

17. Montgomery D. Cascades and inverse cascades in fluids and magnetofluids // Res. Rept/Inst. Plasma Phys. Nagoya Univ.— 1984.— N 670.
18. Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости // ДАН СССР.— 1941.— Т. 31, № 6.
19. Дербунович Г. И., Земская А. С. и др. Использование сеток для управления структурой турбулентного потока в аэродинамических трубах // Учен. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. 13, № 1.

г. Донецк

Поступила 19/XII 1988 г.

УДК 532.59

А. А. Коробкин, И. В. Стурова

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА
С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ.
ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ**

1. Рассматривается неустановившееся движение в поле сил тяжести слоя однородной несжимаемой идеальной жидкости переменной глубины, вызванное начальным возмущением свободной границы. Картина движения полностью описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, y, t)$, который в линейной постановке удовлетворяет соотношениям

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi_{tt} + \varphi_y = 0 \text{ (} y = 0, x \in R^1 \text{),} \\ \varphi_y + h_x\varphi_x &= 0 \text{ (} y = -h(x), x \in R^1 \text{), } \varphi = 0, \quad \varphi_t = -f(x) \\ &\text{(} y = 0, t = 0 \text{).} \end{aligned}$$

В декартовой системе координат (x, y) ось y направлена противоположно направлению свободного падения. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются так, что число Фруда задачи и глубина жидкости при $x = 0$ равны единице. В начальный момент времени ($t = 0$) свободная поверхность жидкости отклонена от своего равновесного положения. Уравнения $y = f(x)$, $y = -h(x)$, $x \in R^1$ описывают начальное положение свободной границы и форму дна водоема соответственно ($h(x) > 0$).

В предположении о плавном изменении глубины водоема, т. е. $\varepsilon = \max_{x \in R^1} |h_x| \ll 1$, фундаментальное решение сформулированной задачи построено и предварительно исследовано в [1]. Цель данной работы — проиллюстрировать полученное решение численными расчетами и исследовать характер влияния различных донных неровностей на поведение свободной поверхности. Основным интерес представляет анализ вертикальных смещений свободной поверхности $\eta(x, t)$, которые определяются из соотношения $\eta = -\varphi_t(x, 0, t)$. Для простоты предполагается четность функции $f(x)$.

В случае ровного дна ($h \equiv 1$) хорошо известна формула, описывающая эволюцию свободной границы:

$$(1.2) \quad \eta_0(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(v) \cos vx \cos \Omega(v) t \, dv$$

$$\left(\Omega(v) = (v \operatorname{th} v)^{1/2}, F(v) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos vx \, dx \right).$$

При больших временах для волн, распространяющихся вправо ($t \rightarrow \infty$,

$x/t = O(1)$, $x > 0$), справедлива асимптотика

$$(1.3) \quad \eta_0(x, t) = F(\alpha)(2\pi t |\Omega'(\alpha)|)^{-1/2} \sin[\Omega(\alpha)t + \alpha x + \pi/4] + O(t^{-1}),$$

которая получается с помощью метода стационарной фазы. Здесь $\alpha = \alpha(x/t)$ — решение уравнения $\Omega'(\alpha) = -x/t$. Асимптотика (1.3) не является равномерной, она описывает картину поверхностных волн далеко за фронтом головной волны [1], т. е. при $0 < x < t$, и не дает информации о форме свободной поверхности при $x \geq t$, $t \gg 1$.

Если глубина водоема меняется медленно ($\varepsilon \ll 1$), то с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ имеем [1]

$$(1.4) \quad \eta(x, t) = 2\Omega(\alpha)C_0(\alpha, \lambda) \operatorname{ch}[qh(x)] \sin \theta(\alpha, \lambda),$$

где функции q , θ , C_0 зависят от параметров α , λ ($\alpha < 0$, $\lambda > 0$) и определяются как решения системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(1.5) \quad \frac{dq}{d\lambda} = \frac{q^2 h'(x)}{\operatorname{ch}^2 qh(x)}, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 2\Omega^2(\alpha) - qS(qh), \quad \frac{dx}{d\lambda} = -S(qh), \quad \frac{dC_0}{d\lambda} =$$

$$= -E(\lambda, \alpha)C_0, \quad \frac{dq_\alpha}{d\lambda} = \frac{q}{\operatorname{ch}^2 qh} [2q_\alpha h' + qh''x_\alpha - 2qh' \operatorname{th} qh (q_\alpha h + qh'x_\alpha)],$$

$$\frac{dx_\alpha}{d\lambda} = -S'(qh)(hq_\alpha + qh'x_\alpha), \quad \bar{S}(\xi) = \operatorname{th} \xi + \frac{\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad S_1 = \frac{S(qh)}{4\Omega^2(\alpha)} + h \operatorname{th} qh,$$

$$E(\lambda, \alpha) = q_x [S_1 S(qh) - h] - qh' + \frac{q^2 h'}{\operatorname{ch}^2 qh} S_1, \quad q_x = q_\lambda \lambda_x + q_\alpha \alpha_x,$$

$$\lambda_x = \lambda \Omega'(\alpha)/D, \quad \alpha_x = -\Omega(\alpha)/D, \quad D = \lambda \Omega'(\alpha) x_\lambda - x_\alpha \Omega(\alpha), \quad t = 2\lambda \Omega(\alpha).$$

Заметим, что в [1] соответствующая система была выписана относительно «медленных» переменных εx , εt . Амплитудная функция C_0 становится неограниченно большой при $\lambda \rightarrow 0$, поэтому численное решение системы (1.5) удобно начинать с некоторого малого значения $\lambda = \lambda_0 > 0$, используя в качестве начальных условий решение (1.5) для ровного дна:

$$(1.6) \quad q = \alpha, \quad \theta = \lambda_0 [2\Omega^2(\alpha) - \alpha S(\alpha)] + \pi/4, \quad x = -\lambda_0 S(\alpha),$$

$$C_0 = \frac{F(\alpha)}{4 \sqrt{\pi \lambda_0 |\Omega''(\alpha)| \Omega^3(\alpha) \operatorname{ch} \alpha}}, \quad q_\alpha = 1, \quad x_\alpha = -\lambda_0 S'(\alpha).$$

Подстановка (1.6) в (1.4) приводит к формуле (1.3). Численное интегрирование системы (1.5) с начальными условиями (1.6) производится при различных $\alpha(\alpha < 0)$. Получаемая при $\alpha \rightarrow -0$ функция $x_f = x(t)$ определяет границу фронта волновых возмущений, распространяющихся вправо.

2. Плоская задача Коши—Пуассона для бассейна с неровным дном в предположении малой неровности исследована в [2]. Решение получено в виде суммы

$$\eta = \eta_0(x, t) + \eta_1(x, t),$$

где η_0 — решение (1.2) для ровного дна, а

$$(2.1) \quad \eta_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{kF(k) dk}{\operatorname{ch} k} \int_0^\infty \frac{pZ(k, p) [\cos \Omega(k)t - \cos \Omega(p)t]}{\operatorname{ch} p [\Omega^2(p) - \Omega^2(k)]} dp$$

$$(Z(k, p) = \operatorname{Re}[ipe^{ipx} K(p, k)]),$$

$$K(p, k) = \int_{-\infty}^\infty h_1(x) e^{-ipx} \sin kx dx, \quad h_1(x) = 1 - h(x).$$

Необходимое условие применимости этого приближения — интегрируемость функции $|h_1(x)|$, что заведомо выполняется для локализованной неровности дна.

Представляет интерес сопоставление численных расчетов, полученных в приближении малой неровности и в приближении плавно меняющегося дна. Рассматривается случай, когда форма начального возвышения свободной границы описывается функцией

$$(2.2) \quad f(x) = ae^{-dx^2},$$

а рельеф дна — функцией

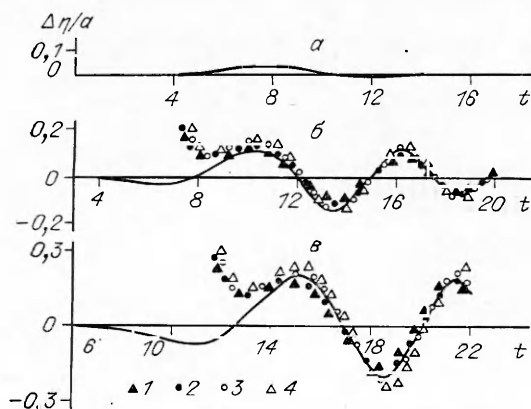
$$h_1(x) = \begin{cases} b \cos(\pi(x-x_0)/2x_1), & |x-x_0| < x_1; \\ 0, & |x-x_0| > x_1. \end{cases}$$

Заметим, что в приближении малой неровности отношение $\Delta\eta = \eta_1/b$ не зависит от b . На рис. 1 представлены зависимости $\Delta\eta(x, t)$ при различных b ; здесь $d = 3$, $x_0 = 7$, $x_1 = 3$. Сплошной линией показано решение (2.1), кривые 1—4 соответствуют приближению плавной неровности при $b = -0,2; -0,1; 0,1; 0,2$. Это приближение не описывает отраженные волны, значит, $\Delta\eta \equiv 0$ слева от неровности (рис. 1, а, $x = 3$). Приближение малой неровности описывает отраженные волны, но их амплитуда в рассматриваемом случае пренебрежимо мала. Над вершиной неровности при $x = 7$ (рис. 1, б) и за нею при $x = 11$ (рис. 1, в) оба приближения удовлетворительно согласуются. Как и следовало ожидать, согласование улучшается при уменьшении $|b|$.

3. Асимптотика (1.4) несправедлива вблизи фронта головной волны [1], именно $C_0(\alpha, \lambda) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow -0$. Для уточнения формы свободной границы в окрестности фронта в [1] используется способ, предложенный Уиземом. Однако получаемое при этом составное асимптотическое разложение (при $\epsilon \rightarrow 0$) на умеренных временах заметно отличается от точного решения. Асимптотические формулы для $\eta(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, $x/t = O(1)$, равномерно пригодные по пространственной переменной x и удобные для численных расчетов, могут быть получены с помощью обобщенного метода стационарной фазы [3]. Он в отличие от обычного метода стационарной фазы предусматривает возможность слияния точек стационарной фазы. Прежде всего необходимо построить равномерную по переменной x асимптотику $\eta_0(x, t)$, определяемую формулой (1.2), при $t \rightarrow \infty$. Перепишем (1.2) в виде

$$\eta_0(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{it(\Omega_1(v)-v\sigma)} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{it(\Omega_1(v)+v\sigma)} dv,$$

где $\Omega_1(v) = \sqrt{v} \operatorname{th} v \operatorname{sgn} v$, $\sigma = x/t$. Для волн, распространяющихся вправо ($x > 0$), второй интеграл имеет порядок $O(t^{-N})$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $N > 0$. Для первого интеграла аналогичная оценка справедлива при $\sigma > 1$. Если $0 < \sigma \leq 1$, то первый интеграл имеет две точки стационарной



Р и с. 1

фазы v_1, v_2 такие, что $\Omega_1'(v_{1,2}) = \sigma$. Функция $\Omega_1(v)$ нечетная, аналитическая, поэтому $v_2 = -v_1$, $v_1(\sigma) > 0$. Введем вместо v новую переменную интегрирования ζ так, что

$$(3.1) \quad v\sigma - \Omega_1(v) = (1/3)\zeta^3 - B(\sigma)\zeta.$$

Чтобы замена была невырожденной, необходимо $d\zeta(v, \sigma)/dv \neq 0, \pm\infty$ при $v \in R^1$, $0 < \sigma \leq 1$. Но

$$[\zeta^2 - B(\sigma)]d\zeta/dv = \sigma - \Omega_1'(v),$$

поэтому $B(\sigma) = \zeta^2(v_1(\sigma), \sigma)$.

Подставляя последнее равенство в (3.1), находим

$$B(\sigma) = (3/2)^{2/3} [\Omega(v_1(\sigma)) - \sigma v_1(\sigma)]^{2/3}.$$

Ясно, что $B(\sigma) \in C^\infty(0, 1)$ и $B(\sigma)(1 - \sigma)^{-1} \rightarrow 2^{1/3}$ при $\sigma \rightarrow 1 - 0$. После замены переменной интегрирования получаем

$$\eta_0(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\zeta^3/3 - B(\sigma)\zeta)} \frac{F[v(\zeta)] d\zeta}{\zeta_v[v(\zeta)]} + O(t^{-N}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\zeta_v^{-1}[v(\zeta)] = \frac{\zeta^2 - B(\sigma)}{\sigma - \Omega_1'[v(\zeta)]}.$$

Функция $\zeta_v^{-1}[v(\zeta)]$ четная. Поэтому вблизи точек $\zeta = \pm B^{1/2}(\sigma)$, которые дают основной вклад в асимптотику $\eta_0(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, ее можно представить в виде

$$\zeta_v^{-1}[v(\zeta)] = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\sigma) (\zeta^2 - B(\sigma))^j.$$

Тогда

$$\eta_0(x, t) = \frac{1}{2\pi} a_0(\sigma) F(v_1(\sigma)) \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3} \zeta^3 t - B(\sigma) \zeta t\right) d\zeta + \dots$$

$$(a_0(\sigma) = 2^{1/2} B^{1/4}(\sigma) |\Omega''(v_1(\sigma))|^{-1/2}).$$

Окончательно находим

$$(3.2) \quad \eta_0(x, t) = \frac{1}{2t^{1/3}} a_0\left(\frac{x}{t}\right) \text{Ai}\left(-t^{2/3} B\left(\frac{x}{t}\right)\right) + \dots$$

при $t \rightarrow \infty$, $0 < x/t \leq 1$ (Ai(z) — интеграл Эйри). При $x/t = 1$ имеем $B = 0$, $a_0(1) = 2^{1/3}$. В (3.2) в отличие от формулы (1.3), полученной методом стационарной фазы, амплитудная функция $a_0(x/t)$ ограничена при $x/t \in [0, 1]$.

При $\sigma \geq 1$ введем вместо v новую переменную k так, что

$$(1/3)k^3 + D(\sigma)k = v\sigma - \Omega_1(v).$$

Если $D(\sigma) > 0$ при $\sigma > 1$ и $D(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 1 + 0$, то переход от v к k невырожден. Замена переменной интегрирования дает

$$\eta_0(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[v(k)] \frac{k^2 + D(\sigma)}{\sigma - \Omega_1'[v(k)]} e^{-it(k^3/3 + D(\sigma)k)} dk + \dots$$

Здесь фазовая функция имеет точку перевала при $k = \pm iD^{1/2}(\sigma)$. Продолжая подынтегральное выражение на комплексную плоскость $k \in \mathbb{C}$ и разлагая амплитудную функцию в ряд в окрестности точек $k = \pm iD^{1/2}(\sigma)$, получим

$$(3.3) \quad \eta_0(x, t) = \frac{1}{2t^{1/3}} a_0\left(\frac{x}{t}\right) \text{Ai}\left(t^{2/3} D\left(\frac{x}{t}\right)\right) + \dots$$

при $t \rightarrow \infty$, $x/t \geq 1$. Функция $D(\sigma)$ выбирается так, чтобы продолженное на комплексную плоскость выражение $k_v[v(k)]$ было ограниченным и не равным нулю в окрестности полюсов $k = \pm iD^{1/2}(\sigma)$. Отсюда находим

$$D(\sigma) = (3/2)^{2/3} (\sqrt{m \operatorname{tg} m} - \sigma m)^{2/3},$$

где $m = m(\sigma)$ — наименьшее положительное решение уравнения

$$(d/ds) \sqrt{s \operatorname{tg} s}|_{s=m(\sigma)} = \sigma.$$

Имеем

$$a_0(\sigma) = \lim_{k \rightarrow iD^{1/2}(\sigma)} \frac{k^2 + D(\sigma)}{\sigma - \Omega_1'[v(k)]},$$

что дает

$$a_0(\sigma) = 2^{1/2} D^{1/4}(\sigma) |((d^2/ds^2) \sqrt{s \operatorname{tg} s})|_{s=m(\sigma)}^{-1/2}.$$

Формулы (3.2), (3.3) определяют главный член равномерно пригодной асимптотики $\eta_0(x, t)$ при больших временах. При $t \sim \varepsilon^{-1}$ необходимо учитывать неровный характер дна, что осуществляется так же, как в [1] для способа Уизема. При этом для построения формы свободной границы за фронтом головной волны используется система уравнений, совпадающая с (1.5), с той разницей, что вместо $E(\lambda, \alpha)$ следует использовать

$$E_1(\lambda, \alpha) = E(\lambda, \alpha) + (1/6\theta)[qS(qh) - 2\Omega^2(\alpha)].$$

Асимптотика $\eta(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$(3.4) \quad \eta(x, t) = C_0(\lambda, \alpha) \operatorname{ch}(qh) \operatorname{Ai}[-((3/2)\theta)^{2/3}] + \dots$$

Начальные условия для соответствующей системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сохраняются прежними (1.6), за исключением следующих:

$$\theta = \lambda_0 [2\Omega^2(\alpha) - \alpha S(\alpha)],$$

$$C_0 = 3^{1/6} |\Omega(\alpha) - \alpha \Omega'(\alpha)|^{1/6} \operatorname{ch} \alpha F(\alpha) / [2(\lambda_0 \Omega(\alpha))^{1/3} |\Omega''(\alpha)|^{1/2}],$$

что обусловлено необходимостью согласования решения с асимптотикой (3.2) при $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_0 \ll 1$). Чтобы построить форму свободной поверхности перед фронтом головной волны, нужно решить аналогичную систему уравнений [1], в которой гиперболические функции заменены родственными им тригонометрическими:

$$(3.5) \quad \frac{dq}{d\lambda} = \frac{q^2 h'}{\cos^2 qh}, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 2\chi^2(\alpha) - qP(qh), \quad \frac{dx}{d\lambda} = -P(qh), \quad \frac{dC_0}{d\lambda} = -E_2(\lambda, \alpha) C_0,$$

$$\frac{dq_\alpha}{d\lambda} - \frac{q}{\cos^2 qh} [2q_\alpha h' + qh'' x_\alpha + 2qh' \operatorname{tg} qh (q_\alpha h + qh' x_\alpha)],$$

$$\frac{dx_\alpha}{d\lambda} = -P'(qh) (q_\alpha h + qh' x_\alpha), \quad \chi(\alpha) = \sqrt{\alpha \operatorname{tg} \alpha}, \quad P(\xi) = \operatorname{tg} \xi + \frac{\xi}{\cos^2 \xi},$$

$$P_1 = \frac{P(qh)}{4\chi^2(\alpha)} - h \operatorname{tg} qh, \quad E_2 = q_x [P_1 P(qh) - h] - qh' + \frac{q^2 h'}{\cos^2 qh} P_1 +$$

$$+ \frac{1}{6\theta} [qP(qh) - 2\chi^2(\alpha)].$$

К этой системе следует присоединить начальные условия, которые позволяют непрерывно согласовывать решение системы с асимптотикой (3.3):

$$q = \alpha, \quad \theta = \lambda_0 [2\chi^2(\alpha) - \alpha P(\alpha)], \quad x = -\lambda_0 P(\alpha),$$

$$C_0 = \frac{3^{1/6} |\chi(\alpha) - \alpha \chi'(\alpha)|^{1/6}}{2 [\lambda_0 \chi(\alpha)]^{1/3} |\chi''(\alpha)|^{1/2}} F_1(\alpha),$$

$$q_\alpha = 1, \quad x_\alpha = -\lambda P'(\alpha) \quad \left(\lambda = \lambda_0, \quad F_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\alpha x} dx \right).$$

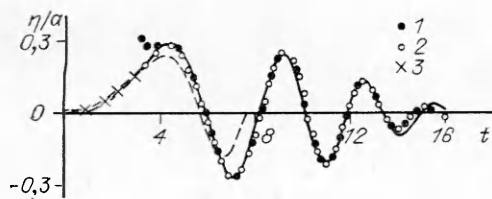
Предполагается, что $f(x)e^{\pi|x|/2}$ — интегрируемая на R^1 функция. После решения системы (3.5) функция $\eta(x, t)$ перед фронтом вычисляется по формуле

$$(3.6) \quad \eta(x, t) = C_0(\lambda, \alpha) \cos qh \operatorname{Ai}[-((3/2)\theta)^{2/3}] + \dots$$

На фронте головной волны главные члены асимптотик (3.4), (3.6) совпадают и равны

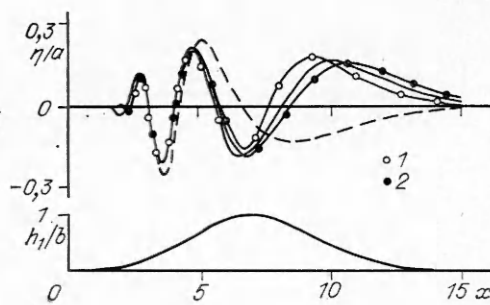
$$(3.7) \quad \eta(x, t) = \frac{F(\xi)}{2^{2/3} h^{1/4}(x)} M^{-1/3}(x) \operatorname{Ai} \left[\left(\frac{2}{M(x)} \right)^{1/3} (N(x) - t) \right] + \dots,$$

$$\text{где } M(x) = \int_0^x h^{1/2}(\xi) d\xi, \quad N(x) = \int_0^x h^{-1/2}(\xi) d\xi.$$



Р и с. 2

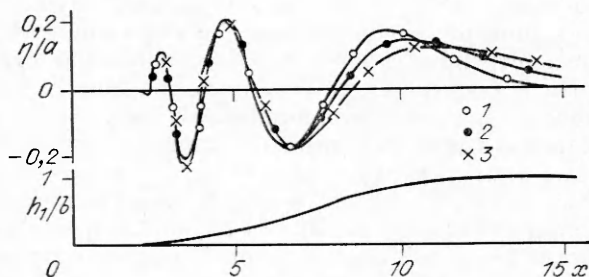
4. Сопоставление различных приближений с точным решением для случая ровного дна представлено на рис. 2 ($x = 3$). Начальное возвышение свободной границы принимается в виде (2.2) при $d = 3$. Сплошная кривая показывает точное решение, полученное в результате численного интегрирования по формуле (1.2), кривые 1—3 построены по формулам (1.3), (3.2), (3.3) соответственно. Видно, что асимптотики (3.2), (3.3) хорошо описывают поведение свободной границы даже при умеренных временах, а (1.3) применима после прохождения точки наблюдения головной волной. Штриховой линией отмечено приближение Уизема (3.7), которое отвечает приближению длинных волн. Сопоставление с точным решением показывает, что на расстояниях от области начального возмущения, сравнимых с глубиной бассейна, приближение длинных волн дает качественно верную картину свободной границы для головной волны и неприменимо после прохождения ею точки наблюдения.



Р и с. 3

Влияние рельефа дна на форму свободной поверхности показано на рис. 3, 4. Используются соотношения (3.4), (3.6), форма дна указана на рисунках. Для локализованной неровности дна, описываемой уравнением $h(x) = 1 - b \exp[-\beta(x - x_0)^2]$ при $\beta = 0,1$, $x_0 = 7$, $b = \pm 0,3$ (кривые 1, 2), форма свободной поверхности в момент времени $t = 12$ указана на рис. 3. Граница фронта в этих двух случаях отвечает $x_f = 11,0; 12,73$. Сплошной линией показано точное решение для ровного дна, штриховой — решение для безграничной жидкости. Влияние неровности дна проявляется в основном в окрестности головной волны. При этом бугор на дне ($b = 0,3$) приводит к замедлению этой волны и некоторому увеличению ее амплитуды. Проходя над впадиной ($b = -0,3$), головная волна ускоряется, а ее амплитуда уменьшается по сравнению со случаем ровного дна. Интересно отметить, что уже второй горб набегающей волны достаточно хорошо описывается решением задачи для ровного дна, даже если он находится непосредственно над препятствием, но не описывается решением соответствующей задачи для безграничной жидкости. Это говорит о том, что влияние неровности дна на форму свободной границы проявляется не непосредственно над препятствием, а сдвинуто в направлении распространения возмущения.

На рис. 4 представлена форма свободной поверхности для профиля дна, описываемого функцией $h(x) = 1 - b[1 + \text{th } \beta(x - x_0)]/2$, в момент времени $t = 12$. Здесь $x_0 = 7$, $\beta = 0,33$, $b = \pm 0,3; -1$ (кривые 1—3), границы фронта $x_f = 11,21; 12,75; 14,46$. Все утверждения, относящиеся к локализованной неровности, справедливы и в случае плавного перехода с одной глубины на другую (см. рис. 4). При этом при выходе головной волны в область большей глубины крутизна волны тем меньше, чем больше перепад глубин.



Р и с. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробкин А. А. Фундаментальное решение задачи Коши — Пуассона для бассейна с неровным дном // ПМТФ.— 1990.— № 2.
2. Протопопов Б. Е., Стурова И. В. Генерация плоских поверхностных волн при наличии малой неровности дна // ПМТФ.— 1989.— № 1.
3. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.

г. Новосибирск

Поступила 22/VI 1988 г.,
в окончательном варианте — 20/1 1989 г.

УДК 532.5

А. В. Воеводин, Г. Г. Судаков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ТЕЛ И КРЫЛЬЕВ

Для равномерно точного описания течения идеальной жидкости около пространственных тел необходимо знать характер его асимптотического поведения в окрестностях особых точек, каковыми являются, например, вершины тел и крыльев. Известно, что в окрестностях острых вершин потенциал течения степенным образом зависит от расстояния до вершины.

В настоящей работе предложен алгоритм решения задач на собственные значения с использованием метода «вихревых рамок» и панельного метода, позволяющий находить собственные значения показателя степени и собственные функции задачи. Приведены примеры применения предложенного метода для задач обтекания треугольной вершины крыла и вершины тела в виде кругового конуса, имеющих точное решение (задачи сводятся к решению обыкновенного дифференциального уравнения). Дано сравнение результатов расчетов с точными решениями.

1. Рассмотрим задачу о безвихревом обтекании идеальной жидкостью вершины тела или угловой точки крыла с полууглом при вершине θ . Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с осью x , направленной вдоль линии симметрии тела (крыла), осью z , лежащей в плоскости крыла (в случае конуса — произвольно, перпендикулярно оси x), и осью y , перпендикулярной осям x и z . Потенциал исследуемого течения должен удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа с граничным условием непротекания на поверхности тела (крыла). В силу граничных условий задача автомодельная, и, следуя [1—3], отыщем ее решение в виде

$$(1.1) \quad \Phi = Cx^n \varphi(y/x, z/x, \theta)$$

(φ — безразмерная функция, подлежащая определению, C — размерная постоянная, которая находится только из условия сращивания с решением внешней задачи об обтекании тела (крыла) конечных размеров).

Так как зависимость от продольной координаты дается формулой (1.1), условие непротекания достаточно поставить лишь в одном произвольном поперечном сечении тела (крыла). В [1—3] задача Неймана для уравнения Лапласа в случае угловой точки крыла решалась методом разделения переменных в сферической системе координат. Как показано в [4, 5], исследуемая задача сводится к решению линейного сингулярного интегрального уравнения. В данном случае в силу граничных условий это уравнение однородное, C в выражении (1.1) выпадает из дальнейшего рассмотрения, а нетривиальные решения существуют лишь при некоторых n (задача на собственные значения). Отметим, что искомое автомодельное решение является также асимптотикой решений более широких классов невырожденных неавтомодельных задач об обтекании тел конечных размеров [6].

Для численного решения интегрального уравнения использовался метод «вихревых рамок» (в случае угловой точки крыла) или панельный метод (в случае вершины тела), которые приводят к линейной однородной