

УДК 519.676

Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений*

С.С. Артемьев^{1,2}, А.А. Иванов¹, Д.Д. Смирнов²

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: ssa@osmf.ssc.ru (Артемьев С.С.), brrp@mail.ru (Иванов А.А.), smirnovdd@mail.ru (Смирнов Д.Д.)

Артемьев С.С., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 15–26.

В работе исследуются проблемы численного анализа стохастических дифференциальных уравнений с осциллирующими траекториями решения. Для анализа численного решения предлагается использовать частотные характеристики, обобщающие интегральную кривую и фазовый портрет. Приводятся результаты численных экспериментов, проведённых на кластере НКС–30Т Сибирского суперкомпьютерного центра при ИВМиМГ СО РАН с использованием комплекса программ PARMONC.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения, частотная интегральная кривая, частотный фазовый портрет, обобщённый метод Эйлера.*

Artemiev S.S., Ivanov A.A., Smirnov D.D. New frequency characteristics of the numerical solution to stochastic differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 15–26.

The problems of the numerical analysis of stochastic differential equations with oscillatory solutions trajectories are studied. For the analysis of the numerical solution it is proposed to use the frequency response of generalizing the integral curve and the phase portrait. The results of numerical experiments carried out on a cluster of NCC–30T Siberian Supercomputer Center at the ICM&MG SB RAS using a set of programs PARMONC are presented.

Key words: *stochastic differential equations, cumulative frequency curve, frequency phase portrait, generalized Euler's method.*

Современное развитие многопроцессорной вычислительной техники, у которой число ядер исчисляется многими сотнями тысяч, выдвигает на первый план методы Монте-Карло (ММК), наиболее адаптированные к параллельным вычислениям, как с точки зрения простоты распараллеливания алгоритмов, так и необходимости проведения огромного количества идентичных расчётов. Наибольшая эффективность использования ММК в параллельных вычислениях достигается при моделировании долговременных случайных процессов, в частности, решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Моделируя на суперкомпьютере независимые между собой траектории решения СДУ, можно оценить любые требуемые функционалы от решения с заданной точностью.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00340) и проекта Ведущие научные школы НШ-5111.2014.1.

Математические модели в виде СДУ с осциллирующими решениями возникают в самых разных областях науки: в динамике механических систем [1], в виброударных системах [2], в статистической радиотехнике [3], в теории колебаний упругих тел [4], в статистической радиофизике [5], в химии [6], в гидродинамике [7], в аэродинамике [8], в финансовой математике [9].

Обычно наличие мультипликативного шума в стохастической модели вызывает рост дисперсии решения СДУ и сильную асимметрию его распределения, что, соответственно, требует даже для оценки математического ожидания решения моделирование ансамблей траекторий больших размеров. Наиболее сложными для всех методов исследования свойств решений систем СДУ являются нелинейные стохастические колебания.

Практика вычислений показала, что моментные функции и даже плотности распределений решений СДУ не дают полной информации о поведении во времени нелинейных стохастических колебаний. Более информативными являются частотные обобщения интегральной кривой (частотная интегральная кривая (ЧИК)) и фазовой траектории (частотный фазовый портрет (ЧФП)), в которых учитывается вся статистика из моделируемого ансамбля траекторий.

В настоящей работе рассматривается модель линейного осциллятора, нелинейное уравнение Ван-дер-Поля, нелинейный колебательный контур с вынужденными колебаниями, задаваемыми двумерными системами СДУ с мультипликативными шумами, и обсуждаются результаты статистического моделирования их решений на многопроцессорном суперкомпьютере. Расчёты проводились на кластере НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного Центра при ИВМиМГ СО РАН с помощью библиотеки PARMONC [10], предназначенной для решения разнообразных задач методом Монте-Карло.

1. Стохастические осцилляторы

Простейшим численным методом для решения задачи Коши для систем СДУ в смысле Ито:

$$dy = f(y) dt + \sigma(y) dw(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

является обобщённый метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n)\xi_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad t_{n+1} = t_0 + (n+1)h. \quad (1.2)$$

Здесь ξ_{n+1} — независимые между собой случайные векторы с независимыми нормально распределёнными компонентами, h — шаг интегрирования [11].

Напомним, что для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) собственные колебания задаются уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0,$$

при добавлении в уравнение слагаемого ay^3 система становится нелинейной автоколебательной, при добавлении слагаемого $A \sin \nu t$ уравнение описывает вынужденные колебания, причём при условии $\nu \sim \omega$ возникает эффект резонанса.

Линейное уравнение осциллятора, когда “шумит” только частота колебаний решения и отсутствует декремент затухания, записывается в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= -\omega^2 y_1 dt + \sigma y_1 dw(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Нелинейное уравнение Ван-дер-Поля с одним “шумящим” коэффициентом записывается в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= (ay_2(1 - by_1^2) - \omega^2 y_1) dt + \sigma y_1 dw(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Постоянные a, b, ω в (1.4) определяют скорость переходных участков в решении и наличие “полочек”. Для математического ожидания решения (1.4) не существует ни явного формульного представления, ни замкнутой системы ОДУ для его численного расчёта. Единственным конструктивным способом анализа нелинейных СДУ с большой интенсивностью шума является ММК.

Нелинейное уравнение “биения” задаётся в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= -(\lambda y_2 + \omega^2 y_1 + ay_1^3 + A \sin vt) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t) + \sigma_2 dw_2(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Характерной особенностью решения СДУ (1.5) является изменение амплитуды колебаний траекторий решения со временем. В дальнейших расчётах начальное значение задачи Коши для всех систем СДУ задается детерминированным.

2. ЧИК и ЧФП

При численном анализе систем ОДУ с осциллирующими решениями принято наряду с графиком интегральной кривой $y_i(t)$ исследовать фазовый портрет двух компонент решения $(y_i(t), y_j(t))$. Аналогами интегральной кривой и фазового портрета для решений систем СДУ в дальнейшем будем использовать частотную интегральную кривую (ЧИК) и частотный фазовый портрет (ЧФП). Отметим, что ЧИК в фиксированный момент времени t_n будет являться аппроксимацией плотности распределения $p(y_i(t_n))$ (после соответствующей нормировки), т.е. даёт оценку решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Для одной моделируемой траектории решения системы СДУ график ЧФП даёт аналог фазового портрета $(y_i(t), y_j(t))$. В отличие от гистограмм, в которых статистика собирается по ансамблю моделируемых траекторий СДУ для фиксированного момента времени, в ЧИК и ЧФП собирается полная информация по всему ансамблю на каждом шаге на всём интервале интегрирования.

Введём формальное определение ЧИК и ЧФП.

1. Сетка S_K и ЧИК W_K :

$$S_K = \left\{ (U_i, \tau_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, \quad U_0 = A, \quad U_{N_U} = B, \quad U_i = U_0 + ih_U, \quad i = 1, \dots, (N_U - 1), \\ h_\tau = \frac{\tau_{N_\tau} - \tau_0}{N_\tau}, \quad \tau_0 = C, \quad \tau_{N_\tau} = D, \quad \tau_j = \tau_0 + jh_\tau, \quad j = 1, \dots, (N_\tau - 1) \end{array} \right. \right\}.$$

Здесь $[C, D] \subseteq [0, T]$, $A < B$ произвольны, h_U и h_τ — шаги сетки ЧИК по пространству и времени.

$$W_K = \{W_{ij} \mid W_{ij} \text{ — количество пар } (y_m(t_n), t_n), \text{ попавших в } (i, j) \text{ площадки сетки } S_K\}.$$

Здесь $y_m(t_n)$ — значение m -й компоненты решения СДУ в узле интегрирования t_n . Номер узла сетки находится по формулам: $i = \left[\frac{y_m(t_n) - A}{h_U} \right]$, $j = \left[\frac{t_n - C}{h_\tau} \right]$, где $n = 0, \dots, N$, а $[\]$ — целая часть числа. Для ЧИК шаг интегрирования h и шаг сетки h_τ должны быть кратными: $h_\tau = \mu h$, где $\mu \geq 1$. Смоделированные значения с $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_\tau$ в ЧИК не учитываются.

2. Сетка S_P и ЧФП W_P :

$$S_P = \left\{ (U_i, V_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, U_0 = A, U_{N_U} = B, U_i = U_0 + ih_U, i = 1, \dots, (N_U - 1) \\ h_V = \frac{V_{N_V} - V_0}{N_V}, V_0 = C, V_{N_V} = D, V_j = V_0 + jh_V, j = 1, \dots, (N_V - 1) \end{array} \right. \right\}.$$

Здесь $A < B$, $C < D$ произвольны, h_U и h_V — шаги сетки ЧФП по пространству.

$$W_P = \{W_{ij} \mid W_{ij} \text{ — количество пар } (y_l(t_n), t_n), \text{ попавших в } (i, j) \text{ площадки сетки } S_P\}.$$

Здесь $y_l(t_n)$, $y_m(t_n)$ — значения l -й и m -й компоненты решения СДУ в узле интегрирования t_n . Номер узла сетки находится по формулам: $i = \left[\frac{y_l(t_n) - A}{h_U} \right]$, $j = \left[\frac{y_m(t_n) - C}{h_V} \right]$, где $n = 0, \dots, N$. Для ЧИК и ЧФП размер и место двумерной сетки выбирается так, чтобы продемонстрировать графически нужный участок поведения решения СДУ. Смоделированные значения с $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_V$ в ЧФП не учитываются.

3. Статистическое моделирование решений линейного и двух нелинейных осцилляторов

Все нижеприведённые расчёты осуществлены с помощью обобщённого метода Эйлера с использованием до 160 ядер кластера НКС-30Т при ИВМиМГ СО РАН.

На рис. 1 (вид сбоку), рис. 2 (вид сверху) приведён график ЧИК для численного решения $y_1(t)$ линейного осциллятора (1.3) с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий $M = 10^6$ при $\omega = 2\pi$ и $\sigma = 1$ на интервале времени $[70, 75]$. На таком интервале времени наблюдается 5 периодов колебаний.

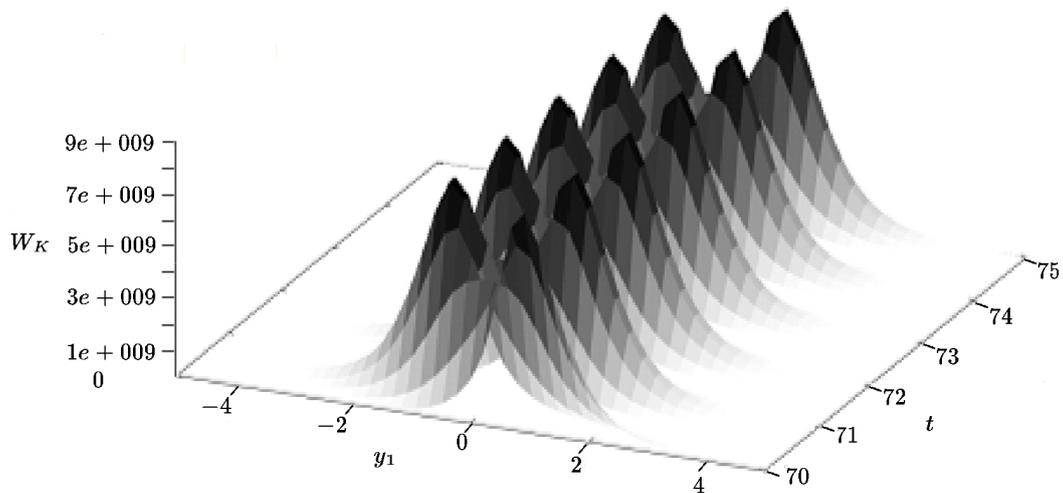


Рис. 1

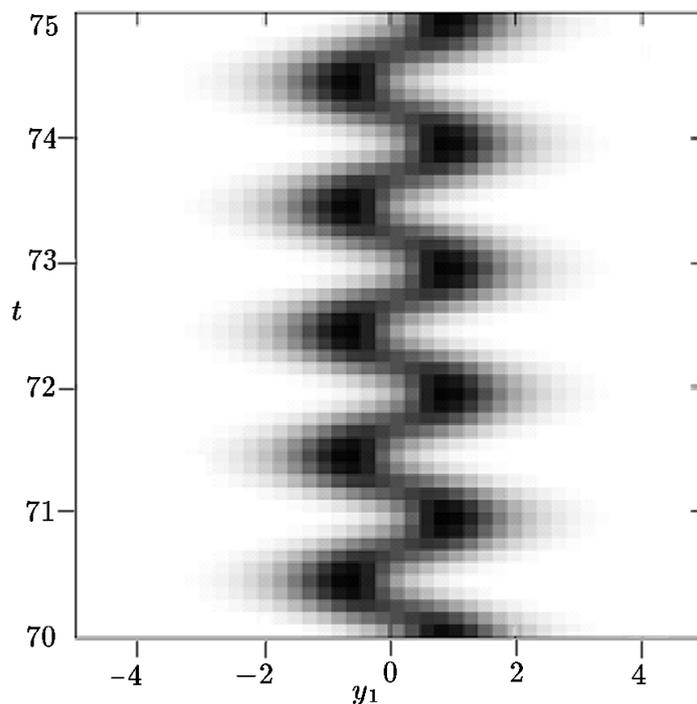


Рис. 2

Из рис. 1 видно, что в любой фиксированный момент времени ЧИК аппроксимирует асимметричную плотность распределения. При продвижении по интервалу интегрирования вершина асимметричного распределения в точке моды смещается вправо и влево относительно нуля, что соответствует гармоническому поведению математического ожидания решения линейного СДУ на этом интервале. Наиболее тёмный цвет на рисунке соответствует наибольшим частотам.

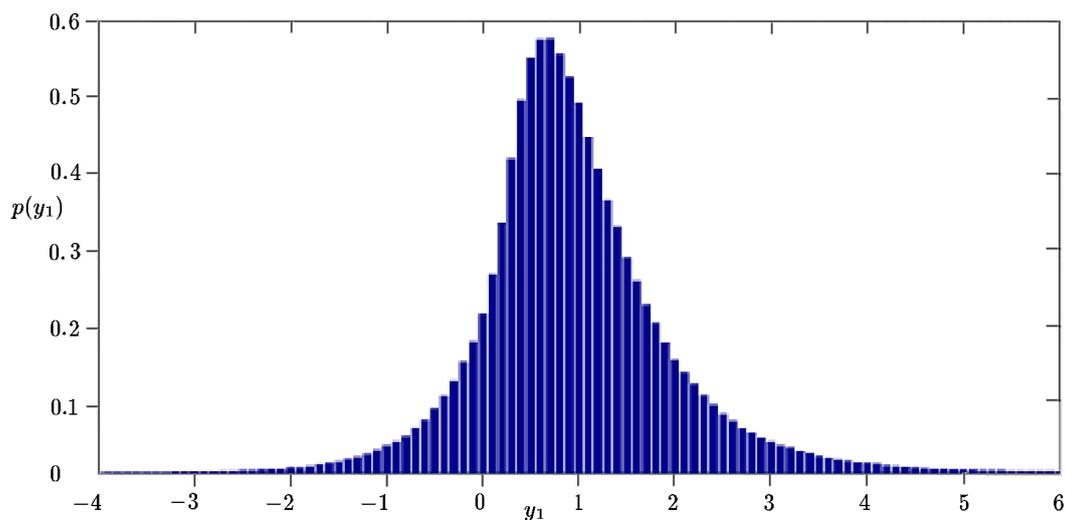


Рис. 3

На рис. 3 приведена гистограмма оценки плотности вероятностей для решения $y_1(t)$ линейного осциллятора (1.3) в конечной точке интервала интегрирования $T = 100$.

Смоделированные значения $y_1(T)$ попадают в интервал $[-3, 5]$ с вероятностью $p = 0.9967$, вершина гистограммы несколько смещена вправо относительно нуля (“толстый правый хвост”).

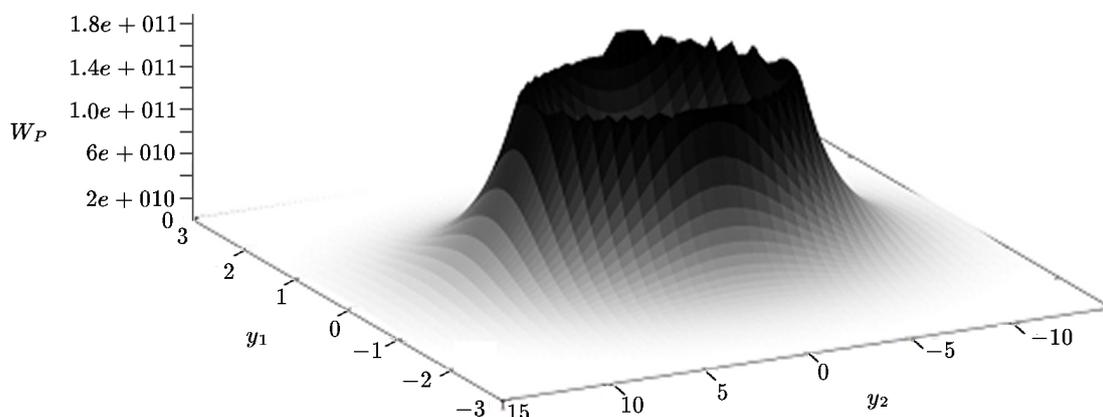


Рис. 4

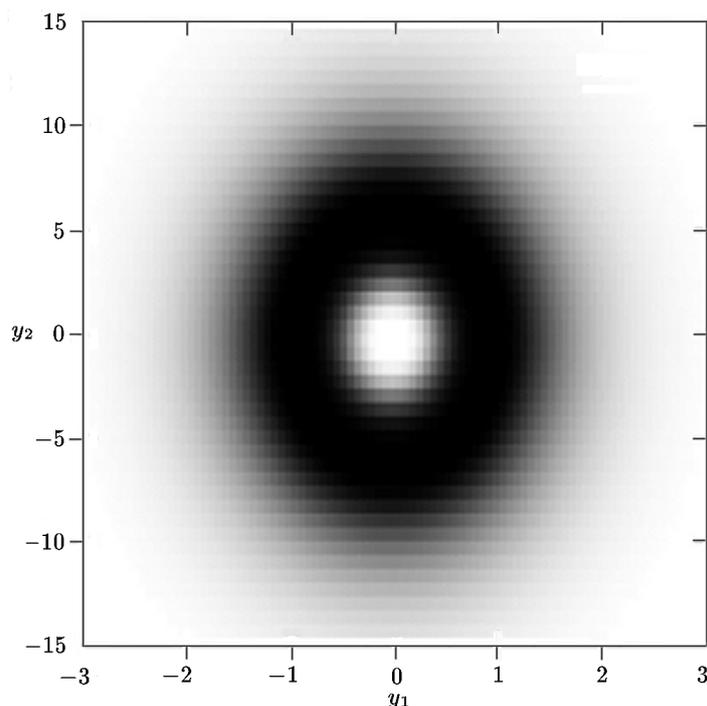


Рис. 5

На рис. 4 (вид сбоку), рис. 5 (вид сверху) приведён график ЧФП $(y_1(t), y_2(t))$ для линейного осциллятора (1.3), напоминающий жерло вулкана.

Для сравнения на рис. 6 приведён фазовый портрет одной смоделированной траектории линейного осциллятора (1.3).

На рис. 7 (вид сбоку), рис. 8 (вид сверху) приведён график ЧИК для численного решения $y_1(t)$ нелинейного уравнения Ван-дер-Поля (1.4) с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий $M = 10^6$ при $a = 20$, $b = 0.3$, $\omega = 1$ и $\sigma = 1$ на интервале времени $[0, 15]$. При таких параметрах уравнение Ван-дер-Поля мож-

но назвать жёстким, когда траектории решения имеют установившиеся участки вблизи значений ± 3 и быстрые переходные участки от $+3$ к -3 и обратно (см., напр., рис. 11 или статью [12]). Именно из-за наличия таких “полочек” в жёстких нелинейных СДУ одномерная плотность распределения решения в СДУ (1.3) становится бимодальной в СДУ (1.4).

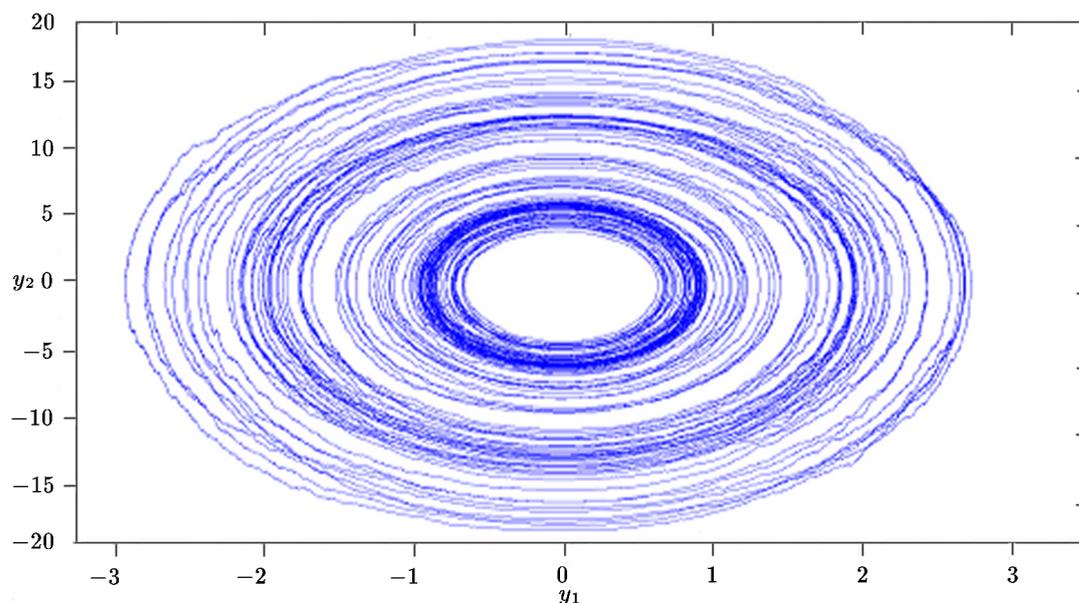


Рис. 6

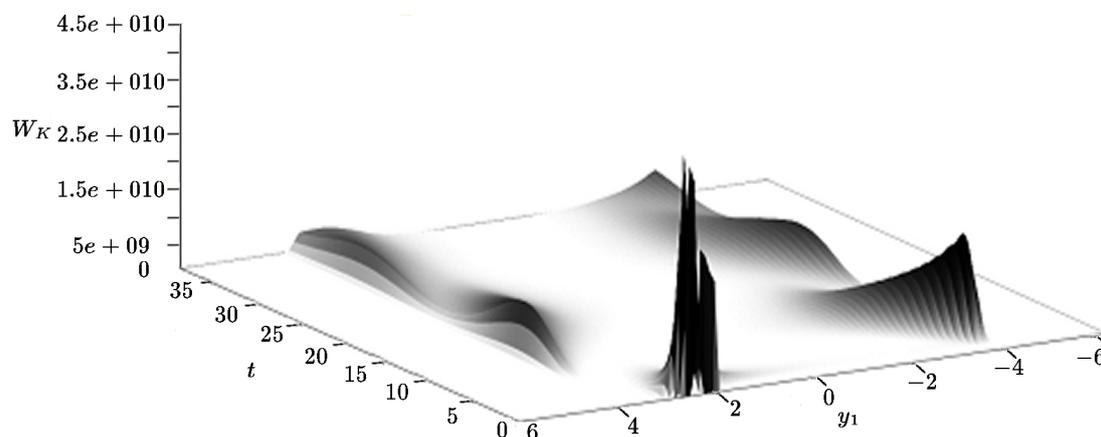


Рис. 7

Как видим, вдоль интервала интегрирования наблюдается следующая динамика поведения решения: начальное значение детерминированное, затем с левой стороны относительно нуля наблюдается пик частот, а с правой стороны — спад, по мере продвижения по интервалу интегрирования уже с левой стороны наблюдается спад, а с правой — пик, в некоторых точках график ЧИК почти симметричный относительно нуля. Поведение математического ожидания и дисперсии решений линейного и нелинейного колебательных контуров подробно исследовалось в работе [12].

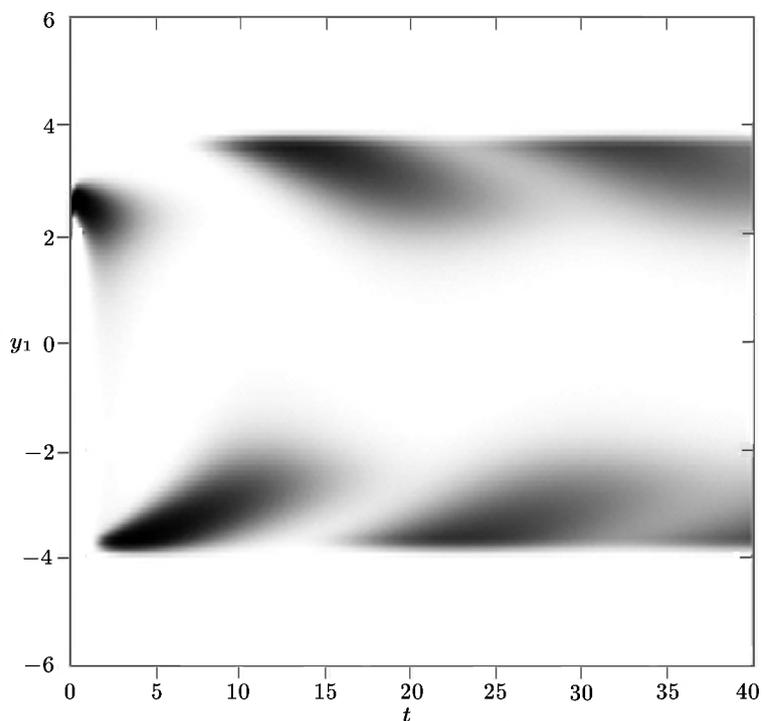


Рис. 8

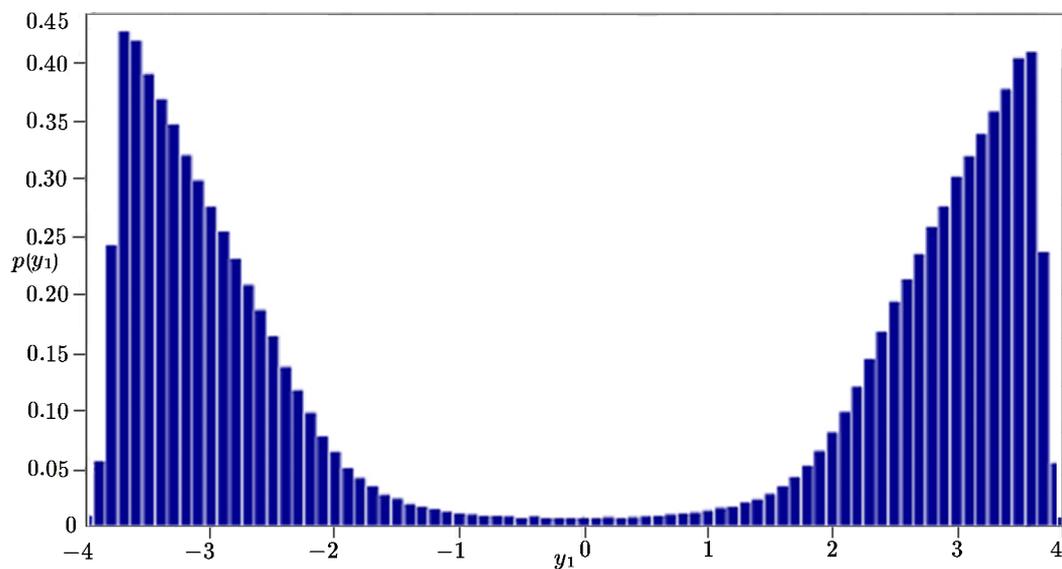


Рис. 9

На рис. 9 приведена гистограмма оценки плотности вероятностей нелинейного уравнения Ван-дер-Поля (1.4) для решения $y_1(t)$ в конечной точке интервала интегрирования $T = 100$. Смоделированные значения $y_1(T)$ попадают в интервал $[-4, 4]$ с вероятностью $p = 0.9998$.

Как видно из сравнения рис. 3 и рис. 9, гистограммы оценки плотности вероятностей решений (1.3) и (1.4) в конечной точке интервала интегрирования $T = 100$ кардинально различаются тем, что в линейном контуре наблюдается одна, а в нелинейном контуре две вершины.

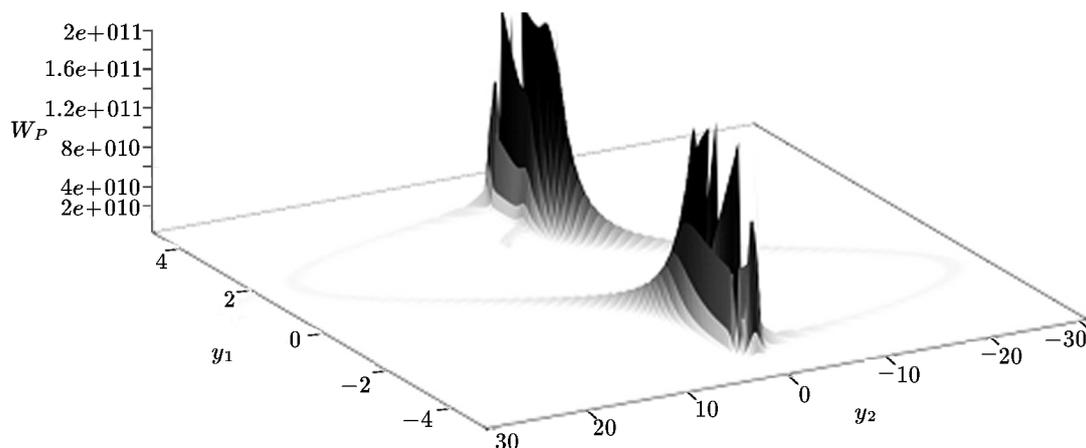


Рис. 10

На рис. 10 приведён график ЧФП $(y_1(t), y_2(t))$ для нелинейного уравнения Ван-дер-Поля (1.4).

Для сравнения на рис. 11 приведён фазовый портрет одной смоделированной траектории для нелинейного уравнения Ван-дер-Поля (1.4).

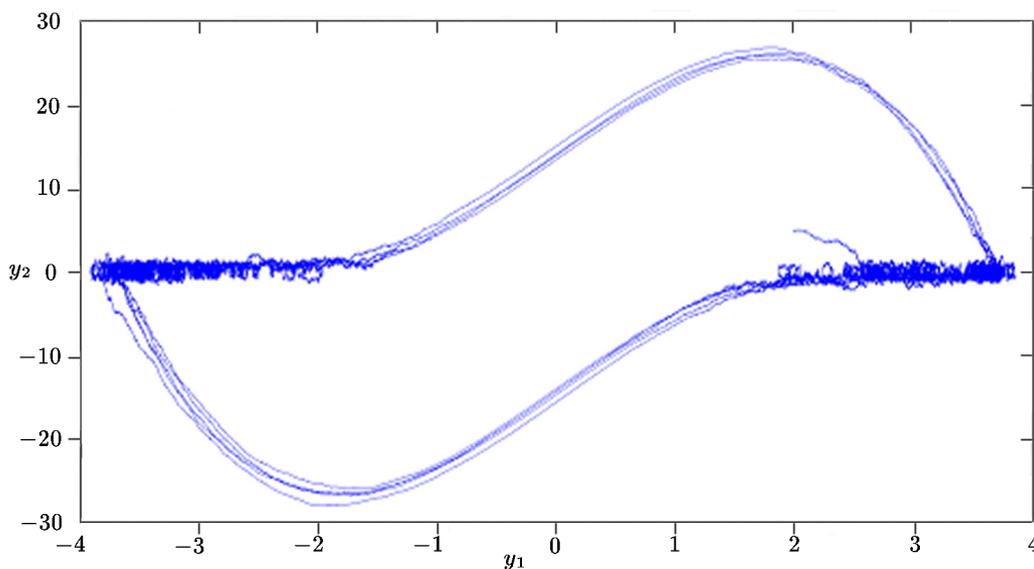


Рис. 11

На рис. 12 приведён график ЧИК для численного решения $y_1(t)$ нелинейного уравнения “биения” (1.5) с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий $M = 10^6$ при $\lambda = 10^{-2}$, $\omega = 2$, $a = 1$, $A = 10$, $\nu = 2$, $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 1$ на интервале времени $[0, 10]$. Как видим, вдоль интервала интегрирования наблюдается следующая динамика поведения решения: начальное значение детерминированное, здесь наблюдается пик частот, затем по мере продвижения по интервалу интегрирования амплитуда колебаний графика ЧИК соответствуют поведению решения сопутствующего ОДУ (СДУ без шумов) на этом интервале. Напомним, что поведение отдельных траекторий решений нелинейных осциллирующих систем СДУ и математического ожидания решений может быть совершенно различным [12].

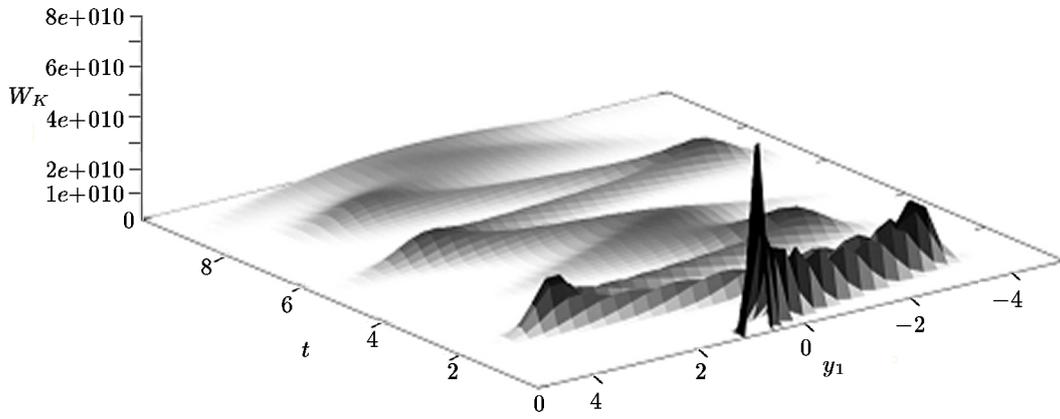


Рис. 12

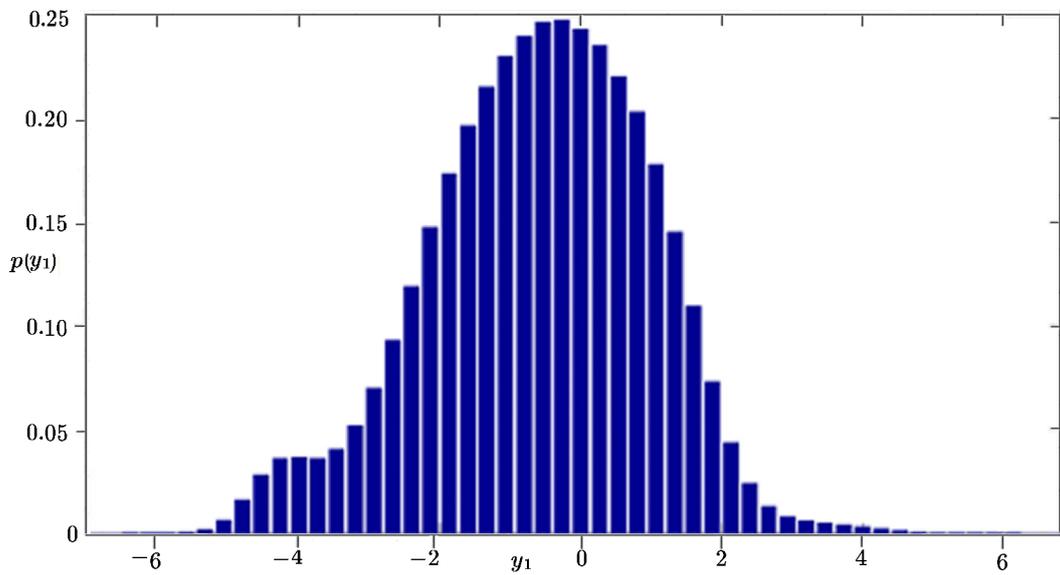


Рис. 13

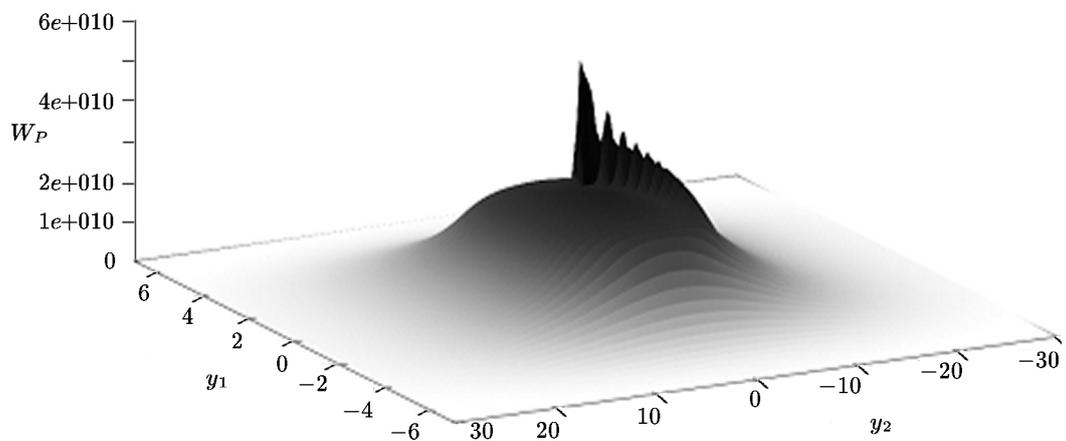


Рис. 14

На рис. 13 приведена гистограмма оценки плотности вероятностей уравнения “биения” (1.5) для решения $y_1(t)$ в точке $T = 10$ интервала интегрирования. Смоделированные значения $y_1(T)$ попадают в интервал $[-5, 4]$ с вероятностью $p = 0.9986$ и гистограмма несимметрична.

На рис. 14 приведён график ЧФП ($y_1(t), y_2(t)$) для уравнения “биения” (1.5), из которого видим более равномерный спектр амплитуд, чем в случае линейного осциллятора (1.3) (рис. 4).

Для сравнения на рис. 15 приведён фазовый портрет одной смоделированной траектории для уравнения “биения” (1.5).

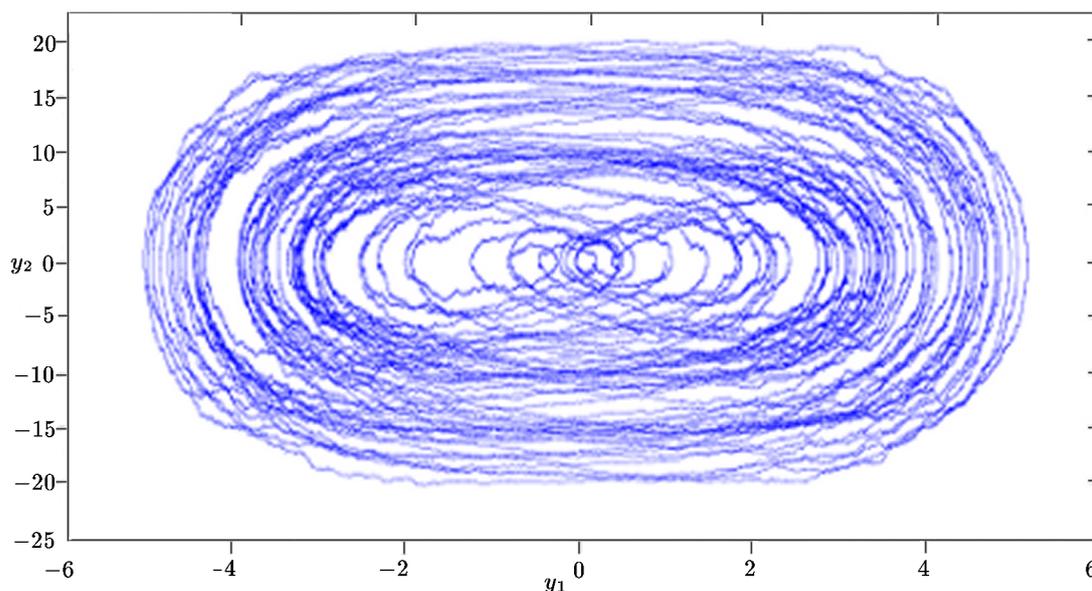


Рис. 15

Как видно из приведённых выше рисунков, все графики ЧФП сильно отличаются друг от друга. ЧФП для нелинейных СДУ имеют ярко выраженные пики, в область этих пиков попадает больше всего пар точек $(y_1(t), y_2(t))$, тогда как для линейного контура больше всего пар точек $(y_1(t), y_2(t))$ лежит в окрестности эллипса.

Отметим, что общее время счёта всех ЧИК и ЧФП, когда число шагов интегрирования метода Эйлера доходило до 10^8 , а число моделируемых траекторий до 10^6 на 160 ядрах кластера НКС-30Т не превышало суток. Предварительная оценка эффективности распараллеливания превышает 80%.

4. Заключение

В данной работе было исследовано поведение численных решений линейного и нелинейных стохастических осцилляторов. Проведён сравнительный анализ между вновь введёнными частотными характеристиками ЧИК и ЧФП решений трёх систем СДУ. Было показано качественное различие в поведении ЧИК и ЧФП для линейного и нелинейных СДУ. Отметим также, что в случае нелинейных СДУ изучение ЧИК даёт наиболее полное и точное представление о динамике процесса решения, нежели оценки моментных функций или плотности распределений решения СДУ в фиксированной точке интервала интегрирования. Стоит также подчеркнуть универсальность данного подхода, так

как при построении ЧИК и ЧФП используются только статистические данные о смоделированных значениях решений. Соответственно, данный вывод говорит об актуальности использования ЧИК и ЧФП при изучении любого рода задач: как линейных, так и нелинейных, как с наличием точного решения, так и в случае, когда точное решение отсутствует. В дальнейших работах авторы планируют провести численный анализ стохастических уравнений в частных производных в гидродинамике и аэродинамике. Это потребует решений систем СДУ с десятками тысяч уравнений и использования суперкомпьютеров с сотнями тысяч ядер.

Литература

1. **Диментберг М.Ф.** Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980.
2. **Бабицкий В.И.** Теория виброударных систем. — М.: Наука, 1978.
3. **Быков В.В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Советское радио, 1971.
4. **Пальмов В.А.** Теория упруго-пластических тел. — М.: Наука, 1976.
5. **Рытов С.М.** Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966.
6. **Неймарк Ю.И., Ланда П.С.** Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
7. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
8. **Валландер С.В.** Лекции по гидроаэродинамике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
9. **Артемьев С.С., Якунин М.А.** Математическое и статистическое моделирование в финансах. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
10. **Марченко М.А., Михайлов Г.А.** Распределённые вычисления по методу Монте-Карло // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 5. — С. 157–170.
11. **Артемьев С.С.** Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1993.
12. **Артемьев С.С., Иванов А.А., Корнеев В.Д.** Численный анализ стохастических осцилляторов на суперкомпьютерах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 31–43.

*Поступила в редакцию 25 июня 2013 г.,
в окончательном варианте 31 марта 2014 г.*