (5) находим

$$\int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{21}E_{21}\boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}E_{21}\boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{21}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{21}E_{21}\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n}\, dS; \qquad (63)$$

$$\int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \rho_{22}^0E_{22}\boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \int\limits_{\omega_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0E_{22}\boldsymbol{v}_2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{s_{22}(t,\boldsymbol{\xi})} \rho_{22}^0E_{22}\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n}\, dS. \qquad (64)$$

Поскольку внутри каждой частицы значения параметров полагаются постоянными, левые части уравнений (63), (64) равны нулю.

Закон сохранения энергии для всех микросфер в ω принимает вид

$$\sum_i \Big(\omega_{21}^i(t,\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho_{21}^iE_{21}^i) + \omega_{22}^i(t,\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho_{22}^0E_{22}^i)\Big) =$$

$$= s_1\,\frac{C_m\beta}{d}\,(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21})\langle E_{21}\rangle_{s_{21}} - \omega\boldsymbol{f}\cdot\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} + s_1\alpha(\langle T_1\rangle_1 - \langle T_2\rangle_2). \qquad (65)$$

Подставляя (65), (63), (64) в (62), получаем следующее выражение в терминах средних величин:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho_{21}E_{21} + \rho_{22}^0 E_{22}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle(\rho_{21}E_{21} + \rho_{22}^0 E_{22})\boldsymbol{v}_2\rangle =$$

$$= \frac{s_1}{\omega}\,\frac{C_m\beta}{d}\,(\langle p_{11}\rangle_1 - \langle p_{21}\rangle_{21})\langle E_{21}\rangle_{s_{21}} - \boldsymbol{f}\cdot\langle \boldsymbol{v}_1\rangle_{s_1} + \frac{\alpha s_1}{\omega}\,(\langle T_1\rangle_1 - \langle T_2\rangle_2). \qquad (66)$$

Из закона сохранения энергии следует равенство $\langle E_{21}\rangle_{s_{21}} = -\langle E_{11}\rangle_{s_1}$.

6. Итоговые уравнения. Используя введенные предположения и дополнительные соотношения (10), (20), (39), (41), (42), (49), (51)–(53), преобразуем уравнения (32), (33), (56), (57), (36), (61), (38), (66). Получаем систему уравнений, описывающих движение твердых полых избирательно проницаемых сферических частиц в смеси газов гелия и метана, для осредненных параметров смеси $\langle\cdot\rangle$ и $\langle\cdot\rangle_i$ ($i \in \{1, 2, 12, 21, 22\}$):

— законы сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{11}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{11}\rangle\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1 = -K_{12}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{12}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{12}\rangle\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{21}\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{21}\rangle\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 = K_{12}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_{22}^0\rangle + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_{22}^0\rangle\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 = 0,$$

где

$$K_{12} = \frac{3C_m\beta}{Rd}\,m_2\Big(\frac{p_{11}}{m_1} - \frac{p_{21}}{m_{21}}\Big), \quad p_{11} = \langle\rho_{11}\rangle R_1\langle T_1\rangle_1, \quad p_{21} = \langle\rho_{21}\rangle R_1\langle T_1\rangle_1;$$

— законы сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_1\rangle\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1 + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_1\rangle\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1\otimes\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1 = -\nabla p_1 - \boldsymbol{M}_{12} + \boldsymbol{f},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho_2\rangle\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\langle\rho_2\rangle\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2\otimes\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 = \boldsymbol{M}_{12} - \boldsymbol{f},$$

где

$$\langle\rho_1\rangle = \langle\rho_{11}\rangle + \langle\rho_{12}\rangle, \qquad \langle\rho_2\rangle = \langle\rho_{21}\rangle + \langle\rho_{22}^0\rangle,$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12}, \qquad p_{12} = \langle\rho_{12}\rangle R_2\langle T_1\rangle_1,$$

$$\boldsymbol{M}_{12} = K_{12}\Big(\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 + \frac{K_{12}}{\langle\rho_{11}\rangle_1}\Big(\frac{R}{3m_2}\Big)^2\nabla m_2\Big),$$

$$\boldsymbol{f} = -\frac{p_1}{m_1}\nabla m_2 + \frac{m_2}{(4/3)\pi R^3}\,6\pi f_D R\langle\mu\rangle_1(\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 - \langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1);$$

— законы сохранения энергии

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}((U_1 + p_1)\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1 - \langle\boldsymbol{q}\rangle) = -R_{12} + Q_{12} + A_{12},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} U_2\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 = R_{12} - Q_{12} - A_{12},$$

где

$$U_1 = (\langle\rho_{11}\rangle C_V^{(1)} + \langle\rho_{12}\rangle C_V^{(2)})\langle T_1\rangle_1 + \langle\rho_1\rangle\langle\boldsymbol{v}_1\rangle_1^2/2,$$

$$U_2 = (\langle\rho_{21}\rangle C_V^{(1)} + \langle\rho_{22}^0\rangle C_s)\langle T_2\rangle_2 + \langle\rho_2\rangle\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2^2/2,$$

$$R_{12} = K_{12}\Big(C_V^{(1)}\langle T_2\rangle_2 + \frac{1}{2}\Big(\langle\boldsymbol{v}_2\rangle_2 + \frac{K_{12}}{\langle\rho_{11}\rangle_1}\Big(\frac{R}{3m_2}\Big)^2\nabla m_2\Big)^2\Big),$$

$$Q_{12} = \frac{3\alpha}{R}\, m_2(\langle T_2\rangle_2 - \langle T_1\rangle_1), \qquad A_{12} = \boldsymbol{f}\cdot\Big(\langle \boldsymbol{v}_2\rangle_2 + \frac{K_{12}}{\langle\rho_{11}\rangle_1}\Big(\frac{R}{3m_2}\Big)^2\nabla m_2\Big),$$

$C_V^{(1)}$, $C_V^{(2)}$ — коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме для гелия и метана; C_s — коэффициент теплоемкости оболочки микросферы; α — коэффициент теплопередачи, зависящий от концентрации компонентов смеси в $\omega_1(t, \boldsymbol{\xi})$.

Полученные уравнения дополним уравнениями для связи объемных концентраций

$$m_1 + m_2 = 1,$$
$$m_{21} = (1 - \beta^3)m_2, \qquad m_{22} = \beta^3 m_2,$$

а также для связи между объемной концентрацией и осредненной плотностью твердой фазы

$$\langle \rho_{22}^0\rangle = \rho_{22}^0(1 - \beta^3)m_2,$$

где ρ_{22}^0 — плотность твердой стенки микросферы.

7. Одномерный нестационарный случай. Переобозначая переменные и записывая вместо $\boldsymbol{\xi}$ переменную x, рассмотрим приведенную систему законов сохранения в одномерном нестационарном изотермическом случае ($T_1 = T_2 = T = \mathrm{const}$):

$$\frac{d_1\rho_{11}}{dt} + \rho_{11}\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{3m_2}{R}\,K, \qquad \frac{d_1\rho_{12}}{dt} + \rho_{12}\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d_2\rho_{21}}{dt} + \rho_{21}\,\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{3m_2}{R}\,K, \qquad \frac{d_2 m_2}{dt} + m_2\,\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$
$$\rho_1\,\frac{d_1 v_1}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \Big(\frac{p_1}{m_1} + \frac{K^2 m_1}{\rho_{11}}\Big)\frac{\partial m_2}{\partial x} = \frac{3m_2}{R}\,K(v_1 - v_2) + \frac{m_2}{V^+}\,f_S,$$
$$\rho_2\,\frac{d_2 v_2}{dt} - \Big(\frac{p_1}{m_1} + \frac{K^2 m_1}{\rho_{11}}\Big)\frac{\partial m_2}{\partial x} = -\frac{m_2}{V^+}\,f_S,$$

где

$$K = \frac{C_m\beta}{d}\Big(\frac{\rho_{11}}{m_1} - \frac{\rho_{21}}{\beta^3 m_2}\Big)R_1T_1, \qquad \rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}, \qquad \rho_2 = \rho_{21} + \rho_{22},$$
$$p_1 = p_{11} + p_{12}, \qquad p_{11} = \rho_{11}R_1T_1, \qquad p_{12} = \rho_{12}R_2T_1, \qquad f_S = 6\pi R f_D\mu(v_2 - v_1).$$

Дополнительно в уравнениях используются объемные доли фаз $m_1 = m_1(t, x)$, $m_2 = m_2(t, x)$, для которых справедливы соотношения

$$m_1 + m_2 = 1, \qquad \rho_{22} = \rho_{22}^0(1 - \beta^3)m_2.$$

Для функции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, x)$ система законов сохранения в векторной форме записывается в виде системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + A(\boldsymbol{u})\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{f}, \tag{67}$$

где

$$\boldsymbol{u} = \{\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, m_2, v_1, v_2\}^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & 0 & \rho_{12} & 0 \\ 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & \rho_{21} \\ 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 & m_2 \\ R_1T/\rho_1 & R_2T/\rho_1 & 0 & (p_1/m_1 + K^2 m_1/\rho_{11})/\rho_1 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(p_1/m_1 + K^2 m_1/\rho_{11})/\rho_2 & 0 & v_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = \Big(-\frac{3m_2}{R}\,K, 0, \frac{3m_2}{R}\,K, 0, \frac{3m_2}{R}\,\frac{K}{\rho_1}\,(v_1 - v_2) + \frac{m_2}{(4/3)\pi R^3 \rho_1}\,f_S, -\frac{m_2}{(4/3)\pi R^3 \rho_2}\,f_S \Big)^{\text{т}}.$$

Тип системы уравнений зависит от собственных значений матрицы A. В данном случае имеется четыре действительных собственных значения v_1, v_2, $v_1 \pm \sqrt{p_1/\rho_1}$ и два комплексно-сопряженных $v_2 \pm i\sqrt{(m_2/\rho_2)(p_1/m_1 + K^2 m_1/\rho_{11})}$. Отсюда следует, что система квазилинейных уравнений (67) является системой составного типа.

Заключение. Получена математическая модель движения твердых избирательно проницаемых частиц и смеси газов в рамках подхода, использующего осреднения по объему. На примере частного одномерного изотермического случая показано, что математическая модель является системой квазилинейных уравнений в частных производных составного типа, что согласуется с ранее полученными результатами [10] для моделей газ — частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев И. Л.** Гелиевая промышленность в России и мировой опыт создания и эксплуатации гелиевого оборудования // Хим. и нефт. машиностроение. 1995. Т. 2. С. 16–22.
2. **Tsugawa R. T., Moen I., Roberts P. E., Souers P. C.** Permeation of helium and hydrogen from glass-microsphere laser targets // J. Appl. Phys. 1976. V. 47, N 5. P. 1987–1993.
3. **Верещагин А. С., Зиновьев В. Н., Фомин В. М. и др.** Оценка коэффициента проницаемости стенок микросфер // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2010. Т. 5, № 2. С. 8–16.
4. **Верещагин А. С., Верещагин С. Н., Фомин В. М.** Математическое моделирование движения импульса концентрации гелия по колонке, заполненной ценосферами // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 92–102.
5. **Верещагин А. С., Казанин И. В., Зиновьев В. Н. и др.** Математическая модель проницаемости микросфер с учетом их дисперсионного распределения // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 88–96.
6. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
7. **Whitaker S.** The method of volume averaging. S. l.: Springer Sci.: Business Media, 1999.
8. **Яненко Н. Н.** Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухин, А. Н. Папырин, В. М. Фомин. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
9. **Волков К. Н.** Течение газа с частицами / К. Н. Волков, Н. В. Емельянов. М.: Физматлит, 2008.
10. **Киселев С. П.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев, В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.

Поступила в редакцию 2/III 2015 г.