

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
2. Кокошвили С. М. Методы динамических испытаний жестких полимерных материалов.— Рига: Зинатне, 1978.
3. Фоллэнсби, Франц. Распространение волн в составном стержне Гопкинсона // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов.— 1983.— № 1.
4. Брагов А. М., Ломунов А. К. Особенности построения диаграмм деформирования методом Кольского // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т.— 1984.— Вып. 28.
5. Корнев В. М. Распространение волн деформаций в слое с учетом поперечных движений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1987.— Вып. 82.
6. Кукуджанов В. Н. Асимптотические решения уточненных уравнений упругих и упругопластических волн в стержнях // Волны в неупругих средах.— Кишинев, 1970.
7. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 5/III 1991 г.

УДК 539.3

Н. И. Остросаблин

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе введены собственные числа и векторы для матрицы коэффициентов в уравнениях движения в смещениях линейной теории упругости. Собственные числа и векторы найдены для матриц коэффициентов в случае материалов кристаллографических сингоний и представлены через независимые параметры, обеспечивающие положительную определенность удельной энергии деформации. Указаны материалы, для которых уравнения для каждого смещения становятся не зависимыми друг от друга. В зависимости от количества различных собственных чисел и их кратностей уравнения движения разбиваются на 32 класса.

Уравнения теории упругости в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [1]

$$(1) \quad \left[\frac{1}{2} (A_{iklj} + A_{ilkj}) \partial_{kl} - \rho \delta_{ij} \partial_{..} \right] u_j + F_i = 0,$$

где u_j — вектор смещения; F_i — вектор объемных сил; A_{iklj} — тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; δ_{ij} — символ Кронекера; ∂_k — дифференцирование по координате x_k ; $\partial_{..}$ — дифференцирование по времени; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование от 1 до 3. Постоянные A_{iklj} обладают свойствами симметрии [1]:

$$(2) \quad A_{iklj} = A_{klij} = A_{ljik}.$$

Учитывая (2), получаем, что коэффициенты $A_{ijkl}^* = A_{i(klj)} = \frac{1}{2} (A_{iklj} + A_{ilkj})$, входящие в (1), имеют такие же свойства симметрии, как и модули упругости:

$$(3) \quad A_{ijkl}^* = A_{jikl}^* = A_{klij}^*.$$

Аналогично собственным модулям упругости и состояниям [2—8] для тензора A_{iklj} можно ввести собственные числа и тензоры для коэффициентов (3):

$$(4) \quad A_{ijkl}^* = f_{ijpq} \mu_{pqrs} f_{klrs} \quad ((pq) = (rs)),$$

$$f_{ijpq} f_{ijrs} = \delta_{pqrs} = \frac{1}{2} (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}).$$

В двухиндексной матричной записи [6—8] формулы (4) представим так:

$$(5) \quad A_{ik}^* = f_{ip} \mu_{pr} f_{kr} \quad (p = r), \quad f_{ip} f_{ir} = \delta_{pr}.$$

Здесь суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 6. Очевидно, что $\mu_{11} = \mu_1, \mu_{22} = \mu_2, \dots, \mu_6, f_{ip}$ — собственные числа и векторы симметрической матрицы A_{ik}^* .

9*

Матрицы A_{ik}^* и A_{ij} взаимно однозначно выражаются друг через друга по формулам

$$(6) A_{ik}^* = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \frac{1}{2} A_{66} & A_{22} \\ \frac{1}{2} A_{55} & \frac{1}{2} A_{44} & A_{33} & \text{sym} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} A_{65} & A_{42} & A_{43} & \frac{1}{2} A_{44} + A_{32} \\ A_{51} & \frac{1}{\sqrt{2}} A_{64} & A_{53} & \frac{1}{2} A_{54} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{63} & \frac{1}{2} A_{55} + A_{31} \\ A_{61} & A_{62} & \frac{1}{\sqrt{2}} A_{54} & \frac{1}{2} A_{64} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{52} & \frac{1}{2} A_{65} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{41} & \frac{1}{2} A_{66} + A_{21} \end{bmatrix};$$

$$(7) A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11}^* \\ A_{66}^* - A_{21}^* & A_{22}^* & \text{sym} \\ A_{55}^* - A_{31}^* & A_{44}^* - A_{32}^* & A_{33}^* \\ \sqrt{2} A_{65}^* - A_{41}^* & A_{42}^* & A_{43}^* & 2A_{32}^* \\ A_{51}^* & \sqrt{2} A_{64}^* - A_{52}^* & A_{53}^* & \sqrt{2} A_{63}^* & 2A_{31}^* \\ A_{61}^* & A_{62}^* & \sqrt{2} A_{54}^* - A_{63}^* & \sqrt{2} A_{52}^* & \sqrt{2} A_{41}^* & 2A_{21}^* \end{bmatrix}.$$

Таким образом, упругие материалы можно задавать, зная A_{ik}^* , по формуле (7), но при этом необходимо обеспечивать выполнение условий положительной определенности [9] для A_{ij} . В [9] дано представление A_{ij} через независимые параметры d_i, c_{ip} в виде

$$(8) \quad A_{ij} = d_1 c_{i1} c_{j1} + d_2 c_{i2} c_{j2} + d_3 c_{i3} c_{j3} + d_4 c_{i4} c_{j4} + \\ + d_5 c_{i5} c_{j5} + d_6 c_{i6} c_{j6}, \quad c_{ip} = 0 \quad (p > i), \quad c_{11} = \dots = c_{66} = 1.$$

Для положительной определенности матрицы A_{ij} (8) необходимо и достаточно выполнение условий $d_i > 0, i = 1, \dots, 6$ [9]. Параметры c_{ip} ($i > p$) могут принимать любые действительные значения. Матрица же A_{ik}^* в общем случае не является положительно определенной. Для материалов, удовлетворяющих соотношениям Коши [10] $A_{i[kl]j} = \frac{1}{2} (A_{ikhj} - A_{ilkj}) = 0$, матрицы (6) и (7) совпадают.

В [7] приведены собственные модули упругости $\lambda_i > 0$ и состояния t_{ip} для материалов кристаллографических сингоний. Используя формулы из [7] и учитывая представление (8), найдем собственные числа μ_i и векторы f_{ip} матрицы (6) в случае материалов кристаллографических сингоний.

Изотропный материал

$$\mu_1 = 2A_{11} - A_{21} = d_1(2 - c_{21}), \quad -\frac{1}{2} < c_{21} < 1, \quad \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_6 = \\ = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{21}) = \frac{1}{2} d_1 (1 + c_{21});$$

$$(9) \quad f_{ip} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

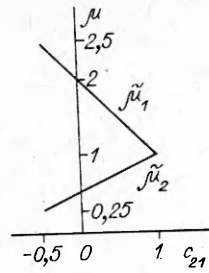


Рис. 1

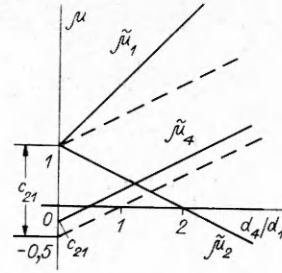


Рис. 2

Графики $\tilde{\mu}_i = \mu_i/d_1$ приведены на рис. 1. Видно, что $1 < \tilde{\mu}_1 < 2,5$ и $0,25 < \tilde{\mu}_2 < 1$.

Кубическая сингония

$$\mu_1 = A_{11} + A_{44} = d_1 \left(1 + \bar{d}_4/\bar{d}_1\right), \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{11} - \frac{1}{2} A_{44} = d_1 \left(1 - \frac{1}{2} d_4/d_1\right),$$

$$\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \frac{1}{2} A_{44} + A_{21} = d_1 \left(\frac{1}{2} d_4/d_1 + c_{21}\right), \quad -\frac{1}{2} < c_{21} < 1.$$

Собственные векторы f_{ip} даются матрицей (9). Графики $\tilde{\mu}_i$ приведены на рис. 2. Видно, что μ_2, μ_4 могут принимать отрицательные и нулевые значения. График $\tilde{\mu}_4$ проходит параллельно штриховым линиям в любом месте полосы в зависимости от значений параметра c_{21} . Если $\mu_4 = 0$, то уравнения (1) для каждого смещения u_i становятся не зависимыми друг от друга:

$$\left[A_{11} \partial_{11} + \frac{1}{2} A_{44} (\partial_{22} + \partial_{33}) - \rho \partial_{..} \right] u_1 + F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{1}{2} A_{44} \partial_{11} + A_{11} \partial_{22} + \frac{1}{2} A_{44} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right] u_2 + F_2 = 0,$$

$$\left[\frac{1}{2} A_{44} (\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{11} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right] u_3 + F_3 = 0.$$

Матрица A_{ij} закона Гука в этом случае имеет вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ -\frac{1}{2} d_4 & d_1 & & \text{sym} & & \\ -\frac{1}{2} d_4 & -\frac{1}{2} d_4 & d_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 \end{bmatrix}, \quad 0 < d_4 < d_1.$$

Это материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона: $-1 < \nu = -A_{21}^{-1}/A_{11}^{-1} = -d_4/(2d_1 - d_4) < 0$. Здесь A_{ij}^{-1} — элементы обратной матрицы. Примером материала кубической сингонии с отрицательным коэффициентом Пуассона является пирит [10, с. 175].

Гексагональная сингония (трансверсальная изотропия)

$$(10) \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (3A_{11} - A_{21}) + A_{33} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} (3A_{11} - A_{21}) - A_{33}\right)^2 + 2A_{44}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \left[\frac{1}{2} (3 - c_{21}) + \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} + \frac{d_3}{d_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} (3 - c_{21}) - \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} - \frac{d_3}{d_1}\right)^2 + 2\left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2} \right];$$

$$\mu_3 = \mu_6 = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{21}) = \frac{1}{2} d_1 (1 + c_{21}), \quad -1 < c_{21} < 1,$$

$$\mu_4 = \mu_5 = \frac{1}{2} A_{44} + A_{31} - d_1 \left(\frac{1}{2} d_4/d_1 + c_{31} \right);$$

$$(11) \quad f_{ip} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(12) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{2} A_{44}}{\frac{1}{2} (3A_{11} - A_{21}) - A_{33}} = \frac{\sqrt{2} d_4/d_1}{\frac{1}{2} (3 - c_{21}) - \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} - \frac{d_3}{d_1}}.$$

Из (10) следует, что $\mu_1 > 0$, а

$$(13) \quad \begin{aligned} \mu_2 \geq 0, \quad \text{если } (3 - c_{21}) \left(\frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} + \frac{d_3}{d_1} \right) &\geq \left(\frac{d_4}{d_1} \right)^2, \\ \mu_2 < 0, \quad \text{если } (3 - c_{21}) \left(\frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} + \frac{d_3}{d_1} \right) &< \left(\frac{d_4}{d_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Графики $\tilde{\mu}_3$, $\tilde{\mu}_4$ приведены на рис. 3, 4. Видно, что $0 < \tilde{\mu}_3 < 1$. График $\tilde{\mu}_4$ проходит параллельно и выше штриховой линии на произвольном расстоянии в зависимости от значений параметра $(1/2)d_4/d_1$. Если $\mu_4 = 0$, то из (1) получается отдельное уравнение для смещения u_3 :

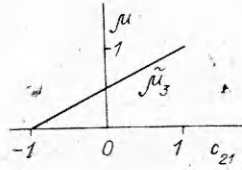
$$\begin{aligned} \left[A_{11} \partial_{11} + \frac{1}{2} (A_{11} - A_{21}) \partial_{22} + \frac{1}{2} A_{44} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right] u_1 + \frac{1}{2} (A_{11} + A_{21}) \partial_{12} u_2 + F_1 &= 0, \\ \frac{1}{2} (A_{11} + A_{21}) \partial_{21} u_1 + \left[\frac{1}{2} (A_{11} - A_{21}) \partial_{11} + A_{11} \partial_{22} + \frac{1}{2} A_{44} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right] u_2 + F_2 &= 0, \\ \left[\frac{1}{2} A_{44} (\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right] u_3 + F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Матрица A_{ij} в этом случае имеет вид

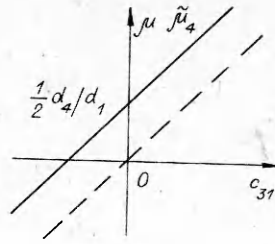
$$A_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ d_1 c_{21} & d_1 & & & & & \text{sym} \\ -\frac{1}{2} d_4 & -\frac{1}{2} d_4 & \frac{d_4^2}{2d_1(1+c_{21})} + d_3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1(1-c_{21}) & \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты Пуассона для такого материала следующие:

$$\begin{aligned} -1 < \nu_{21} = \nu_{12} &= -\frac{A_{21}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = \frac{4d_1 d_3 c_{21} (1 + c_{21}) - d_4^2 (1 - c_{21})}{4d_1 d_3 (1 + c_{21}) + d_4^2 (1 - c_{21})} < 1, \\ \nu_{31} = \nu_{32} &= -\frac{A_{31}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = \frac{-2d_1 d_4 (1 - c_{21})}{4d_1 d_3 (1 + c_{21}) + d_4^2 (1 - c_{21})} < 0, \\ \nu_{13} = \nu_{23} &= -\frac{A_{31}^{-1}}{A_{33}^{-1}} = \frac{-d_4}{2d_1 (1 + c_{21})} < 0. \end{aligned}$$



Р и с. 3



Р и с. 4

Тригональная сингония

$$\begin{aligned} \mu_{3,4} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (A_{11} + A_{21} + A_{44}) + A_{31} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} (A_{11} + A_{21} - A_{44}) - A_{31} \right)^2 + 8A_{41}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} d_1 \left[\frac{1}{2} \left(1 + c_{21} + \frac{2c_{41}^2}{1 - c_{21}} + \frac{d_4}{d_1} \right) + c_{31} \pm \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(1 + c_{21} - \frac{2c_{41}^2}{1 - c_{21}} - \frac{d_4}{d_1} \right) - c_{31} \right)^2 + 8c_{41}^2} \right], \end{aligned}$$

$$f_{ip} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta & \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \beta & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \cos \beta & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sqrt{2}A_{41}}{\frac{1}{2}(A_{11} + A_{21} - A_{44}) - A_{31}} = \frac{2\sqrt{2}c_{41}}{\frac{1}{2}\left(1 + c_{21} - \frac{2c_{41}^2}{1 - c_{21}} - \frac{d_4}{d_1}\right) - c_{31}}.$$

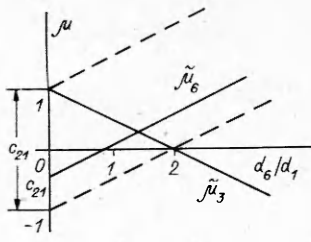
Собственные числа μ_1, μ_2 и угол α даются формулами (10), (12). Имеют место неравенства (13), $\mu_1 > 0, \mu_3 > 0$, а $\mu_4 \geq 0$, если $\frac{d_4}{2d_1} + c_{31} \geq c_{41}^2 \left(\frac{1}{1 + c_{21}} - \frac{1}{1 - c_{21}} \right)$, $\mu_4 < 0$, если $\frac{d_4}{2d_1} + c_{31} < c_{41}^2 \left(\frac{1}{1 + c_{21}} - \frac{1}{1 - c_{21}} \right)$.

Тетрагональная сингония

$$\begin{aligned} (14) \quad \mu_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[A_{11} + \frac{1}{2} A_{66} + A_{33} \pm \sqrt{\left(A_{11} + \frac{1}{2} A_{66} - A_{33} \right)^2 + 2A_{44}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} d_1 \left[1 + \frac{d_6}{2d_1} + \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} + \frac{d_3}{d_1} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{d_6}{2d_1} - \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} - \frac{d_3}{d_1} \right)^2 + 2\left(\frac{d_4}{d_1} \right)^2} \right]; \\ \mu_3 &= A_{11} - \frac{1}{2} A_{66} = d_1 \left(1 - \frac{1}{2} d_6/d_1 \right), \\ \mu_4 = \mu_5 &= \frac{1}{2} A_{44} + A_{31} = d_1 \left(\frac{1}{2} d_4/d_1 + c_{31} \right), \\ \mu_6 &= \frac{1}{2} A_{66} + A_{21} = d_1 \left(\frac{1}{2} d_6/d_1 + c_{21} \right), \quad -1 < c_{21} < 1. \end{aligned}$$

Собственные векторы f_{ip} даются матрицей (11), при этом

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{2}A_{44}}{A_{11} + \frac{1}{2}A_{66} - A_{33}} = \frac{\sqrt{2}d_4/d_1}{1 + \frac{d_6}{2d_1} - \frac{2c_{31}^2}{1 + c_{21}} - \frac{d_3}{d_1}}.$$



Р и с. 5

График $\tilde{\mu}_4$ приведен на рис. 4, а $\tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_6$ — на рис. 5. Видно, что $\tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_6$ могут принимать отрицательные и нулевые значения. График $\tilde{\mu}_6$ проходит параллельно штриховым линиям в любом месте полосы в зависимости от значений параметра c_{21} . Из (14) следует, что $\mu_1 > 0$, а $\mu_2 \geq 0$, если $\left(1 + \frac{d_6}{2d_1}\right) \left(\frac{2c_{31}^2}{1+c_{21}} + \frac{d_3}{d_1}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2$, $\mu_2 < 0$, если $\left(1 + \frac{d_6}{2d_1}\right) \left(\frac{2c_{31}^2}{1+c_{21}} + \frac{d_3}{d_1}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2$.

Если $\mu_4 = 0, \mu_6 = 0$, то уравнения (1) для каждого смещения u_i становятся не зависимыми друг от друга:

$$\begin{aligned} \left(A_{11}\partial_{11} + \frac{1}{2}A_{66}\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right)u_1 + F_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}A_{66}\partial_{11} + A_{11}\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right)u_2 + F_2 &= 0, \\ \left[\frac{1}{2}A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} - \rho\partial_{..}\right]u_3 + F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Матрица A_{ij} закона Гука в этом случае имеет вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ -\frac{1}{2}d_6 & d_1 & & & & & \text{sym} \\ -\frac{1}{2}d_4 & -\frac{1}{2}d_4 & \frac{d_4^2}{2d_1-d_6} + d_3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}, \quad 0 < d_6 < 2d_1.$$

Коэффициенты Пуассона для такого материала следующие:

$$\begin{aligned} -1 < \nu_{21} = \nu_{12} &= -\frac{A_{21}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = -\frac{2d_3d_6(2d_1-d_6) + d_4^2(2d_1+d_6)}{4d_1d_3(2d_1-d_6) + d_4^2(2d_1+d_6)} < 0, \\ \nu_{31} = \nu_{32} &= -\frac{A_{31}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = -\frac{d_4(4d_1^2-d_6^2)}{4d_1d_3(2d_1-d_6) + d_4^2(2d_1+d_6)} < 0, \\ \nu_{13} = \nu_{23} &= -\frac{A_{31}^{-1}}{A_{33}^{-1}} = \frac{-d_4}{2d_1-d_6} < 0. \end{aligned}$$

Ромбическая сингония (ортотропия)

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{1}{2}A_{44} + A_{32} = d_1 \left(\frac{1}{2}d_4/d_1 + c_{31}c_{21} + c_{32}d_2/d_1 \right), \\ \mu_5 &= \frac{1}{2}A_{55} + A_{31} = d_1 \left(\frac{1}{2}d_5/d_1 + c_{31} \right), \quad \mu_6 = \frac{1}{2}A_{66} + A_{21} = d_1 \left(\frac{1}{2}d_6/d_1 + c_{21} \right), \end{aligned}$$

$$f_{ip} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_{ip}f_{iq} = \delta_{pq}.$$

Собственные числа μ_1, μ_2, μ_3 являются корнями уравнения третьей степени

$$\begin{vmatrix} d_1 - \mu & & \\ \frac{1}{2} d_6 & d_1 c_{21}^2 + d_2 - \mu & \text{sym} \\ \frac{1}{2} d_5 & \frac{1}{2} d_4 & d_1 c_{31}^2 + d_2 c_{32}^2 + d_3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

и зависят от параметров $d_i > 0, c_{ip}$, причем $\mu_1 > 0, |\mu_2| < \mu_1, |\mu_3| < \mu_1$ [11]. Графики $\tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_5, \tilde{\mu}_6$ имеют вид, аналогичный показанному на рис. 4. Если $\mu_4 = 0, \mu_5 = 0, \mu_6 = 0$, то уравнения (1) для каждого смещения u_i становятся не зависимыми друг от друга:

$$\begin{aligned} \left(A_{11} \partial_{11} + \frac{1}{2} A_{66} \partial_{22} + \frac{1}{2} A_{55} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right) u_1 + F_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} A_{66} \partial_{11} + A_{22} \partial_{22} + \frac{1}{2} A_{44} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right) u_2 + F_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} A_{55} \partial_{11} + \frac{1}{2} A_{44} \partial_{22} + A_{33} \partial_{33} - \rho \partial_{..} \right) u_3 + F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Матрицу A_{ij} закона Гука в этом случае запишем как

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ -\frac{1}{2} d_6 & \frac{d_6^2}{4d_1} + d_2 & & & & & \\ & & \text{sym} & & & & \\ -\frac{1}{2} d_5 & -\frac{1}{2} d_4 & \frac{d_5^2}{4d_1} + \frac{d_4^2}{4d_2} \left(1 + \frac{d_5 d_6}{2d_1 d_4} \right) + d_3 & & & & \\ & & & d_4 & & & \\ & & & & 0 & d_5 & \\ & & & & & & 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты Пуассона для такого материала следующие:

$$\begin{aligned} \nu_{23} &= -\frac{A_{23}^{-1}}{A_{33}^{-1}} = -\frac{d_4}{2d_2} \left(1 + \frac{d_5 d_6}{2d_1 d_4} \right) < 0, & \nu_{13} &= -\frac{A_{13}^{-1}}{A_{33}^{-1}} = -\frac{d_5 - d_6 \nu_{23}}{2d_1} < 0, \\ \nu_{32} &= -\frac{A_{32}^{-1}}{A_{22}^{-1}} = \frac{d_2 \nu_{23}}{d_3 + d_2 \nu_{23}^2} < 0, \\ \nu_{31} &= -\frac{A_{31}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = \frac{4d_1^2 d_2 \nu_{13}}{4d_1 d_2 d_3 + d_3 d_6^2 + 4d_1^2 d_2 \nu_{13}^2} < 0, \\ \nu_{12} &= -\frac{A_{12}^{-1}}{A_{22}^{-1}} = -\frac{d_3 d_6 + 2d_1 d_2 \nu_{23} \nu_{13}}{2d_1 (d_3 + d_2 \nu_{23}^2)} < 0, \\ \nu_{21} &= -\frac{A_{21}^{-1}}{A_{11}^{-1}} = \frac{4d_1^2 (d_3 + d_2 \nu_{23}^2) \nu_{12}}{4d_1 d_2 d_3 + d_3 d_6^2 + 4d_1^2 d_2 \nu_{13}^2} < 0. \end{aligned}$$

Хотя материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона известно относительно немного, приведенные выше примеры таких материалов, для которых еще и уравнения для каждого смещения u_i не зависят друг от друга, могут служить поводом для создания композитных материалов с подобными свойствами. Материалы с отрицательными коэффициентами Пуассона по классификации [12] и есть собственно твердые тела в отличие от материалов, более близких к жидким телам, с положительными коэффициентами Пуассона.

Моноклидная сингония (ось симметрии второго порядка x_1)

$$\mu_{5,6} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (A_{55} + A_{66}) + A_{31} + A_{21} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} (A_{55} - A_{66}) + A_{31} - A_{21} \right)^2 + 2A_{41}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \left[\frac{d_5 + d_6}{2d_1} + c_{31} + c_{21} \pm \sqrt{\left(\frac{d_5 - d_6}{2d_1} + c_{31} - c_{21} \right)^2 + 2c_{41}^2} \right],$$

$$f_{ip} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad f_{ip}f_{iq} = \delta_{pq},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{2} A_{41}}{\frac{1}{2} (A_{55} - A_{66}) + A_{31} - A_{21}} = \frac{\sqrt{2} c_{41}}{\frac{d_5 - d_6}{2d_1} + c_{31} - c_{21}}.$$

Собственные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ являются корнями уравнения четвертой степени

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \mu & & & & & \\ \frac{1}{2} A_{66} & A_{22} - \mu & & & \text{sym} & \\ \frac{1}{2} A_{55} & \frac{1}{2} A_{44} & A_{33} - \mu & & & \\ 0 & A_{42} & A_{43} & \frac{1}{2} A_{44} + A_{32} - \mu & & \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11} = d_1, A_{22} = d_1 c_{21}^2 + d_2, A_{33} = d_1 c_{31}^2 + d_2 c_{32}^2 + d_3,$$

$$A_{44} = d_1 c_{41}^2 + d_2 c_{42}^2 + d_3 c_{43}^2 + d_4, A_{32} = d_1 c_{31} c_{21} + d_2 c_{32},$$

$$A_{55} = d_5, A_{66} = d_6, A_{42} = d_1 c_{41} c_{21} + d_2 c_{42},$$

$$A_{43} = d_1 c_{41} c_{31} + d_2 c_{42} c_{32} + d_3 c_{43}$$

и зависят от произвольных параметров $d_i > 0, c_{ip}$. Имеют место неравенства

$$0 \leq \mu_6 \leq \mu_5, \text{ если } \frac{d_5 + d_6}{2d_1} + c_{31} + c_{21} \geq 0, \left(\frac{d_5}{2d_1} + c_{31} \right) \left(\frac{d_6}{2d_1} + c_{21} \right) \geq \frac{1}{2} c_{41}^2;$$

$$\mu_6 \leq 0 \leq \mu_5, \text{ если } \left(\frac{d_5}{2d_1} + c_{31} \right) \left(\frac{d_6}{2d_1} + c_{21} \right) \leq \frac{1}{2} c_{41}^2;$$

$$\mu_6 \leq \mu_5 \leq 0, \text{ если } \frac{d_5 + d_6}{2d_1} + c_{31} + c_{21} \leq 0, \left(\frac{d_5}{2d_1} + c_{31} \right) \left(\frac{d_6}{2d_1} + c_{21} \right) \geq \frac{1}{2} c_{41}^2.$$

При необходимости невыписанные собственные числа μ_i для материалов ромбической и моноклиной сингоний можно выразить через A_{ij} по формулам для корней многочленов третьей и четвертой степени [13]. Затем определяются собственные векторы f_{ip} .

Триклинная сингония. В данном случае матрица A_{ik}^* имеет общий вид (5), (6). Чтобы не решать характеристическое уравнение шестой степени для матрицы (6), можно в формуле (5) задавать μ_i, f_{ip} произвольно, но при этом необходимо обеспечивать выполнение условий положительной определенности [9] для A_{ij} .

Учитывая (4), (5), запишем уравнения (1) в форме

$$(15) \quad (\mu_1 f_{i111} \tilde{\partial}_{11} + \mu_2 f_{i122} \tilde{\partial}_{22} + \mu_3 f_{i133} \tilde{\partial}_{33} + \mu_4 2f_{i123} \tilde{\partial}_{23} + \mu_5 2f_{i131} \tilde{\partial}_{31} + \\ + \mu_6 2f_{i112} \tilde{\partial}_{12} - \rho \delta_{ij} \partial_{..}) u_j + F_i = 0,$$

где $\tilde{\partial}_{rs} = \tilde{\partial}_{sr} = f_{klrs} \partial_{kl}$ — дифференциальные операторы, инвариантные относительно ортогонального преобразования координат, так как они есть свертка двух симметричных тензоров второго ранга. Ввиду ортогональности собственных тензоров также имеем $\partial_{kl} = f_{klrs} \tilde{\partial}_{rs}$.

В уравнениях (15) параметры μ_1, \dots, μ_6 являются инвариантами как собственные числа симметрической матрицы A_{ik}^* . Нумеруя μ_i в порядке убывания ($\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_6$), можно классифицировать уравнения (15) (анизотропные материалы) в зависимости от количества различных собственных чисел μ_k и их кратностей. Подобная классификация анизотропных материалов в зависимости от числа различных собственных модулей λ_k матрицы A_{ij} и их кратностей дана в [6, 8].

Каждому уравнению (15) (материалу) поставим в соответствие символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}^*$, причем $k \leq 6$, $\alpha_k \geq 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 6$. Здесь k — число различных собственных параметров μ_i ; α_i — их кратности. Все уравнения (15) разбиваются на 32 класса [6, 8] и каждому из них однозначно соответствует символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}^*$:

- 1) $\{6\}^*$;
- 2) $\{1, 5\}^*$, $\{2, 4\}^*$, $\{3, 3\}^*$, $\{4, 2\}^*$, $\{5, 1\}^*$;
- 3) $\{1, 1, 4\}^*$, $\{1, 2, 3\}^*$, $\{1, 3, 2\}^*$, $\{1, 4, 1\}^*$, $\{2, 1, 3\}^*$, $\{2, 2, 2\}^*$, $\{2, 3, 1\}^*$, $\{3, 1, 2\}^*$, $\{3, 2, 1\}^*$, $\{4, 1, 1\}^*$;
- 4) $\{1, 1, 1, 3\}^*$, $\{1, 1, 2, 2\}^*$, $\{1, 1, 3, 1\}^*$, $\{1, 2, 1, 2\}^*$, $\{1, 2, 2, 1\}^*$, $\{1, 3, 1, 1\}^*$, $\{2, 1, 1, 2\}^*$, $\{2, 1, 2, 1\}^*$, $\{2, 2, 1, 1\}^*$, $\{3, 1, 1, 1\}^*$;
- 5) $\{1, 1, 1, 1, 2\}^*$, $\{1, 1, 1, 2, 1\}^*$, $\{1, 1, 2, 1, 1\}^*$, $\{1, 2, 1, 1, 1\}^*$, $\{2, 1, 1, 1, 1\}^*$;
- 6) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}^*$.

Причем порядок следования цифр в символе существен. При перестановке неодинаковых цифр в символе получаем уравнения другого класса. Более детальная классификация уравнений (15) должна производиться в зависимости от вида собственных тензоров f_{ijpq} . В [5, 6] собственные тензоры f_{ijpq} построены в общем виде через 15 произвольных параметров.

Не все 32 класса уравнений возможны для физически реальных материалов, допустимы только те, для которых обеспечивается положительная определенность [9] матрицы (7). В частности, класс $\{6\}^*$ невозможен. Изучение найденных классов уравнений и должно быть предметом математической теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
2. Минкевич Л. М. Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. — Новосибирск: НЭТИ, 1973.
3. Рылевский Я. О законе Гука // ПММ. — 1984. — Т. 48, вып. 3.
4. Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И. Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математическое моделирование. — Новосибирск: Наука, 1985.
5. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отделение, Ин-т гидродинамики. — 1984. — Вып. 66.
6. Остросаблин Н. И. О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отделение, Ин-т гидродинамики. — 1985. — Вып. 71.
7. Остросаблин Н. И. Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических симметрий // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отделение, Ин-т гидродинамики. — 1986. — Вып. 75.
8. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. — 1986. — № 4.
9. Остросаблин Н. И. О наименьших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. МТТ. — 1989. — № 2.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

12. Бехтерев П. В. Определяющие коэффициенты упругости и деформаций с приложением к изотропии // ЖЭТФ.— 1934.— Т. 4, вып. 9.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1968.

г. Новосибирск

Поступила 14/III 1991 г.

УДК 624.074.4 + 539.3

А. В. Асеев, Г. Е. Макаров, С. В. Степаненко

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТРУБЧАТЫХ ОБРАЗЦОВ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРЕДЕЛЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

В настоящее время происходит расширение сферы применения волокнистых композиционных материалов (ВКМ), причем наряду с традиционной областью применения (элементы конструкций и узлы, работающие в условиях статического и квазистатического нагружения) ВКМ все чаще используются для изготовления конструктивных элементов, подверженных действию высокоинтенсивной динамической нагрузки. Интенсивное импульсное нагружение создает в материале конструкции напряженно-деформированное состояние (НДС), характеризующееся высокой степенью изменчивости во времени. В связи с этим для классификации процесса следует ввести норму тензора скоростей деформации. В экспериментальной работе удобно применять аналог интегральной нормы — среднюю скорость деформирования на монотонном участке зависимости $\epsilon = \epsilon(t)$ — и в дальнейшем понимать эту величину как характерную для данного эксперимента скорость деформации.

В ряде работ (см., например, [1, 2]) указывается на зависимость упругих и прочностных свойств некоторых типов ВКМ от характерной скорости деформирования при $\dot{\epsilon} \sim 10^2 \text{ с}^{-1}$. Изучение такой зависимости и особенностей динамического поведения различных ВКМ на пределе несущей способности может способствовать снижению материалоемкости изделий, работающих в условиях высокоинтенсивного динамического нагружения. Однако получение числовых значений, характеризующих свойства ВКМ при высоких скоростях деформирования ($\dot{\epsilon} \sim 10^3 \text{ с}^{-1}$), затруднено рядом причин, в частности необходимостью измерения воздействия динамического давления на образец как функции времени. В связи с этим представляет интерес развитие экспериментальных методов изучения поведения ВКМ на пределе его несущей способности — типа методик исследований, изложенных в [3—8].

1. Эксперименты по внутреннему импульсному нагружению проводились на круговых цилиндрических оболочках, изготовленных кольцевой намоткой из материалов двух типов: стеклоэпоксид на основе стекловолокна ВМ и эпоксидного связующего ЭДТ-10 и органопластика на основе органоволокна СВМ и связующего ЭДТ-10.

Результаты статических испытаний кольцевых образцов с помощью жестких полудисков по методике [9] показали, что модуль упругости и предел прочности в окружном направлении стеклоэпоксида $E_{\text{ст}} = 65,0 \pm 5 \text{ ГПа}$ и $\sigma_{\text{ст}} = 1,54 \text{ ГПа}$, органопластика $E_{\text{ор}} = 116,0 \pm 5 \text{ ГПа}$ и $\sigma_{\text{ор}} = 2,01 \text{ ГПа}$. Плотность стеклоэпоксида $2,03 \text{ г/см}^3$, органопластика $1,32 \text{ г/см}^3$.

Схема постановки экспериментов приведена на рис. 1. Импульсное нагружение создавалось путем подрыва в геометрическом центре трубчатого образца 6 сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ) 8 из сплава тротила с гексогеном ТГ 50/50. Иницирование заряда ВВ осуществлялось в его центре с помощью малогабаритного электродетонатора 9.