8. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
9. **Христианович С. А.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981.
10. **Панов Д. Ю.** Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Гостехиздат, 1957.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1978.
12. **Немировский Ю. В.** Об оценках веса пластических оптимальных конструкций.— Инж. журн. МТТ, 1968, № 4.
13. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
14. **Save M. A.** Some aspects of minimum-weight design.— In: Engineering Plasticity. Cambridge: University Press, 1968. Рус. пер. **Сав М.** Некоторые аспекты теории проектирования конструкций минимального веса.— Сб. пер. Механика, 1971, № 1 (125).
15. **Разани Б.** Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального веса.— Ракетн. техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 12.
16. **Черепанов Г. П., Ершов Л. В.** Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977.
17. **Немировский Ю. В., Резников Б. С.** О равнонапряженных пластинках и оболочках.— В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.

*Поступила 22/III 1984 г.*

УДК 548.4:539.37

# О ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ТЕЛЕ С КОГЕРЕНТНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

*А. А. АЛЕКСЕЕВ*

*(Москва)*

Знание поля внутренних напряжений $\hat{\sigma}$ в теле, содержащем ансамбль когерентных частиц, необходимо для понимания многих физических процессов, например упрочнения [1], нарушения когерентности [2] и др. Часто поле $\hat{\sigma}$ вычисляют по формуле $\hat{\sigma}=\sum\limits_{i=1}^{N}\hat{S}_i$, где $N$ — количество частиц в теле, а $\hat{S}_i$ — напряжение в теле конечных размеров, создаваемое отдельной $i$-й частицей, т. е. при условии, что, кроме нее, в теле нет других частиц (способ 1) (см., например, [3]). Однако при этом оказывается нарушенным условие равновесия тела как целого. Это обстоятельство до настоящего времени не объяснено. Поэтому для вычисления $\hat{\sigma}$ используют следующий формальный прием. Поле $\hat{\sigma}$ записывают в виде $\hat{\sigma}=\sum\limits_{i=1}^{N}\hat{S}_i^{\infty}+\hat{\sigma}^{\mathrm{Im}}$, где $\hat{S}_i^{\infty}$ — напряжение в неограниченной среде, создаваемое отдельной частицей, а однородное слагаемое $\hat{\sigma}^{\mathrm{Im}}$ вычисляют из условия равновесия тела как целого. Обычно $\hat{\sigma}^{\mathrm{Im}}$ трактуют как напряжение, обусловленное силами изображения [4,5] (способ 2). Напряжения вне частиц, рассчитанные этими способами, совпадают, а напряжения внутри частиц отличаются. Применение способа 2 правомерно, когда упругие модули частиц и тела совпадают. Влияние различия упругих модулей обычно учитывается перенормировкой деформации несоответствия между частицами и телом, при этом напряжение $\hat{\sigma}^{\mathrm{Im}}$ также считают однородным [4] (способ 3). Однако эти предположения требуют дополнительного обоснования.

В [6, 7] показано, что в неограниченной среде суммарное упругое искажение от ряда произвольных дефектов * не равно сумме искажений от изолированных дефектов, т. е. не выполняется принцип аддитивности упругих искажений. В данной работе проанализирована роль эффекта неаддитивности упругих искажений в теле конечных размеров, содержащем ансамбль когерентных частиц.

Рассмотрим сферическое тело радиуса $R$, содержащее статистически однородно распределенные сферические частицы второй фазы. Ограничимся случаем, когда матрица и фаза упругоизотропны с коэффициентами Ламэ $\mu_{\text{м}}$, $\lambda_{\text{м}}$ и $\mu_{\text{ф}}$, $\lambda_{\text{ф}}$ соответственно. Пусть все частицы имеют одинаковый радиус $r_0$ и создают искажения, определяемые в модели центра дилатации с мощностью $\Delta V_0$ [8] (обычно деформация несоответствия $\varepsilon=\Delta V_0/\left(4\pi r_0^3\right)\ll 1$). Объемная доля второй фазы $\delta$ и $N$ связаны соотношением $\delta = N(r_0/R)^3$. Поле упругих смещений будем искать в следующем виде [8]:
вне частиц

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=A\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)+B\sum_{i=1}^{N}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3};\tag{1a}$$

---

* Рассмотрение в [6, 7] проводилось в приближении линейной теории упругости для наиболее общих моделей дефектов — дислокаций Сомилиана.

внутри $i$-й частицы

(1б) $$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad i = 1,2,\ldots, N,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра $i$-й частицы; $A$, $B$ и $A_1$ — постоянные, определяемые из граничных условий, условий непрерывности нормального напряжения на границе раздела фазы с матрицей и величины скачка смещения на границе раздела [8]. Граничное условие удобно записать в виде $\langle\sigma_{RR}\rangle=0$, где $\sigma_{RR}$ — $RR$-я компонента тензора напряжений в сферической системе координат с началом координат в центре тела. Усреднение проводится по расположению частиц в теле. Условие непрерывности нормального напряжения на границе раздела $i$-й частицы с матрицей удобно записывать для величины $\langle\sigma_{rr}\rangle$, где $\sigma_{rr}$ — $rr$-я компонента тензора напряжений в сферической системе координат с началом координат в центре $i$-й частицы. В этой же системе координат удобно вычислять скачок, который претерпевает величина $\langle u_r(\mathbf{r})\rangle$ при переходе через границу раздела $i$-й частицы с матрицей. Для отдельных частиц $\langle u_r(\mathbf{r})\rangle$ на границе раздела претерпевает скачок на величину $\varepsilon r_0$ [8]. При наличии в теле ансамбля частиц необходимо учесть неаддитивность упругих искажений. С использованием метода [6, 7] вычисление скачка функции $\langle u_r(\mathbf{r})\rangle$ дает значение $[\varepsilon - A(N-1)]r_0$. Запишем уравнения для определения $A$, $B$ и $A_1$. Из граничных условий получаем

(2) $$A = \frac{4\mu_м}{3K_м}\frac{B}{R^3};$$

из непрерывности нормального напряжения на границе раздела —

(3) $$3K_м AN - 4\mu_м B/r_0^3 = 3K_ф A_1;$$

из условия скачка смещения на границе раздела —

(4) $$A + B/r_0^3 - A_1 = [\varepsilon - (N-1)A],$$

где $K_м = (2\mu_м + 3\lambda_м)/3$, $K_ф = (2\mu_ф + 3\lambda_ф)/3$ — объемные модули матрицы и фазы соответственно. Решение системы (2)—(4) дает

(5) $$A = \frac{4\mu_м}{I}K_ф\varepsilon\left(\frac{r_0}{R}\right)^3, \quad B = \frac{3K_м}{I}K_ф\varepsilon r_0^3, \quad A_1 = -\frac{4\mu_м}{I}K_м\varepsilon(1-\delta),$$

где $I = K_м(3K_ф + 4\mu_м) - 4\mu_м(K_м - K_ф)\delta$. Упругие дилатации $\theta_м$, $\theta_ф$ и давления $p_м$, $p_ф$ в матрице и фазе соответственно определяются в виде

(6) $$\theta_м = 3AN = \frac{4\mu_м}{I}3K_ф\varepsilon\delta, \quad p_м = -K_м\theta_м,$$

$$\theta_ф = 3A_1 = -\frac{4\mu_м}{I}3K_м\varepsilon(1-\delta), \quad p_ф = -K_ф\theta_ф.$$

При этом среднее по объему тела давление

$$p_м(1-\delta) + p_ф\delta = 0,$$

а средняя по объему тела упругая дилатация

(7) $$\theta_м(1-\delta) + \theta_ф\delta = \frac{4\mu_м}{I}3(K_ф - K_м)\varepsilon\delta(1-\delta).$$

Если в однофазном теле мысленно выделить $N$ сфер одинакового радиуса $r_0$, а затем заменить эти сферы частицами второй фазы, вызывающими дилатационные искажения, то тело изменит свой объем. Такая замена моделирует процесс распада твердого раствора. Формула для вычисления относительного изменения объема тела $V$ имеет вид

(8) $$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon\delta\left[1 - \frac{4\mu_м}{I}(K_м - K_ф)(1-\delta)\right].$$

Сравним полученные результаты с аналогичными соотношениями, вычисленными ранее известными методами. В случае, когда упругие модули частиц и тела совпадают, формулы (5)—(8) можно получить, воспользовавшись способом 2. При разных модулях результаты, полученные способом 3, не совпадают, так как переход к различным модулям не сводится к перенормировке $\varepsilon$. Закономерности (1), (5)—(8) удобно использовать при исследовании процесса старения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Brown L. M., Ham R. K.** Dislocation-particle interactions.— In: Strengthening methods in crystals/Ed. Kelly A. and Nicholson R. B. London etc.: Applied science publishers LTD, 1971.
2. **Келли А., Никльсон Р.** Дисперсионное твердение. М.: Металлургия, 1965.
3. **Гитгарц М. И.** Упругие напряжения и деформации в выделении и матрице при распаде твердого раствора сплава ЭИ437А.— ФММ, 1966, т. 22, № 2.
4. **Brown L. M., Stobbs W. M.** The work-hardening of coppersilica. I. A model based on internal stresses, with no plastic relaxation.— Phil. Mag., 1971, v. 23, N 185.
5. **Hazzledine P. M. and Hirsch P. B.** A coplanar Orowan loops model for dispersion hardening.— Phil. Mag., 1974, v. 30, N 6.
6. **Алексеев А. А., Струнин Б. М.** Изменение упругой энергии кристалла при его пластической деформации.— Кристаллография, 1975, т. 20, № 6.
7. **Алексеев А. А., Струнин Б. М.** Об изменении упругой энергии кристалла при его пластической деформации.— ФТТ, 1975, т. 17, № 5.
8. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дефектов.— В кн.: Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.


*Поступила 29/VIII 1983 г.*

---

УДК 548.571

## ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ДИСЛОКАЦИИ СОМИЛИАНЫ

*Ш. Х. ХАППАПОВ*

*(Уфа)*

1. В основе статистического описания пластического формоизменения, эволюции субструктуры, разрушения и других процессов в реальных твердых телах лежит континуальная теория дефектов (см., например, [1—3]). Среди всевозможных дефектов важное место занимают дислокации и дисклинации, распределениями которых можно представлять практически любые субструктуры. Рассмотрение дислокаций и дисклинаций как различных дефектов не всегда удобно и оправдано, поскольку те и другие являются дислокациями Вольтерра (только лишь разного типа). С другой стороны, дефекты более общего типа — дислокации Сомилианы [2] — могут служить средством единого описания дислокаций и дисклинаций. В [4] сделан шаг в этом направлении и предложена модель дислокации Сомилианы, заданная своими базисными полями пластических дисторсий $\beta^P_{ni}$ и скоростей смещений $v^P_l$. Однако такая дислокация Сомилианы описывает лишь так называемую дислокационную модель дефектов [3]. Этого вполне достаточно для вычисления динамических полей упругих напряжений, создаваемых дефектами, но при этом не отражаются некоторые дисклинационные характеристики дефектной структуры. Цель данной работы — получение общей модели дислокации Сомилианы, которая в равной мере учитывает как дислокационные, так и дисклинационные характеристики дефектов. Как будет показано ниже, такая модель должна быть обобщением дисклинации (поворотной дислокации Вольтерра).

2. Обычное (первоначальное) определение дислокации Сомилианы формулируется в терминах полных полей смещения $u^T_l$, которые на дефектной поверхности $S$ претерпевают произвольно изменяющийся вдоль $S$ скачок $\left[u^T_l\right]$ [2]. При построении общей модели дислокации Сомилианы мы поступим иначе, а именно: дадим определение модели через базисные пластические поля, как это делалось в [4].

Общую модель дислокации Сомилианы будем рассматривать как непосредственное обобщение дисклинации, которая в континуальной теории дефектов определяется заданием четырех базисных пластических полей: $e^P_{kl}$ — тензора деформации, $\varkappa^P_{mq}$ — тензора изгиба-кручения, $v^P_l$ — вектора скоростей смещения, $\omega^P_q$ — вектора скоростей вращения [5, 6]. Выражения для базисных полей для обычной дисклинации получаются путем рассмотрения дисклинации с замкнутой поверхностью $S(t)$, охватывающей объем $V(t)$, где $t$ — время. Исходным является выражение для полных смещений $u^T_l(\mathbf{r}, t)$ внутри объема $V(t)$ [5]

$$u^T_l(\mathbf{r}, t) = \int\limits_V \delta(\mathbf{R}) \left\{b_l + \varepsilon_{lqr}\Omega_q\left(x'_r - x^0_r\right)\right\} dV', \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ — разность радиус-векторов точки наблюдения и интегрирования; $\delta(\mathbf{r})$ — трехмерная дельта-функция Дирака; $b_l$, $\Omega_q$ — векторы относительной трансляции и поворота берегов разреза $S(t)$; $\varepsilon_{lqr}$ — единичный антисимметричный тензор; $x_r$ — декартовы координаты радиус-вектора $\mathbf{r}$; $x^0_r$ — координаты точки, через которую проходит ось поворота. Базисные поля находятся по следующей схеме [5, 6].