

УДК 539.3:534.1

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

С. Д. Алгазин, И. А. Кийко\*

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

\* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992 Москва

Изучается флаттер прямоугольной пластины при произвольном направлении вектора скорости относительно сторон пластины. Построен численный алгоритм без насыщения для решения задачи на собственные значения. Приведены результаты расчетов критической скорости флаттера и соответствующие собственные формы.

Ключевые слова: флаттер, прямоугольная пластина, численный алгоритм без насыщения, задача на собственные значения.

Исследования панельного флаттера прямоугольных пластин, как правило, проводились в частной постановке [1], когда вектор скорости потока параллелен одной из сторон пластины (см. также [2]). В работах [3, 4], в которых изучается флаттер пластин при действии сдвигающих и нормальных усилий, обоснование вывода используемых уравнений отсутствует. В [5, 6] проблема панельного флаттера пологих оболочек и пластин рассмотрена в общем виде на основе закона плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике, там же приведены постановки новых задач. Традиционные методы численного решения этих задач (разностные методы, метод конечных элементов — методы с насыщением [7]) оказываются малоэффективными [8], точность метода Бубнова — Галеркина при решении этих задач не исследована.

В настоящей работе численно-аналитический алгоритм без насыщения [7, 8], разработанный для флаттера пластин с произвольным гладким контуром, обобщается на случай прямоугольной пластины с произвольно ориентированным вектором скорости потока. Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными методом Бубнова — Галеркина в восьмичленном приближении.

**1. Постановка задачи.** Задача о флаттере прямоугольной пластины, занимающей область  $K = \{(x, y): |x| \leq 1, |y| \leq b\}$ , сводится к определению собственных функций системы [6, 8]

$$D\Delta^2\varphi - knv \operatorname{grad} \varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi = \varphi(x, y), \quad x, y \in K; \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{\partial K} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{|y|=b} = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_{|y|=b} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $D = Eh^3/(12(1-\mu^2)p_0a^3)$  — безразмерная жесткость пластины;  $E, \mu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  — толщина;  $a$  — половина длины в направлении оси  $x$ ;  $k$  — показатель политропы газа;  $p_0$  — давление в невозмущенном потоке;  $v = |\mathbf{V}|$ ;  $\mathbf{V} = \{v \cos \theta, v \sin \theta\}$  — вектор скорости потока, отнесенной к скорости звука в нем; вектор  $\mathbf{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  определяет направление  $\mathbf{V}$ ;  $\varphi = \varphi(x, y)$  — амплитудное значение прогиба  $w = \varphi \exp(\omega t)$ , поэтому

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - k \omega, \quad (1.5)$$

$\rho$  — безразмерная плотность материала пластины, отнесенная к параметру  $p_0/c_0^2$ ; толщина  $h$  отнесена к  $a$ . Граничные условия (1.2), (1.3) означают, что пластина закреплена по краю, граничные условия (1.2), (1.4) означают свободное опирание.

Колебания пластины устойчивы при  $\operatorname{Re} \omega < 0$  и неустойчивы при  $\operatorname{Re} \omega > 0$ . В комплексной плоскости  $\lambda = \alpha + \beta i$  области устойчивых и неустойчивых колебаний в соответствии с (1.5) разделяет парабола устойчивости [1]  $F(\alpha, \beta) = k^2 \alpha - \rho h \beta^2 = 0$ . Поскольку  $\alpha = \alpha(v, \theta)$ ,  $\beta = \beta(v, \theta)$ , уравнение  $F(\alpha(v, \theta), \beta(v, \theta)) \equiv f(v, \theta) = 0$  в плоскости параметров  $v, \theta$  определяет нейтральную кривую, отделяющую область их докритических значений.

Известны общие свойства собственных значений задачи (1.1)–(1.4) [1, 8, 9]: 1)  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ; 2) колебания, соответствующие действительным значениям  $\lambda$ , устойчивы; 3) при фиксированном  $\theta$  с увеличением  $v$  собственные значения последовательно переходят в комплексную область; при заданном значении  $v$  число комплексных значений  $\lambda$  конечно. В соответствии с этим принята следующая схема исследования: а) задаче (1.1)–(1.4) ставится в соответствие ее дискретный аналог; б) при фиксированном  $\theta$  определяется критическая скорость по первому собственному значению; в) при полученном значении критической скорости проводится анализ устойчивости по другим комплексным собственным значениям; г) если находится комплексное значение  $\lambda$  вне параболы устойчивости, то по этому собственному значению вычисляется критическая скорость; д) из всех найденных таким образом критических скоростей выбирается наименьшая.

**2. Дискретизация.** Построим дискретный лапласиан  $H$  с краевым условием (1.2), используя методику, описанную в [10].

В плоскости  $(x, y)$  выберем сетку, состоящую из узлов

$$x_q = \cos((2q-1)\pi/(2n)), \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad (2.1)$$

$$y_\mu = b \cos((2\mu-1)\pi/(2m)), \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Пусть  $A$  — матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$  с краевым условием  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$  на сетке (2.1);  $B$  — матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору  $\partial^2 \varphi / \partial y^2$  с краевым условием  $\varphi(-b) = \varphi(b) = 0$  на сетке (2.2). Тогда дискретный лапласиан принимает вид

$$H = I_m \otimes A + B \otimes I_n, \quad (2.3)$$

где  $I_n, I_m$  — единичные матрицы размера  $n \times n$  и  $m \times m$ ; знак “ $\otimes$ ” обозначает кронекерово произведение матриц. Собственный вектор матрицы  $H$  имеет вид  $u = r \otimes s$ , где  $s$  — собственный вектор матрицы  $A$ ;  $r$  — собственный вектор матрицы  $B$ . При этом узлы сетки нумеруются сначала по  $x$ , затем по  $y$  (справа налево и снизу вверх). Можно сказать, что матрица (2.3) наследует свойство разделения переменных дифференциального оператора Лапласа.

Дискретизация оператора  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$  с краевым условием  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  проводится следующим образом: а) на сетке (2.1) ( $a = -1, b = 1$ ) или (2.2) ( $a = -b, b = b$ ) выписывается интерполяционная формула Лагранжа, удовлетворяющая краевым условиям;

б) значения вторых производных в узлах сетки получаются дифференцированием интерполяционной формулы. В результате получаем

$$D_{ij} = \frac{2}{b-a} \frac{2}{k \sin^2 \psi_j} \sum_{q=0}^{k-1} \cos(q\psi_j) \left[ (2+q^2) \cos(q\psi_i) + 3q \cos \psi_i + 3q \cos \psi_i \frac{\sin(q\psi_i)}{\sin \psi_i} \right],$$

$$\psi_j = (2j-1)\pi/(2k), \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Здесь  $k = n$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$  для матрицы  $A$ ;  $k = m$ ;  $a = -b$ ,  $b = b$  для матрицы  $B$ .

Дискретизация производных  $\partial\varphi/\partial x$  и  $\partial\varphi/\partial y$  проводится аналогично. На соответствующей сетке (2.1) или (2.2) выписывается интерполяционный многочлен Лагранжа, значения производных в узлах сетки получаются дифференцированием этой интерполяционной формулы. В результате получаем матрицу дифференцирования

$$D_{s\mu} = \frac{4}{k(b-a)} \sum_{q=0}^{k-1} \frac{q \cos(q\psi_\mu) \sin(q\psi_s)}{\sin \psi_s}, \quad \psi_s = \frac{(2s-1)\pi}{2k}, \quad s, \mu = 1, 2, \dots, k.$$

При  $k = n$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$  получаем матрицу  $D^x$  дифференцирования по  $x$ ; при  $k = m$ ,  $a = -b$ ,  $b = b$  — матрицу  $D^y$  дифференцирования по  $y$ . Для того чтобы получить производные функции  $\varphi$  в узлах сетки, нужно умножить матрицу  $D$  на вектор значений функции  $\varphi$  в узлах сетки. Следствием краевых условий (1.2), (1.4) является условие

$$\Delta\varphi|_{\partial K} = 0. \quad (2.4)$$

В этом случае матрица бигармонического оператора с краевыми условиями (1.2), (2.4) есть  $H^2$ , поскольку матрица  $H^2$  имеет те же собственные векторы, что и матрица  $H$ , и собственные значения  $\lambda_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ( $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $H$  размера  $N \times N$  ( $N = mn$ )).

Рассмотрим дискретизацию уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2), (1.3), т. е. заземленную по контуру пластину.

Для функции  $\varphi = \varphi(x, y)$  в прямоугольнике запишем интерполяционную формулу

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{i0}(z) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i), \quad y = bz, \quad z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1], \quad (2.5)$$

где

$$L_{j0}(x) = l(x)/(l'(x_j)(x - x_j)), \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = (2j-1)\pi/(2n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_{i0}(z) = M(z)/(M'(z_i)(z - z_i)), \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z),$$

$$z_i = \cos \vartheta_i, \quad \vartheta_i = (2i-1)\pi/(2m), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Интерполяционная формула (2.5) удовлетворяет краевым условиям заземления. Для получения матрицы дискретного бигармонического оператора  $H$  требуется применить бигармонический оператор к интерполяционной формуле (2.5), т. е. четыре раза продифференцировать по  $x$  и  $y$  формулу (2.5). В результате получим несимметричную матрицу  $H$  размера  $N \times N$ ,  $N = mn$ . Пронумеруем узлы в прямоугольнике  $(x_j, y_i)$  сначала по  $y$ , затем по  $x$ , т. е. сверху вниз и справа налево. В результате выражение  $\Delta^2\varphi$  аппроксимируется выражением  $H\varphi$  ( $\varphi$  — вектор значений функции  $\varphi = \varphi(x, y)$  в узлах сетки). Отметим, что матрица  $H$  несимметрична, хотя рассматриваемый бигармонический оператор самосопряженный. Следовательно, матрица  $H$  может иметь комплексные собственные значения.

Таблица 1

$\theta$	$v_{кр}$	$v_{кр}^*$
0	0,3546 (1)	0,3042
$\pi/8$	0,3737 (1)	0,3307
$\pi/4$	0,4346 (1)	—
$5\pi/16$	0,4801 (1)	0,4207
$3\pi/8$	0,5235 (1)	—
$15\pi/32$	0,5275 (2)	0,4022
$\pi/2$	0,5257 (2)	0,4121

В задачах устойчивости наличие у дискретного бигармонического оператора комплексных собственных значений (вследствие погрешности дискретизации) нежелательно. Поэтому необходима модернизация применяемого подхода. Вместо матрицы  $H$  рассматривалась матрица  $(H + H^*)/2$ . Этот прием можно пояснить следующим образом. Исходная задача самосопряженная (бигармоническое уравнение с краевым условием заземления), но в результате дискретизации получается несимметричная матрица  $H$ . Представим  $H$  в виде

$$H = (H + H^*)/2 + (H - H^*)/2$$

и будем рассматривать несимметричную часть как погрешность дискретизации. Возмущение, которое при этом вносится в собственные значения матрицы  $H$ , зависит от того, насколько близки резольвенты матриц  $H$  и  $(H + H^*)/2$  в той части комплексной плоскости, которая представляет интерес при исследовании устойчивости потока. Это возмущение может быть оценено теоретически по схеме, описанной в [11]. Ниже приведены результаты численной оценки этого возмущения.

При  $b = 1$  матрица  $H$  размера  $361 \times 361$  ( $361 = 19 \times 19$ ) имеет первое собственное значение  $\sqrt{\lambda_1}/\pi^2 = 2,4902$ . Это значение сравнивалось с полученным в расчетах [12]  $\sqrt{\lambda_1^*}/\pi^2 = 2,489$ . Матрица  $(H + H^*)/2$  имеет собственное значение  $\sqrt{\lambda_1^*}/\pi^2 = 2,3961$ . Таким образом, возмущение, вносимое в собственные значения симметризацией матрицы  $H$ , приемлемо.

Дискретизация  $\text{grad } \varphi$  в краевой задаче (1.1)–(1.3) проводилась аналогично.

**3. Результаты численных расчетов.** Рассмотрим результаты расчетов для свободно опертой пластины, выполненных при следующих значениях механических параметров:  $p_0 = 1,0126 \cdot 10^5$  Па;  $\rho_0 = 1,2928$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,33$ ;  $k = 1,4$ ;  $E = 6,86 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Варьировались относительные размер  $b$ , толщина  $h$ , скорость потока  $v$  и угол  $\theta$ .

Проведены тестовые расчеты для квадратной пластины ( $b = 1$ ,  $h = 0,003$ ). Получены следующие результаты:  $v_{кр}(0) = v_{кр}(\pi/2) = 0,2103$ ,  $v_{кр}(\pi/4) = 0,2001$ ; во всех случаях  $v_{кр}$  определено по первому собственному значению. Графики  $\text{Re } \varphi(x, 0)$  и  $\text{Re } \varphi(0, y)$  совпадают.

Результаты расчетов для пластины с размерами  $b = 0,5$ ,  $h = 0,003$  приведены в табл. 1 (в скобках указан номер собственного значения). Отметим следующее обстоятельство, которое может оказаться существенным при численном анализе задач о флаттере: значения  $|\lambda_1| = 1,56658$  и  $|\lambda_2| = 1,56660$  ( $\theta = 0$ ) близки, однако  $\lambda_1 > 0$  действительно и не порождает неустойчивой формы колебаний. В третьей графе табл. 1 приведены значения  $v_{кр}^*$ , полученные методом Бубнова — Галеркина в восьмичленном приближении. Из табл. 1 следует, что этот метод дает заниженные результаты.

Результаты расчетов, приведенные в табл. 1, позволяют сделать следующие выводы: а) резкий рост критической скорости в диапазоне углов  $\theta \in (\pi/4, 3\pi/8)$  и плавное ее изменение при других значениях углов; б) максимум критической скорости флаттера находится вблизи точки  $\theta = 15\pi/32$  (так называемый эффект стабилизации колебаний пластины по

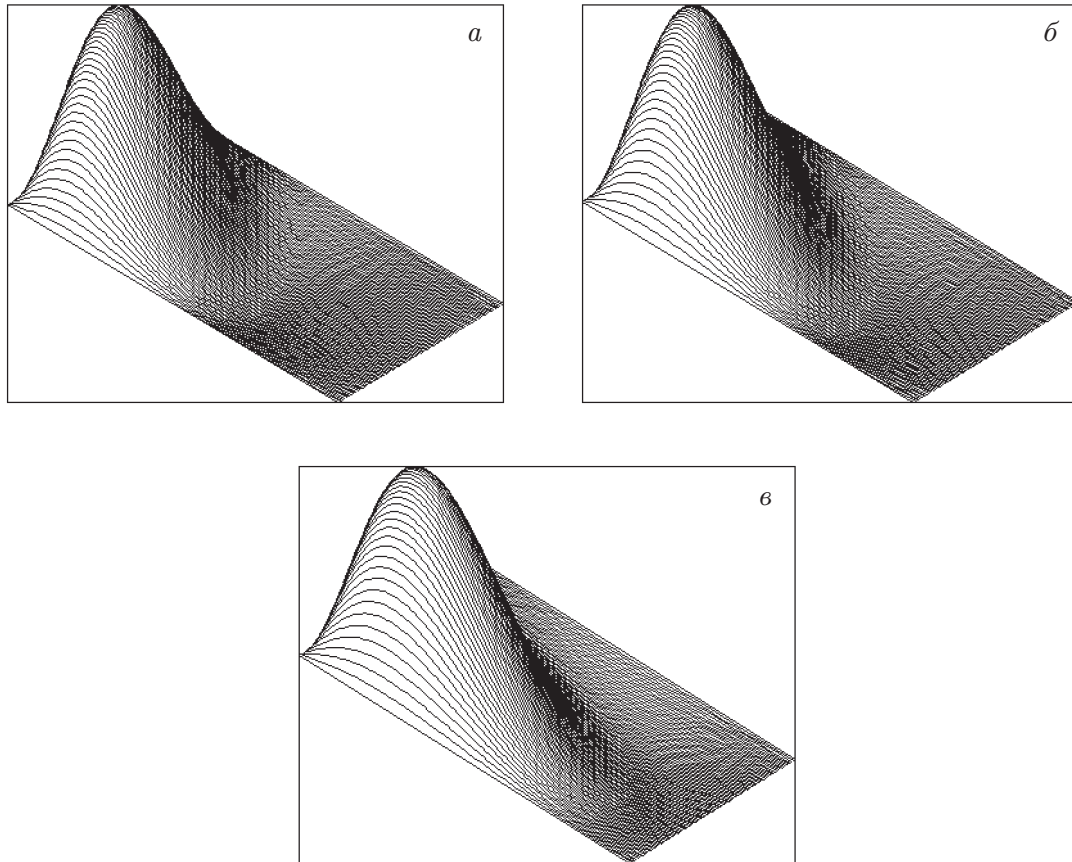


Рис. 1

Таблица 2

$\theta$	$v_{кр}$	$\theta$	$v_{кр}$
0	0,2655 (3)	$3\pi/8$	0,4803 (1)
$\pi/8$	0,2832 (3)	$7\pi/16$	0,4912 (2)
$\pi/4$	0,3453 (1)	$15\pi/32$	0,4867 (3)
$5\pi/16$	0,4014 (1)	$\pi/2$	0,4851 (4)

отношению к флуктуациям направления вектора скорости в окрестности  $\theta = \pi/2$ ). Отметим, что в [13] этот эффект обнаружен при решении задачи о флаттере полосы. На рис. 1, *a–в* показаны действительные части собственных функций при  $\theta = \pi/4; 5\pi/16; 3\pi/8$  и  $v = v_{кр} = 0,4346; 0,4801; 0,5235$  соответственно.

Проведены расчеты для удлиненной пластины с размерами  $b = 0,25$ ,  $h = 0,0015$  (отношение толщины к меньшей стороне пластины то же, что и в предыдущем расчете). Результаты расчетов приведены в табл. 2. На рис. 2, *a–д* показаны действительные части собственной функции при  $\theta = 0; \pi/4; 5\pi/16; 3\pi/8; 7\pi/16$  и  $v = v_{кр} = 0,2655; 0,3541; 0,4014; 0,4803; 0,4912$ . Видно, что при значениях  $\theta$ , при которых наиболее резко возрастает критическая скорость, меняется форма колебаний пластины. Следовательно, при этих значениях  $\theta$  пластина наиболее чувствительна к изменениям скорости и направления потока.

**4. Метод Бубнова — Галеркина.** Считается, что в задаче о флаттере прямоугольной пластины (в традиционной постановке  $V = \{v_x, 0\}$ ) метод Бубнова — Галеркина дает приемлемую величину критической скорости даже в двучленном приближении. Однако в [2] отмечено, что в случае удлиненной вдоль потока пластины эффективность метода

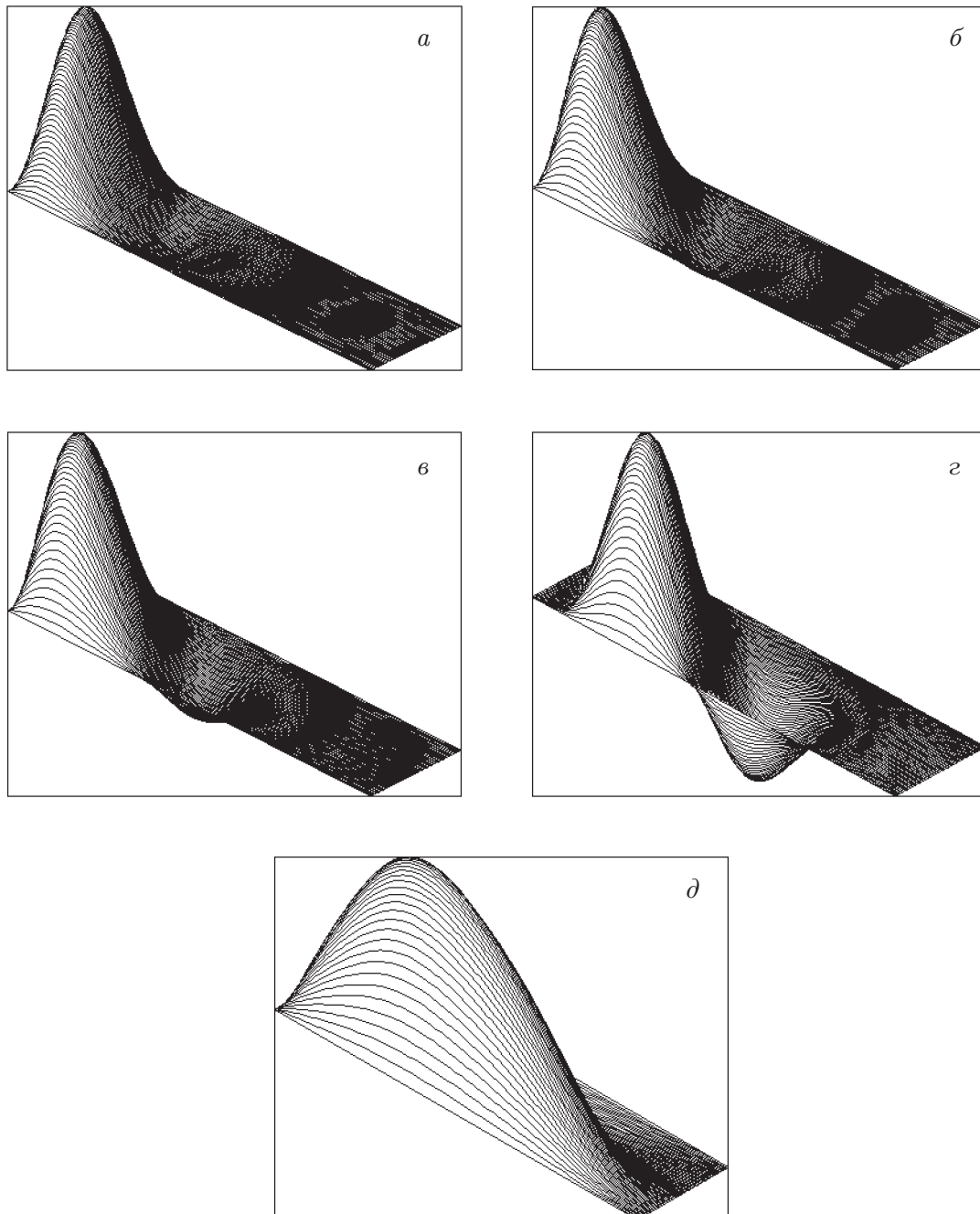


Рис. 2

Таблица 3

$h$	$v_{кр}$		
	Данные [14]	Сетка $9 \times 9$	Сетка $19 \times 19$
$5,0000 \cdot 10^{-3}$	1,0000	1,0615 (1)	1,0615 (1)
$6,3091 \cdot 10^{-3}$	2,0029	2,0991 (1)	2,0991 (1)
$7,2202 \cdot 10^{-3}$	3,0029	3,1325 (1)	3,1324 (1)
$7,9365 \cdot 10^{-3}$	4,0029	4,1523 (1)	4,1523 (1)
$8,5470 \cdot 10^{-3}$	5,0059	5,1806 (1)	5,1805 (1)
$9,0909 \cdot 10^{-3}$	6,0059	6,2296 (1)	6,2295 (1)
$9,5694 \cdot 10^{-3}$	7,0059	7,2627 (1)	7,2626 (1)
$1,0000 \cdot 10^{-2}$	8,0088	8,2853 (1)	8,2851 (1)
$1,0417 \cdot 10^{-2}$	9,0088	9,3632 (1)	9,3630 (1)

резко снижается и для достижения приемлемой точности в аппроксимирующей сумме необходимо удерживать значительное (заранее, вообще говоря, неизвестное) число слагаемых. Применимость метода Бубнова — Галеркина к задачам о флаттере пластины в общей постановке исследована недостаточно. Приводимые ниже результаты в некоторой степени восполняют этот пробел.

Из рис. 1, 2 следует, что характерный размер возмущения порядка половины меньшей стороны пластины, поэтому приближенное решение разыскивалось в виде  $\varphi = c_{mn} \sin(m\pi y) \sin(n\beta\pi x)$ ,  $m = 1, 2$ ;  $n = 1, \dots, 4$  (пластина занимает область  $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1/\beta, 0 \leq y \leq 1\}$ ). Стандартная процедура метода Бубнова — Галеркина для решения уравнения (1.1) приводит к исследованию корней характеристического определителя восьмого порядка, который из-за громоздкости не выписывается. Необходимо определить зависимость  $\lambda = \lambda(v, \theta)$ . Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы: а) метод Бубнова — Галеркина дает удовлетворительные оценочные значения  $v_{кр}^*$ , если число слагаемых в формуле для  $\varphi$  не меньше  $N \sim 4a/b$  (две “полуволны” вдоль меньшей стороны и  $2a/b$  “полуволн” вдоль большей); б) при определении зависимости  $\lambda = \lambda(v, \theta)$ , а следовательно, и форм колебаний метод Бубнова — Галеркина дает погрешность, которая возрастает с увеличением скорости потока и приводит к ухудшению качественных результатов. Эти выводы не являются окончательными, требуется проведение исследования для пластин другой геометрии и других комбинаций граничных условий.

**5. Сравнение с результатами работы [14].** В [14] проведены расчеты критической скорости флаттера свободно опертой квадратной пластины в частной постановке, когда вектор скорости потока направлен параллельно стороне пластины. В этой работе отслеживалось появление в спектральной задаче комплексного собственного значения. В [14] не выяснялось, при каком приращении скорости собственное значение выходит на параболу устойчивости. Ниже приведены результаты расчетов по описанной методике и дано сравнение их с результатами [14]. Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $p_0 = 1,0126 \cdot 10^5$  Па;  $\rho_0 = 1,2283$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,3$ ;  $k = 1,4$ ;  $E = 1,9982 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Варьировалась толщина пластины. Результаты расчетов представлены в табл. 3. В первой графе приведены значения относительной толщины квадратной пластины ( $b = 1$ ). Во второй графе приведены значения  $v_{кр}$ , полученные в [14]. В третьей и четвертой графах приведены значения  $v_{кр}$ , рассчитанные по методике п. 2, на сетках  $9 \times 9$  и  $19 \times 19$  соответственно. В скобках указан номер собственного значения, по которому рассчитывалась устойчивость. Из табл. 3 следует, что результаты хорошо согласуются. Наибольшая относительная погрешность имеет место при  $h = 1,0417 \cdot 10^{-2}$  и составляет 3,8 %.

**6. Выводы.** Оценка погрешности описанного численного метода может быть проведена стандартным способом. Отметим лишь свойство применяемой дискретизации. В данной работе для интерполяции решения применялись интерполяционные многочлены Лагранжа. Известно, что этот многочлен тем точнее приближает функцию, чем большим условиям гладкости она удовлетворяет [15]. Известно также, что эллиптические уравнения имеют высокую гладкость решения (для прямоугольника это справедливо внутри области, а не на границе в углах). Проведенные расчеты подтверждают высокое качество полученного алгоритма. Даже на сетке  $9 \times 9 = 81$  при  $a/b = 0,5$  критическая скорость определяется с точностью до четырех знаков после запятой, что следует из сравнения с расчетами на сетке  $19 \times 19 = 361$ . Критическая скорость может быть определена точнее (корень соответствующего трансцендентного уравнения вычислялся с точностью до  $\varepsilon = 10^{-4}$ ), но на практике этого не требуется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 211–222.
2. Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67–122. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 2).
3. Эйсли Д., Льюэссен Г. Флаттер тонких пластинок при совместном действии сдвигающих и нормальных усилий на краях // Ракет. техника и космонавтика. 1963. Т. 1, № 3. С. 95–103.
4. Метсаавэр Я. А. О флаттере заземленных пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 4. С. 179, 180.
5. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 138–142.
6. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 3. С. 167–171.
7. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
8. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 60, вып. 1. С. 171–174.
9. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 1. С. 170–176.
10. Алгазин С. Д. О дискретизации линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 3. С. 400–411.
11. Алгазин С. Д. О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 3–8.
12. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1964.
13. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 40–44.
14. Мовчан А. А. Некоторые вопросы колебаний пластинки, движущейся в газе. М.: Изд-во АН СССР, 1955. (Тр. Ин-та механики / АН СССР; Вып. 1).
15. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.

*Поступила в редакцию 29/XI 2001 г.,  
в окончательном варианте — 13/I 2003 г.*