

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гилерович Ю. М., Смирнова Н. Н. Сверхпроводящие установки с прямым преобразованием энергии // Судостроение за рубежом.— 1987.— № 5.
2. Iwata A., Tada E., Saji Y. Experimental and theoretical study of superconducting electromagnetic ship propulsion // 5th Lips Propeller Sympos., Drunen, Netherlands, May 1983.
3. Шатров В. И., Яковлев В. И. О гидродинамическом сопротивлении шара, содержащего источник электромагнитных полей кондукционного типа // ПМТФ.— 1985.— № 1.
4. Шатров В. И. Метод расчета безотрывного МГД-обтекания шара несжимаемой жидкостью при числах Рейнольдса  $Re \leq 10^5$ .— Новосибирск, 1984.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 24—84).
5. Шатров В. И., Яковлев В. И. О возможности снижения гидродинамического сопротивления при МГД-обтекании шара // Магнит. гидродинамика.— 1990.— № 1.
6. Шатров В. И., Яковлев В. И. Оптимизация внутреннего источника в задаче МГД-обтекания самодвижущегося шара.— Новосибирск, 1989.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 19—89).
7. Хоничев В. И., Яковлев В. И. К теории кондукционного МГД-двигателя со свободным полем // ПМТФ.— 1980.— № 5.

г. Новосибирск

Поступила 19/III 1991 г.

УДК 536.533

Т. А. Боднарь

### ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СПЛОШНЫХ СРЕД С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сплошная среда с распределенными источниками тепла и переменными теплофизическими характеристиками может находиться во множестве тепловых состояний, представляющих стационарные точки равновесия или колебательные процессы. Для некоторых конфигураций области, занимаемой средой, проведен анализ устойчивости тепловых состояний среды в зависимости от интенсивности источников, теплофизических свойств среды, граничных условий и размеров области. Метод анализа устойчивости основан на редукции размерности бесконечномерной задачи за счет использования проекций ее решений на пространство собственных функций. Приведены результаты расчета тепловых состояний цилиндра конечной длины и их устойчивости.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Сплошная среда с распределенными источниками тепла занимает в пространстве одну из областей: ограниченную параллелепипедом, находящуюся между двумя концентрическими сферами, расположенную между двумя коаксиальными круглыми цилиндрами, закрытыми с торцов плоскостями, перпендикулярными оси цилиндров, — и взаимодействует с окружающей средой. Радиусы внутренних сферы и цилиндра могут быть равны нулю. Предполагается, что в областях, представляющих тела вращения, температура зависит только от линейных координат. Ставится задача определения тепловой устойчивости среды в зависимости от интенсивности источников, теплофизических свойств среды, граничных условий, формы и размеров области, занимаемой средой. Тепловое состояние среды описывается уравнением теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \prod_{n=1}^3 h_n^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h_i^{-2} \prod_{k=1}^3 h_k \bar{\kappa}(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) + \varphi(\Theta) + \varphi_1(x);$$

$$(1.2) \quad H_{ij}(\Theta, \partial \Theta / \partial x_i) = 0, \quad i = 1-3, \quad j = 1, 2;$$

$$(1.3) \quad \Theta(x, 0) = 0.$$

Здесь  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\Theta, x_i, \tau$  — безразмерные температура,  $i$ -я координата, время;  $h_i$  — метрические коэффициенты;  $\varphi(\Theta)$  — функция источни-

ка;  $\varphi_1(x)$  — функция от координат;  $\bar{\kappa}(\Theta) = \kappa(\Theta)/\kappa(0)$  — отношение коэффициентов температуропроводности;  $H_{ij}(\Theta, \partial\Theta/\partial x_i)$  — граничное условие третьего рода в  $j$ -й точке  $i$ -й координаты.

Предполагается, что  $\partial\varphi(\Theta)/\partial\Theta > 0$ , а функции  $\varphi(\Theta)$ ,  $\bar{\kappa}(\Theta)$  могут быть представлены в виде рядов

$$(1.4) \quad \left| \frac{\varphi(\Theta)}{\bar{\kappa}(\Theta)} \right| = \sum_{i \geq 0} \left| \frac{a_i}{b_i} \right| \Theta^i$$

( $b_i$  — постоянные,  $a_i$  — функции параметра  $\mu$ , определенные в окрестности нуля).

Тогда (1.1) с учетом (1.4) приобретает вид

$$(1.5) \quad \partial\Theta/\partial\tau = G(\Theta, \mu, \Delta) = L_\mu \Theta + G_1(\Theta, \mu, \Delta),$$

где  $L_\mu = b_0 \prod_{n=1}^3 h_n^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h_i^{-2} \prod_{k=1}^3 h_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + a_1(\mu)$ ;  $G(\Theta, \mu, \Delta) = \prod_{n=1}^3 h_n^{-1} \times$   
 $\times \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h_i^{-2} \prod_{k=1}^3 h_k \sum_{m \geq 1} \frac{b_m}{m+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta^{m+1} \right) + \sum_{i \geq 2} a_i \Theta^i + \Delta(a_0 + \varphi_1(x))$ ;

$\Delta$  находится из соотношения  $G_1(0, 0, \Delta) = a_0 + \varphi_1(x)$ .

В соответствии с теорией о центральном многообразии [2] бесконечномерная задача (1.2), (1.5) при  $\Delta = 0$  может быть сведена к пространству конечной размерности без потери информации относительно устойчивости ее решений. Редукция размерности рассматриваемой задачи возможна путем построения одного из множества ее центральных многообразий или методом проекций [3, 4], причем последний может быть расширен и для  $\Delta \neq 0$ .

Последовательность операций метода проекций такова, что сначала строится функциональное пространство оператора  $L_\mu$  и определяется устойчивость нулевого решения. Затем на это пространство проектируются решения бифуркационной задачи (1.5) ( $\Delta = 0$ ) и задачи (1.5) с дефектом ( $\Delta \neq 0$ ), разрушающим бифуркацию, и находится устойчивость решений этих задач.

Возможность расширения метода проекции на случай  $G_1(0, \mu, \Delta) \neq 0$  следует из результатов [2].

## 2. Пространство оператора $L_\mu$ и устойчивость нулевого решения.

Анализ устойчивости нулевого решения (1.5) с условиями (1.2), (1.3) сводится к задаче типа Штурма — Лиувилля по определению собственных значений оператора  $L_\mu$ . Спектр оператора  $L_\mu$  состоит только из дискретных собственных значений  $\sigma_n = a_1 - b_0 \lambda_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\lambda_n^2$  удовлетворяют уравнению  $(\lambda^2 E - L_0)\Theta(x) = 0$  ( $E$  — единичная матрица,  $\Theta(x)$  — решение уравнения  $L_0\Theta = 0$ , удовлетворяющее условиям (1.2)).

В дальнейшем максимальное собственное значение  $\sigma_1$  отождествляется с параметром  $\mu$  и нулевое решение устойчиво, если  $\mu = a_1 - b_0 \lambda_1^2 < 0$ . В зависимости от граничных условий (1.2) собственные значения  $\sigma_n$  могут быть простыми или кратными, так что каждому из них будут отвечать собственные векторы  $y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{Nn}$ . Максимальная геометрическая кратность  $\sigma_n$  равна  $N = 8$ . Если  $N = 1$  и  $\sigma_n$  простые, то анализ устойчивости решений (1.5) с условиями (1.2), (1.3) проводится так же, как и в [5].

Преобразования Грамма — Шарлье дают возможность ортогонализировать систему векторов  $y_{ij}$  ( $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j < \infty$ ) таким образом, что максимальному собственному значению  $\sigma_1$  соответствуют векторы

$$(2.1) \quad \bar{y}_{11} = y_{11}, \bar{y}_{k1} = y_{k1} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle y_{k1}, \bar{y}_{i1} \rho(x) \rangle \|\bar{y}_{i1}\|^{-1} \bar{y}_{i1}.$$

Здесь  $\langle \bar{y}_{ij}, \bar{y}_{km} \rangle$  — скалярное произведение векторов  $\bar{y}_{ij}, \bar{y}_{km}$ ;  $\rho(x)$  — вексовая функция, зависящая от выбранной системы координат;  $\|\bar{y}_{ij}\| =$

$= \langle \bar{y}_{ij}, \bar{y}_{ij} \rho(x) \rangle$ . Пространство векторов  $\bar{y}_{kn}$  ( $1 \leq k \leq 8, n \geq 1$ ) является гильбертовым со скалярным произведением  $\langle (\bar{y}_{1i}, \bar{y}_{2j}), (\bar{y}_{1n}, \bar{y}_{2m}) \rangle = \langle \bar{y}_{1i}, \bar{y}_{1n}^* \rangle + \langle \bar{y}_{2j}, \bar{y}_{2m}^* \rangle$  ( $\bar{y}_{kn}^*$  — собственные векторы сопряженного оператора  $L_\mu^*$ ).

Прежде чем переходить к анализу бифуркационного решения (1.5), необходимо пояснить, что результаты анализа справедливы лишь в том случае, когда алгебраическая кратность собственных значений  $\sigma_n$  не превышает геометрическую, хотя метод проекций применим и в этом случае.

**3. Бифуркационное решение.** Анализ устойчивости бифуркационного решения проводится на функциональном пространстве, для которого  $N = 2$ .

Решение (1.5) с условиями (1.2), (1.3) при  $\Delta = 0$  находится в виде рядов

$$(3.1) \quad \left| \frac{\Theta}{\mu} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left| \frac{\Theta_n}{\mu_n} \right|,$$

где  $\varepsilon = \langle (\Theta, \Theta), (\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}) \rangle$  — амплитуда;  $\Theta_n, \mu_n$  — коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Подстановка (3.1) в (1.5) и отождествление членов при независимых степенях  $\varepsilon$  приводят к уравнениям

$$(3.2) \quad L_0 \Theta_1 = 0;$$

$$(3.3) \quad L_0 \Theta_2 + 2\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \Theta_1 + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2 = 0,$$

плюс уравнения при более высоких степенях  $\varepsilon$ .

Из (3.2) непосредственно следует, что решением может быть любая линейная комбинация векторов  $\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}, \Theta_1 = \bar{y}_{11} + \psi \bar{y}_{21}$ , где  $\psi$  — параметр задачи, подлежащий определению.

Уравнение (3.3) разрешимо тогда и только тогда, когда для  $k = 1, 2$  выполняются условия  $\langle L_0 \Theta_2, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0$ , вытекающие из теоремы Фредгольма об альтернативе. Отсюда следует

$$(3.4) \quad 2\mu_1 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle = 0, \quad k = 1, 2.$$

Наличие двух независимых переменных  $\mu_1, \psi$  гарантирует существование решения системы (3.4). Подстановка в эти уравнения выражений для  $\Theta_1, \bar{y}_{k1}^*$  ( $k = 1, 2$ ) дает два уравнения конических сечений на плоскости  $(\mu_1, \psi)$ :

$$(3.5) \quad g_1(\mu_1, \psi) = c_{11}\psi^2 + c_{12}\psi + c_{13}\mu_1\psi + c_{14}\mu_1 + c_{15} = 0;$$

$$(3.6) \quad g_2(\mu_1, \psi) = c_{21}\psi^2 + c_{22}\psi + c_{23}\mu_1\psi + c_{24}\mu_1 + c_{25} = 0.$$

Здесь

$$c_{11} = 0,5 \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{11}^* \right\rangle; \quad c_{12} = \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \right\rangle;$$

$$c_{13} = \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \right\rangle; \quad c_{14} = \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \bar{y}_{11}, \bar{y}_{11}^* \right\rangle;$$

$$c_{15} = 0,5 \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{11}^* \right\rangle; \quad c_{21} = 0,5 \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{21}^* \right\rangle;$$

$$c_{22} = \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \right\rangle; \quad c_{23} = \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \right\rangle;$$

$$c_{24} = \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} \bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}^* \right\rangle; \quad c_{25} = 0,5 \left\langle \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{21}^* \right\rangle.$$

В силу преобразований (2.1)  $c_{13} = c_{24} = 0$ , а если (3.5), (3.6) не вырождены, то (3.5) — всегда парабола, а (3.6) — всегда гипербола. Точки пересечения кривых (3.5), (3.6)  $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$  ( $n = 1-3$ ) на плоскости  $(\mu_1, \psi)$  являются решениями (3.3). В зависимости от знака дискриминанта эквивалентного системе (3.5), (3.6) кубического уравнения

$$(3.7) \quad B_3 \psi^3 + B_2 \psi^2 + B_1 \psi + B_0 = 0$$

$(B_3 = 1, B_2 = (c_{12} - c_{14}c_{21}c_{23}^{-1})c_{11}^{-1}, B_1 = (c_{15} - c_{14}c_{22}c_{23}^{-1})c_{11}^{-1}, B_0 = -c_{14}c_{25}c_{23}^{-1}c_{11}^{-1})$  система (3.5), (3.6) имеет или три действительных решения, или одно действительное и два комплексно-сопряженных. Если дискриминант равен нулю, то два или все три действительных корня совпадают.

Анализ устойчивости решения (1.5), должен проводиться в каждой точке пересечения кривых (3.5), (3.6)  $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ ,  $n = 1-3$ . Для этого необходимо представить зависимости  $g_i(\mu_1, \psi)$  ( $i = 1, 2$ ) в виде функций от параметра  $\mu$ . Комбинируя (3.1), (3.5), (3.6) и используя условие нормировки  $\varepsilon = 1$ , представим (3.5), (3.6) в виде

$$(3.8) \quad \bar{g}_i(\mu) = \mu^2 (c_{i1}\psi^2\mu_1^{-2} + c_{i2}\psi\mu_1^{-2} + c_{i3}\psi\mu_1^{-1} + c_{i4}\mu_1^{-1} + c_{i5}\mu_1^{-2}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6] утверждает, что решение (1.5) устойчиво, если вещественные части собственных значений матрицы Якоби  $I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  ( $a_{11} = \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial \mu_1^{-1}$ ,  $a_{12} = \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1})$ ,  $a_{21} = \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial \mu_1^{-1}$ ,  $a_{22} = \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1})$ ) отрицательны. Строгое доказательство этого утверждения с учетом притягивания решения из  $R^\infty$  в  $R^2$  приведено в [3, 7].

Учитывая, что в каждой точке  $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$  при малом  $\mu$  имеет место  $\det I = \mu^2 \det I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) + O|\mu^3|$ , условие устойчивости запишем в виде для стационарного равновесия

$$(3.9) \quad \max(\mu s_1^{(n)}, \mu s_2^{(n)}) < 0, \quad \det I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) > 0;$$

для периодических циклов

$$(3.10) \quad \max(\mu \operatorname{Re} s_1^{(n)}, \mu \operatorname{Re} s_2^{(n)}) < 0, \\ |\operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} + a_{22}^{(n)})| > |(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{0,25} \cos \arctg \alpha_n^{-1} \beta_n|.$$

Здесь  $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$  — собственные значения матрицы  $I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ ;

$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}); \quad \alpha_n = (\operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)})^2 - (\operatorname{Im}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}))^2 + \\ + 4 \operatorname{Re} a_{12}^{(n)} \operatorname{Re} a_{21}^{(n)} - 4 \operatorname{Im} a_{12}^{(n)} \operatorname{Im} a_{21}^{(n)});$$

$$\beta_n = 2 \operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}) \operatorname{Im}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}) + 4 \operatorname{Re} a_{12}^{(n)} \operatorname{Im} a_{21}^{(n)} + 4 \operatorname{Re} a_{21}^{(n)} \operatorname{Im} a_{12}^{(n)}.$$

Условие (3.9) справедливо лишь при трансверсальном пересечении кривых (3.5), (3.6) на плоскости  $(\mu_1, \psi)$ . Для этого необходимо, чтобы  $\det I_0 \neq 0$ , где

$$I_0 = \begin{vmatrix} \partial g_1(\mu_1, \psi) / \partial \mu_1 & \partial g_1(\mu_1, \psi) / \partial \psi \\ \partial g_2(\mu_1, \psi) / \partial \mu_1 & \partial g_2(\mu_1, \psi) / \partial \psi \end{vmatrix}.$$

Если  $\det I_0 = 0$ , то в точке пересечения кривые (3.5), (3.6) имеют общую касательную и для исследования устойчивости необходимо рассмотреть приближения более высокого порядка. При наличии лишь одного действительного корня уравнения (3.7) пересечение всегда строгое, так как, если кривые касаются, это уже два действительных корня.

Общим для всех действительных решений является неустойчивость, если  $\det I < 0$ , и устойчивость с одной стороны от точки  $\mu = 0$ , если  $\det I > 0$ . Поскольку две последовательные точки пересечений на дуге

конических решений (3.5), (3.6) имеют различные знаки  $\det I$ , то одно решение всегда неустойчиво при любом  $\mu$ , а другое устойчиво с одной стороны от точки  $\mu = 0$ . Отсюда следует, что если система может находиться в нескольких стационарных тепловых состояниях, то среди них всегда будут устойчивые и неустойчивые.

Для комплексных решений (3.5), (3.6) следует обратить внимание на частный случай (3.10)  $\max(\mu \operatorname{Re} s_1^{(n)}, \mu \operatorname{Re} s_2^{(n)}) = 0$  (причем нуль простой), при котором происходит бифуркация рождения предельного цикла — бифуркации Хопфа [2].

В качестве примера рассматривается цилиндр, занимающий область  $0 \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq 2\pi, 0 \leq x_3 \leq r$ . Метрические коэффициенты  $h_1 = 1, h_2 = x_3, h_3 = 1$ . Граничные условия (1.3) записываются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \alpha_{11} \Theta |_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \alpha_{12} \Theta |_{x_1=l} = 0, \\ \Theta |_{x_3=0} < \infty, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} + \alpha_{32} \Theta |_{x_3=r} = 0. \end{aligned}$$

При таких граничных условиях собственные значения оператора  $L_\mu$  двукратны. Максимальное собственное значение и соответствующие ему векторы равны  $\sigma_1 = a_1 - b_0 \lambda_1^2, \lambda_1^2 = \eta_1^2 + v_1^2 r^{-2}, y_{11} = I_0(v_1 r^{-1} x_3) \sin \eta_1 x_1, y_{21} = I_1(v_1 r^{-1} x_3) \cos \eta_1 x_1$ , где  $I_i(v_1 r^{-1} x_3)$  — функции Бесселя первого рода  $i$ -го порядка;  $\eta_1, v_1$  — минимальные положительные корни уравнений

$$\operatorname{ctg} \eta_1 l = \frac{1}{\alpha_{12} - \alpha_{11}} \left( \eta_1 + \frac{\alpha_{11} \alpha_{12}}{\eta_1} \right), \quad r \alpha_{23} I_0(v_1) - v_1 I_1(v_1) = 0.$$

Ортогонализированные векторы операторов  $L_\mu, L_\mu^*$ , отвечающие  $\sigma_1$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{y}_{11} = y_{11}, \quad \bar{y}_{21} = y_{21} - \langle y_{21}, \bar{y}_{11} x_3 \rangle \|\bar{y}_{11}\|^{-1} \bar{y}_{11}, \\ \bar{y}_{11}^* = \bar{y}_{11} x_3 \left( \sum_{i=1}^2 \|\bar{y}_{i1}\| \right)^{-1}, \quad \bar{y}_{21}^* = \bar{y}_{21} x_3 \left( \sum_{i=1}^2 \|y_{i1}\| \right)^{-1} \end{aligned}$$

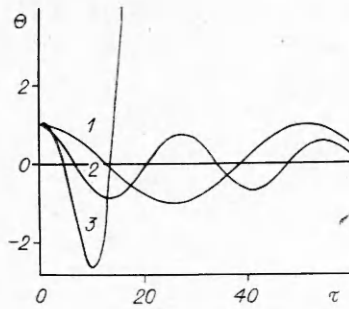
( $x_3 = \rho(x)$  — упомянутая выше весовая функция).

Выбор данных для расчетов преследовал цель наиболее полного охвата возможных тепловых состояний цилиндра. В качестве функции источника взята зависимость [8]  $\varphi(\Theta) = \exp(\Theta(1 + \beta\Theta)^{-1})$ , первые три члена разложения которой  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0,5 - \beta$  ( $\beta$  — параметр). Расчеты, проведенные для различных значений  $l, b_1$  при фиксированных  $\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \alpha_{32} = 0, \beta = 0, b_0 = 1$ , дали результаты, справедливые для любого  $r$ .

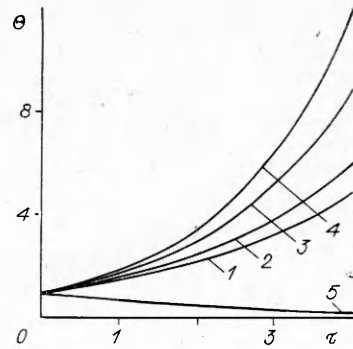
1.  $b_1 = 0,1, l = 1,1$ . Решениями (3.5), (3.6) являются точки  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-0,783; -14,556), (\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (8,18 \cdot 10^{-2} - 0,567i; 0,106 + 1,860i)$ . Третья точка комплексно-сопряжена со второй, поэтому здесь и в дальнейшем не приводится. Этим точкам отвечают собственные значения матрицы Якоби  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (7,80 \cdot 10^{-2}; -2,521), (s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (9,93 \cdot 10^{-2} - 0,193i; -0,283 - 0,154i)$ , которые показывают, что все три решения неустойчивы с любой стороны от точки  $\mu = 0$ .

2.  $b_1 = 0,1, l = 1,267$ . Имеется одно действительное решение и два комплексных  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-1,103; -11,154), (\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (5,27 \cdot 10^{-2} - 0,336i; -4,27 \cdot 10^{-4} + 1,729i)$ , которым соответствуют  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,178; -1,771), (s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (-0,122i; -0,247 - 0,167i)$ . Действительное решение неустойчиво при любом  $\mu$ , периодическое решение представляет собой предельный цикл (рис. 1, кривая 1).

3.  $b_1 = 0,1, l = 1,5$ . Решениям  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-1,382; -8,689), (\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (-1,20 \cdot 10^{-2} - 0,103i; -0,216 + 1,587i)$  отвечают  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,397; -1,186), (s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (-1,02 \cdot 10^{-2} - 0,229i; -0,338 - 7,84 \cdot 10^{-3}i)$ .



Р и с. 1



Р и с. 2

Стационарное решение неустойчиво (рис. 2, кривая 1), а периодическое устойчиво при  $\mu > 0$  (рис. 1, кривая 2, рис. 3, кривая 1).

4.  $b_1 = 0,1$ ,  $l = 1,54$ . Имеется точка стационарного равновесия  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-1,436; -8,478)$  и колебательные режимы  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (-2,74 \cdot 10^{-2} - 7,01 \cdot 10^{-2}i; -0,262 + 1,560i)$ . Для них  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,451; -1,127)$ ,  $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (-0,234i; -0,366 + 2,25 \cdot 10^{-3}i)$ , так что стационарное решение неустойчиво (рис. 2, кривая 2), а периодическое — устойчивый предельный цикл (рис. 3, кривая 2).

5.  $b_1 = 0,1$ ,  $l = 1,6$ . Решениям  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-1,532; -8,280)$ ,  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (5,33 \cdot 10^{-2} - 2,55 \cdot 10^{-2}i; -0,335 + 1,515i)$  соответствуют  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,547; -1,058)$ ,  $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (1,30 \cdot 10^{-2} - 0,244i; -0,406 + 1,73 \cdot 10^{-2}i)$ . Оба режима (стационарный — рис. 2, кривая 3, периодический — рис. 3, кривая 3) неустойчивы.

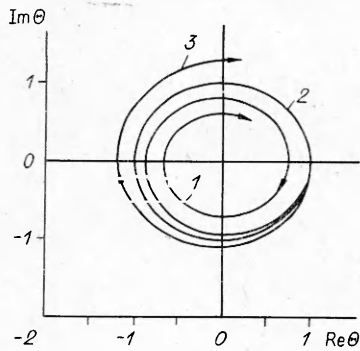
6.  $b_1 = 0,1$ ,  $l = 2$ . Стационарной точке  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-4,043; -13,457)$  и периодическому режиму  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (-0,268 + 0,107i; -0,728 + 0,952i)$  отвечают  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (3,119; -1,876)$ ,  $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (0,101 - 0,346i; -0,628 + 6,48 \cdot 10^{-2}i)$ . Все режимы неустойчивы. Периодическое решение приведено на рис. 1 (кривая 3).

7.  $b_1 = 0,1$ ,  $l = 3,5$ . Все три решения являются точками стационарного равновесия  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (-16,613; -18,119)$ ,  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (-0,387; -0,169)$ ,  $(\mu_1^{(3)}; \psi^{(3)}) = (-0,409; -0,335)$  (рис. 4, а, б). Для них  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (84,337; -19,206)$ ,  $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (0,571; -0,618)$ ,  $(s_1^{(3)}; s_2^{(3)}) = (1,030; 0,359)$ . Первые две точки неустойчивы при любом  $\mu$ , третья устойчива при  $\mu < 0$ . Решения для  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)})$ ,  $(\mu_1^{(3)}; \psi^{(3)})$  приведены на рис. 2 (кривые 4, 5).

8.  $b_1 = 0$ ,  $l = 1,5$ . Из трех точек стационарного равновесия  $(\mu_1^{(1)}; \psi^{(1)}) = (1,348; 4,897)$ ,  $(\mu_1^{(2)}; \psi^{(2)}) = (-1,145; -4,475)$ ,  $(\mu_1^{(3)}; \psi^{(3)}) = (-0,490; -1,139)$  (рис. 5) одна устойчива  $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (0,388; 0,189)$  при  $\mu < 0$  и две неустойчивы  $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,381; -0,411)$ ,  $(s_1^{(3)}; s_2^{(3)}) = (0,326; -8,61 \cdot 10^{-2})$  при любом  $\mu$ . На рис. 4, 5 кривые 1 отвечают уравнению (3.5), а 2 — уравнению (3.6).

4. **Изолированные решения.** В общем случае, например,  $\varphi(\Theta)$  подчиняется закону Аррениуса, оператор  $G(\Theta, \mu, \Delta)$  содержит параметр  $\Delta \neq 0$ , который разрушает бифуркацию в точке  $(\Theta, \mu) = (0, 0)$ , так что разветвляющиеся в этой точке решения распадаются на изолированные. При  $\Delta = 0$  решение  $\Theta = 0$  уравнения  $G(\Theta, \mu, 0) = 0$  строго теряет устойчивость при переходе  $\mu$  через нуль. Из этого, по утверждению Хопфа [2], следует, что точка  $(\Theta, \mu) = (0, 0)$  является двойной точкой бифуркации.

Неравенство  $\langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle \neq 0$  ( $k = 1, 2$ ) и теорема о неявной функции гарантируют существование решения  $G(\Theta, \mu, \Delta) = 0$  относи-



Р и с. 3

тельно  $\Delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ , которое можно получить в виде рядов по степеням  $\mu, \varepsilon$ .

Двукратное дифференцирование  $G(\Theta, \mu, \Delta)$  по  $\mu, \varepsilon$  в точке  $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$  и использование тождества  $\partial G(\Theta, \mu, \Delta(\mu, 0))/\partial \varepsilon = 0$ , вытекающего из определения двойной точки, дают систему уравнений

$$(4.1) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varepsilon^2} = 0;$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mu \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \mu \partial \Theta} \Theta_1 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu \partial \varepsilon} = 0,$$

разрешимую тогда и только тогда, когда для  $k = 1, 2$  выполняются условия

$$\left\langle \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon^2}, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mu \partial \varepsilon}, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle = 0,$$

которые совместно с (4.1), (4.2) позволяют найти первые два ненулевых члена в разложении функции  $\Delta(\mu, \varepsilon)$  по степеням  $\mu, \varepsilon$ :

$$(4.3) \quad \Delta(\mu, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0)/\partial \Theta^2 \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0)/\partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \varepsilon^2 + 2 \frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0)/\partial \Theta \partial \mu \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0)/\partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \mu \varepsilon \right],$$

$k = 1, 2:$

Уравнения (4.3) определяют изолированные решения (1.2), (1.3), (1.5) на плоскости  $(\mu_1, \psi)$ . Подстановка выражений для  $\Theta_1, \bar{y}_{k1}^*$  ( $k = 1, 2$ ) в (4.3) и применение условия нормировки  $\varepsilon = 1$  приводят к системе

$$(4.4) \quad g_1(\mu_1, \psi) + \Delta \langle a_0 + \varphi_1(x), \bar{y}_{11}^* \rangle = 0;$$

$$(4.5) \quad g_2(\mu_1, \psi) + \Delta \langle a_0 + \varphi_1(x), \bar{y}_{21}^* \rangle = 0,$$

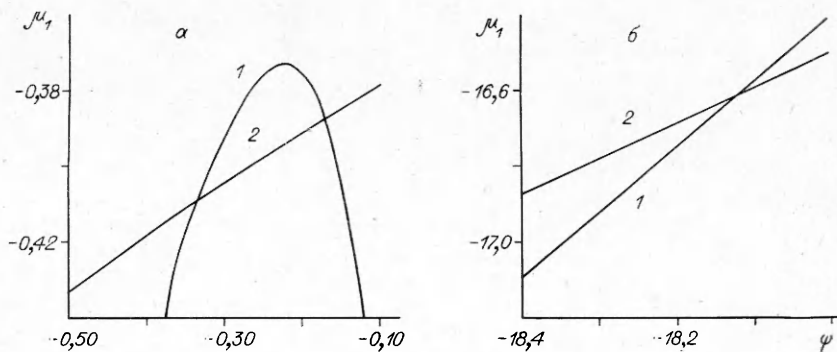
где  $g_i(\mu_1, \psi)$  ( $i = 1, 2$ ) находятся из (3.5), (3.6). Коэффициенты эквивалентного системе (4.4), (4.5) кубического уравнения следующие:

$$B_0 = -(c_{23} + \Delta \langle a_0 + \varphi_1(x), \bar{y}_{21}^* \rangle) c_{14} c_{11}^{-1} c_{23}^{-1},$$

$$B_1 = (c_{15} - c_{14} c_{22} c_{23}^{-1} + \Delta \langle a_0 + \varphi_1(x), \bar{y}_{11}^* \rangle) c_{11}^{-1}$$

( $B_2, B_3$  — такие же, как и в (3.7)).

Система (4.4), (4.5) по своей структуре не отличается от (3.5), (3.6), и поэтому дальнейшая процедура анализа устойчивости решений (1.5)



Р и с. 4

с условиями (1.2), (1.3) при  $\Delta \neq 0$  аналогична проведенной в п. 3 для бифуркационного решения. Распределение действительных и комплексных решений (1.5) при  $\Delta \neq 0$  такое же, как и при  $\Delta = 0$ , хотя они не обязательно должны совпадать.

Полагая, что свойства вещества и занимаемая им область заданы, есть смысл рассматривать граничные условия (1.2) и функцию  $\varphi_1(x)$  как некоторые инструменты регулирования, позволяющие управлять распределением тепловых состояний среды и их мощностью как аттракторов.

Итак, если исходить из полученных результатов, то наличие множества тепловых состояний стационарных и периодических, в которых может находиться среда, наводит на мысль, что неуправляемые тепловые процессы (взрывы, пожары) при переработке, хранении и накоплении веществ на предприятиях химической, атомной, угольной, нефтегазовой, мукомольной и т. д. промышленности могут происходить не только в результате нарушения нормативов (метрических, массовых, температурных, концентраций), но и на «законном» основании, если эти нормативы разрабатывались без учета всех возможных тепловых состояний.

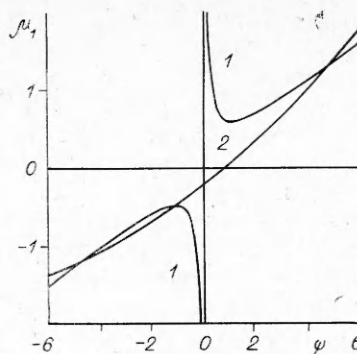


Рис. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.
2. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
3. Йосе Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
4. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости.— М.: Мир, 1981.
5. Боднар Т. А. Тепловая устойчивость плоских, цилиндрических и сферических образцов к-фазы // ФГВ.— 1990.— № 3.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
8. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.

г. Бийск

Поступила 29/VIII 1990 г.,  
в окончательном варианте — 22/II 1991 г.

УДК 532.536

Ю. И. Бубликов, В. М. Фомичев

### О РАЗВИТИИ НАКЛОННЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ДОЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Для плоского дозвукового ламинарного пограничного слоя традиционно сложилось представление, что необходимо исследовать его устойчивость по отношению к плоским волнам (волнам Толлмина — Шлихтинга), направление распространения которых совпадает с вектором средней скорости (прямые волны) [1]. Это обстоятельство было обусловлено теоремой Сквайра, которая утверждает, что при изучении временной неустойчивости плоскопараллельного течения задача для волны, распространяющейся под углом к направлению основной скорости (наклонная волна), сводится к двумерной задаче с меньшим числом Рейнольдса. Отсюда вытекает, что число Рейнольдса потери устойчивости определяется непосредственно из двумерного анализа [2, 3]. Однако для практических