

УДК 539:374:629.7

УСТОЙЧИВОСТЬ, ТРАЕКТОРИИ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПРОНИКАНИИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

И. В. Симонов, К. Ю. Осипенко

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

Исследуется глубокое проникание в малопрочную среду тонкого тела с затуплением носовой и тыльной частей. На основе физической модели отрывного несимметричного обтекания тела и метода локального взаимодействия движение тела описывается системой автономных дифференциально-интегральных уравнений. Проведен аналитический расчет границы устойчивости прямолинейного движения в смысле Ляпунова для тел с параболическим меридианом. Зависимость устойчивости движения тела от различных параметров изучается численно. Построены траектории криволинейного движения в области неустойчивости и подтверждена классификация траекторий, предложенная ранее при изучении движения заостренных тел. Показана возможность обратного выброса при входе затупленного ударника в полубесконечную мишень. Установлена принципиальная возможность реализации траектории, близкой к заданной, а также слабая зависимость характеристик движения с развитым отрывом от угла отрыва. Приведены примеры расчета эволюции боковой нагрузки, перерезывающей силы и момента, а также запаса прочности тела по теории динамического изгиба неоднородного стержня.

Ключевые слова: проникание, ударник, упругопластическая среда, траектории движения, отрыв потока, устойчивость.

Введение. Ранее аналитически изучалось прямое проникание тел вращения [1–3] с учетом кавитации и численно — неоднородные движения [4]. Предложены технологии, основанные на явлении глубокого проникания: научные станции для изучения внеземных объектов [5, 6], управляемое воздействие на вулканическую и сейсмическую деятельность [7]. В связи с этим расчет процесса проникания, оптимизация формы тела и анализ устойчивости его движения становятся принципиально важными.

В гидродинамике отрыв потока и устойчивость движения относятся к числу фундаментальных проблем. Из-за сложной природы сил взаимодействия и кавитационного характера обтекания даже при малых скоростях исследование неоднородных движений тел в прочных средах является нетривиальным и решение таких задач в точной постановке в настоящее время невозможно [1]. Численные методы решения задач в точной постановке эффективны при изучении начальной стадии удара и погружения, но из-за большого числа параметров и определяющих функций результаты имеют имитационный характер и малоприспособны для выявления общих закономерностей. Кроме того, из-за низкой точности измерений и нестабильности динамических свойств материалов, особенно геологических сред, требования к точности моделирования могут быть понижены. Поэтому оправданы приближенные подходы, основанные на феноменологическом описании взаимодействия среды и тела при соответствующей “калибровке” модели.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00259).

В данной работе рассмотрена физическая модель отрывного обтекания тела средой, основанная на анализе локального взаимодействия [8] (в математике — методе изолированного элемента). Явное задание коэффициентов как функций параметров среды на базе асимптотически точных решений [9, 10] и результатов экспериментов [11, 12] позволило оценить коэффициенты, провести асимптотический анализ и максимально упростить систему автономных дифференциально-интегральных уравнений движения тела, разрешенных относительно производных, для которой ставится задача Коши. Для тел параболической формы проведен аналитический расчет границы устойчивости прямолинейного движения в смысле Ляпунова (в общем виде эта задача решена в [13]). Численно изучается зависимость устойчивости движения тела от величин начальных отклонений от условий нормального входа, “замороженной” осевой скорости, формы тела, угла отрыва (параметра, входящего в эмпирический критерий отрыва) и положения центра масс тела при сопоставлении с критериями устойчивости в малом. Построены траектории криволинейного движения в области неустойчивости с учетом торможения и подтверждена классификация траекторий, предложенная в [14] при изучении движения заостренных тел. Показана возможность обратного выброса при входе затупленного ударника в полубесконечную мишень, ранее обнаруженного в неопубликованных экспериментах Ю. К. Бивина.

Гипотеза отрыва основана на наблюдениях движений тел в малопрочных средах: идеальный отрыв происходит в миделевом сечении при малых скоростях; с ростом скорости, а также при наличии начальных напряжений вводится эмпирический угол отрыва. Интервал исследуемых скоростей определяется одним порядком вкладов гидродинамического и прочностного сопротивления. В этом случае имеет место глубокое (значительно превышающее длину тела) проникание высокопрочного массивного тонкого ударника.

1. Физическое описание и гипотезы. Удлиненное затупленное тело вращения движется по инерции в безграничной изотропной и однородной упругопластической среде. В качестве масштаба длины в продольном и поперечном направлениях принимаются длина тела L и его максимальный радиус r_{\max} соответственно. Безразмерное уравнение меридиана запишем в цилиндрической системе координат (R, φ, l) : $R = R(l) = r/r_{\max}$, жестко связанной с телом и с местной прямоугольной системой координат: $x = l_c - l$, $y = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$ (l — расстояние от носика тела; $R_0 \leq R \leq 1$; $0 \leq l \leq 1$; R_0 — радиус затупления; $l = l_c$, $R = 0$ — координаты центра масс). Условия тонкого тела

$$\varepsilon = r_{\max}/L \ll 1, \quad \varepsilon\beta \ll 1, \quad \beta = R' = dR/dl, \quad l_n < l < 1 \quad (1)$$

выполняются везде, за исключением малой окрестности носовой части при $0 \leq l \leq l_n \ll 1$, которая в расчетах не учитывается.

В начальный момент времени $t = 0$ заданы вектор скорости \mathbf{v}_0 центра масс тела и угловая скорость вращения Ω_0 относительно этого центра. Полагаем, что вращение начинается в плоскости, образованной вектором скорости \mathbf{v}_0 и осью тела (рыскание и другие вращения отсутствуют). Тогда траектории движения точек тела будут плоскими, если его динамические свойства обладают осевой симметрией.

Обозначим $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $\Omega = (0, 0, \Omega)$, $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \Omega \times (x, y, z)$, $V_n = \mathbf{nV} = \varepsilon \delta v_x$ векторы текущих переносной, угловой, полной и нормальной к поверхности тела скоростей (\mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности)

$$\delta = \beta - a \cos \varphi, \quad a = -\omega x - \eta, \quad \omega = \Omega L / (\varepsilon v_x), \quad \eta = v_y / (\varepsilon v_x). \quad (2)$$

Безразмерные угловая скорость ω и угол атаки η нормированы так, что в строящейся асимптотически точной модели могут принимать значения $O(1)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Массу тела m выразим через безразмерную длину эквивалентного по массе и миделеву сечению цилиндра l_e и среднюю плотность тела ρ_1 : $m = \pi r_{\max}^2 L l_e \rho_1$. Несжимаемую среду будем характеризовать плотностью ρ_0 , модулем сдвига μ и динамическим пределом

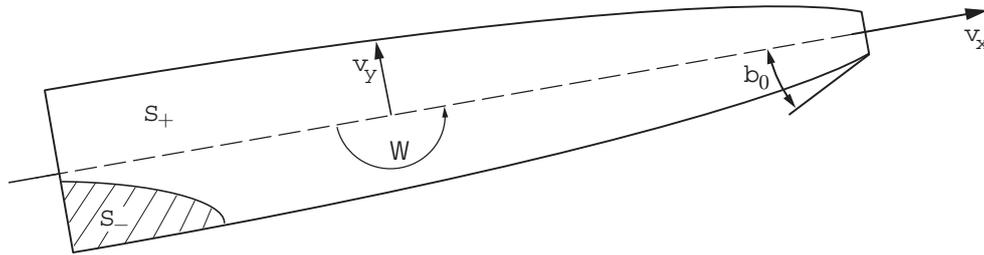


Рис. 1. Схема обтекания затупленного тела уругопластической средой

текучести Мизеса τ_d . Для пластически сжимаемых (пористых) сред можно считать, что среда становится сплошной на значительном расстоянии от тела с плотностью ρ_0 в этом состоянии.

Согласно результатам [9, 10] около контура образуется пластическая зона “большого” характерного размера $\sqrt{\mu/\tau_d} R(l)$. Вблизи контура наблюдаются интенсивное сдвиговое течение и отрыв потока. При малых скоростях наблюдаются вязкие пристенные эффекты. При умеренных (более 1 м/с для влажных глинистых сред) и высоких скоростях материал скользит вдоль стенок ударника, и результаты теории и эксперимента согласуются при выборе закона пластического трения [11, 12]. Согласно модели [13] отрыв возникает, когда угол наклона элемента поверхности тела к вектору скорости потока на бесконечности достигает критического значения [12]

$$\delta^* \equiv \delta - \beta_*(\sigma_{ij}^0, V) = 0. \quad (3)$$

При дозвуковых скоростях, пока инерционное движение среды несущественно, отрыв идеальный и происходит вблизи задней границы тела в миделевом сечении ($\beta_* = 0$). С увеличением скорости угол отрыва увеличивается и уменьшается с ростом начальных сжимающих напряжений σ_{ij}^0 в среде. В [15] предложена простая методика определения β_* в эксперименте.

Будем различать зону смачивания S_+ ($\delta^* > 0$) и зону отрыва S_- ($\delta^* < 0$), где напряжения равны нулю; $S = S_+ + S_-$ — полная поверхность тела (рис. 1). Ограничимся изучением режимов без присоединения струй. Влиянием начальных напряжений и присоединенной массы на результирующие силы будем пренебрегать [11, 12].

Разобьем поверхность S на элементы, которые аппроксимируем поверхностью одной из канонических форм (сфера, конус, цилиндр). Вектор контактных напряжений Σ на смоченном элементе поверхности тела определим согласно модели локального взаимодействия [8] (подтвержденной теоретически [9] и экспериментально [11, 12]) суммой вкладов гидродинамического и прочностного слагаемых:

$$S_+: \quad \Sigma = \tau_S \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n}, \quad \sigma_n = C_x \rho_0 V^2 / 2 + b \tau_d, \quad S_-: \quad \Sigma = 0.$$

Здесь $\tau_S = \text{const} \leq \tau_d$ — закон пластического трения; \mathbf{n}_τ — единичный вектор в направлении скольжения (в рассматриваемом приближении $\mathbf{n}_\tau = (-1, 0, 0)$); $\sigma_n > 0$ — контактное давление. Коэффициенты C_x и b можно варьировать, задавая их из экспериментов или из решений модельных задач обтекания. Так, на пологих участках боковой поверхности S_f , где $\delta \ll 1$, примем [9]

$$C_x(S_f) = C_f \delta^2 \varepsilon^2, \quad C_f = \ln(\mu/\tau_d) + 2,55, \quad b = b_f = \ln(4\mu/\tau_d) - 1.$$

Квадратичный закон справедлив до значений $C_x \leq 0,2$, а формулы для C_f , b_f получены из решения задачи о тонком конусе при условии $\varepsilon \delta \ll (\tau_d/\mu)^{1/2}$ ($\varepsilon \delta < 10^{-2}$). В области $\varepsilon \delta \sim 10^{-1}$ можно принять согласованное с экспериментами [12] значение $C_f = 2,9$. Как

следствие приближенности модели физическое условие отрыва $\sigma_n = 0$ оказывается нарушенным, так как под σ_n здесь понимается среднее значение на элементе поверхности.

Лобовая поверхность S_\perp при $0 \leq l \leq l_n$ и небольших возмущениях полностью смочена, и на ней как на едином элементе $C_x = C_\perp$, $b = b_\perp$. Для конусов с полууглами раствора $15 \div 90^\circ$ коэффициент $C_x = 0,18 \div 0,82$ (дозвуковые скорости) близок к его гидродинамическому значению [12], а значение b слабо зависит от формы (изменяется лишь на 8 %) и составляет приблизительно $2/3$ значения b , рассчитанного по формуле для максимального нормального напряжения в точке торможения упругопластического потока, обтекающего шар [10] (точная формула для случая шара и цилиндра приведена в [15]). Типичные значения $\mu/\tau_d = 10^2 \div 10^3$, поэтому $b_f = 5 \div 8$, $b_\perp = 16 \div 24$ при $\delta > 0,1$. Для случая сверхзвукового проникания в пористую среду давление на конусе найдено в [16].

Предел текучести τ_d как параметр процесса в 1,5–2 раза больше его статического значения [11, 12] и перестает зависеть от скорости нагружения при скоростях выше 1 м/с для ряда геологических сред. Причинами различия τ_d и τ_S могут быть разогрев среды около контура из-за трения или принудительного нагревания тела вплоть до плавления (испарения).

В модели фактически остался неопределенным только один параметр — угол отрыва β_* ; его влияние будем изучать параметрически. Кроме того, поскольку ряд допущений не имеет достаточного обоснования, рекомендуется уточнение значений C_f , b_f , τ_d , τ_S на основе контрольных экспериментов.

2. Математическая постановка задачи. Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{c^2}{v_x^2}, & \xi &= \int \frac{v_x dt}{L}, & c^2 &= \frac{2b_f \tau_d}{\varepsilon^2 \rho_0 C_f}, \\ D &= \frac{\rho C_f}{2\pi l_e}, & \rho &= \frac{\rho_0}{\rho_1}, & j_0 &= \frac{mL^2}{J}, & \tau &= \frac{\tau_S}{\varepsilon b_f \tau_d}, & A_1 &= \pi R_0^2 \frac{DC_\perp}{\varepsilon^2 C_f}, & A_2 &= \pi DR_0^2 \frac{b_\perp}{b_f} \end{aligned} \quad (4)$$

(J — главный момент инерции поперечного вращения).

Для функций \varkappa , η , ω , определенных в (2), (4), система уравнений движения тела приводится к автономной системе дифференциально-интегральных уравнений, разрешенной относительно обыкновенных производных, и для нее ставится задача Коши

$$\begin{aligned} \varkappa' &= 2\varkappa\varepsilon^2(A_1 + A_2\varkappa + f_\varkappa - \omega\eta), & \eta' &= f_\eta - \omega, & \omega' &= j_0 f_\omega, \\ \mathbf{\varkappa} &= (\varkappa, \eta, \omega) = \mathbf{\varkappa}_0, & \xi &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{f} = (f_\varkappa, f_\eta, f_\omega) = D \int_{S_+} (\tau\varkappa + \beta\sigma, -\sigma \cos \varphi, -\sigma x \cos \varphi) R dl d\varphi,$$

$$f_\varkappa = D \int_0^1 \Theta R dl, \quad (f_\eta, f_\omega) = D \int_0^1 (1, l_c - l) \Phi R dl,$$

$$\Theta = \varphi_0 \Theta_1 + \Theta_2, \quad \Phi = 2a\beta\varphi_0 + \Psi \operatorname{sgn} a, \quad 0 < l < 1,$$

$$\Theta_1 = 2(\varkappa\tau + \varkappa\beta + \beta^3) + \beta a^2, \quad \Theta_2 = \beta|a|(4\beta - \beta^*)\sqrt{1 - q^2}H(1 - q)^2, \quad (6)$$

$$\Psi = [2\varkappa + \beta^2 + a^2(2 + q^2)/3 - \beta\beta^*]\sqrt{1 - q^2}H(1 - q)^2, \quad q = \beta^*/a,$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} \pi, & q \operatorname{sgn} a \geq 1, \\ 0, & q \operatorname{sgn} a \leq -1, \end{cases} \quad \varphi^* = \begin{cases} \pi - \varphi^*, & a > 0, |q| < 1, \\ \varphi^*, & a < 0, |q| < 1, \end{cases}$$

$$\sigma = \varkappa + \delta^2, \quad \beta^* = \beta - \beta_*, \quad \varphi^* = \arccos q,$$

где H — ступенчатая функция; штрих означает производную по ξ . В выражениях для равнодействующих (6), где отброшены величины $O(\varepsilon^2)$, при условиях (1) удается провести интегрирование по углу φ , так что остаются только одинарные интегралы. Тем не менее правые части уравнений (5) нелинейны.

Решения уравнения (3) $\varphi^* = \arccos(\beta^*/a)$ определяют симметричные относительно меридианов $\varphi = 0, \pi$ границы зон отрыва с экстремумами на этих меридианах. Формулы для обобщенных распределенных нагрузок Θ и Φ описывают все случаи обтекания произвольной параллели: безотрывное обтекание ($\varphi_0 = \pi$), полный ($\varphi_0 = 0$) или частичный ($\varphi_0 \neq 0, \pi$) отрыв.

Неизвестные функции \varkappa, η, ω зависят от формы тела и восьми безразмерных параметров. Величину \varkappa можно охарактеризовать как отношение прочностного сопротивления к скоростному напору. При движении тела она изменяется в пределах $\varkappa_0 < \varkappa < \infty$, при этом решение задачи (5) асимптотически описывает почти все этапы замедленного движения тела. При $\varkappa \ll 1$ преобладает инерция. Этим значениям \varkappa соответствует область значительных сверхзвуковых скоростей, где модель взаимодействия (6) становится непригодной, а проникание сопровождается разрушением самого тонкого тела. При $\varkappa \gg 1$ можно пренебречь влиянием инерции при вычислении равнодействующих. Поэтому считаем $\varkappa_0 = O(1)$. Порядок величины \varkappa определяется не только скоростью, но и прочностью среды, при этом можно получить значение $\varkappa_0 = O(1)$ и при достаточно малых скоростях движения. Для грунта средней динамической прочности ($\tau_d = 5 \cdot 10^6$ Па) значению $\varkappa \approx 1$ соответствует скорость конического (15°) ударника $V \approx 700$ м/с.

Задача Коши (5), (6) решалась численно методом Рунге — Кутты. Интегралы вычислялись методом трапеций с учетом сложного аналитического поведения подинтегральных функций (разрывы, области типа пограничного слоя). Ограничимся заданием меридиана тела в виде сегмента параболы

$$\begin{aligned} R(l) &= R_0 + (1 - R_0)[\beta_0 l - (\beta_0 - 1)l^2], \\ \beta(l) &= (1 - R_0)[\beta_0 - 2(\beta_0 - 1)l], \quad 0 < l < 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Тело имеет дискообразное затупление радиуса R_0 с углом при вершине $\beta_0(1 - R_0)$. Зафиксируем значения $\varepsilon = 0,065$, $C_\perp = 0,82$ и будем варьировать параметры $\varkappa_0, \beta_0, \beta_*, D, \tau, j, l_c$.

Для исследования устойчивости прямолинейного движения тела проведена серия вычислений при “замороженной” осевой скорости $\varkappa = \text{const}$. Математически “замораживание” оправданно разным асимптотическим порядком правых частей уравнений (5): $O(\varepsilon^2)$ в уравнении для \varkappa и $O(1)$ в остальных уравнениях, что означает для тонкого тела преобладание бокового сопротивления над осевым. В действительности такое движение возможно при приложении внешней компенсирующей следящей силы.

Учитывался вход в полупространство без всплеска, что оказывает влияние на положение точек бифуркации решения при конечных возмущениях.

3. Размер зоны отрыва и критерий отрыва в малом. Рассмотрим тела с отрывом, локализованным вблизи тыльной точки $l = 1$, при $\beta_* = \beta_1 = \beta(1)$. Максимальную длину Δ зоны отрыва на меридианах $\varphi = 0$ (знак “+”) или $\varphi = \pi$ (знак “-”) для формы тела (7) определим из уравнения (3):

$$\Delta = \frac{(b_0 - 2)(1 - R_0) + \beta_* \pm (1 - l_c)\omega \mp \eta}{2(b_0 - 1)(1 - R_0) \pm \omega}, \quad |\omega| < 2$$

при условии $0 \leq \Delta \leq 1$. Если оба корня находятся вне указанного промежутка, то путем исследования неравенства $\delta^* < 0$ на наличие зоны отрыва определяется, $\Delta = 0$ или $\Delta = 1$. При $\beta_* \leq \beta_1$ и малых возмущениях зона отрыва локализована вблизи границы отрыва при симметричном обтекании $l = l_*: \beta(l_*) = \beta_*$.

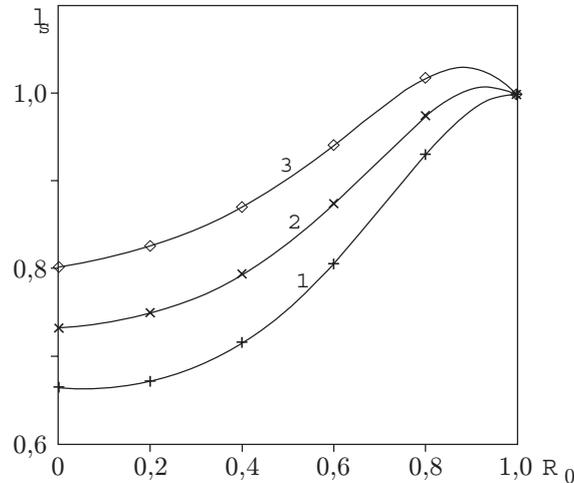


Рис. 2. Зависимость критических значений положения центра масс от радиуса затупления при $\varkappa = 2$:

1 — $D_0 = 0,01$; 2 — $D_0 = 0,2$; 3 — $D_0 = 0,5$

Критическое значение положения центра масс l_s находится из анализа устойчивости в малом [1] с учетом малых несимметричных зон отрыва вблизи некоторой параллели $l = l_*$:

$$l_s = \frac{A_0 A_2 - A_1^2 + \zeta A_1}{\zeta A_0}, \quad A_m = p_m + l_{*,m} \psi, \quad \zeta = \frac{2l_e(R_0)}{\rho C_f} = \frac{1}{\pi D},$$

$$D = D_0 \frac{l_e(0)}{l_e(R_0)}, \quad \psi = \frac{\varkappa + \beta_*^2}{e_0 |\beta'(l_*)|} R(l_*), \quad e_0 = \begin{cases} 2, & \beta_* = \beta_1, l_* = 1, \\ 1, & \beta_* < \beta_1, l_* < 1, \end{cases}$$

$$p_m = 2 \int_0^{l_*} l_m R(l) dR(l), \quad m = 0, 1, 2, \quad (8)$$

$$l_e = \int_0^1 R^2(l) dl = R_0^2 + 2R_0(1 - R_0) \left(\frac{b_0}{2} - \frac{b_2}{3} \right) + (1 - R_0)^2 \left(\frac{b_0^2}{3} - \frac{b_0 b_2}{2} + \frac{b_2^2}{5} \right).$$

При $\varepsilon_0 = 1 - R_0 \rightarrow 0$ справедлива асимптотика $l_s \rightarrow 1 + \varepsilon_0/\zeta(1) + O(\varepsilon_0^2)$: значения $l_s > 1$ слева в окрестности точки $R_0 = 1$. Это согласуется с утверждением об абсолютной устойчивости цилиндра и вообще тел, асимптотически близких к цилиндру, вблизи тыльной точки ($\beta'(1) = \beta''(1) = 0$) [13, 15]. Деградация метода Ляпунова объясняется тем, что для образования малых зон отрыва вблизи тыльных точек такого тела при $R_0 \rightarrow 1$ требуются предельно малые возмущения η, ω , а при $R_0 = 1$ сколь угодно малые возмущения приводят к появлению несимметричных пятен отрыва конечной площади.

Расчеты по формуле (8) показали, что ход кривых $l_s = l_s(R_0)$ немонотонный: при $R_0 > 0,85$ имеется максимум, после которого кривые выходят на указанную выше асимптотику (рис. 2). Следует отметить, что значениям $D_0 = 0,11; 0,26; 0,44$ соответствует проникание ударников из вольфрамового сплава, стали и титана в глинистую среду ($\rho_0 = 1,65$ г/см³). Расчеты показывают, что чем больше D_0 (легче тело), тем больше запас устойчивости (рис. 2).

Можно доказать утверждение, что для тел с возрастающей зависимостью $R(l)$ запас устойчивости растет с увеличением относительной плотности ρ как при сплошном, так и при отрывном обтекании.

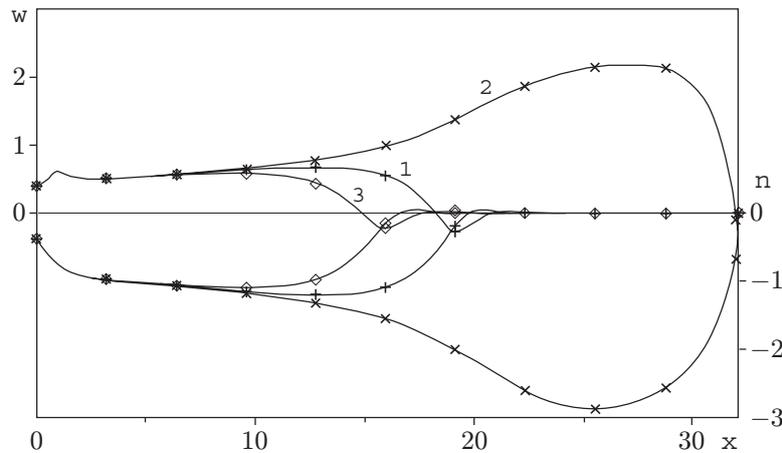


Рис. 3. Эффект вычислительной неустойчивости решения вблизи точки бифуркации $l_c = l_i$ ($l_c = 0,58795$; $\alpha_0 = 1$; $\omega_0 = -\eta_0 = 0,4$; $R_0 = 0,4$; $D_0 = 0,115$; $\tau = 1,1$):
1 — $N_l = 400$; 2 — $N_l = 800$; 3 — $N_l = 1600$

4. Устойчивость в большом. Как и в случае заостренных тел [14], в численном эксперименте наблюдается бифуркация решения на некоторой поверхности

$$l_i = l_i(\alpha_0, b_0, \dots), \quad l_a(\alpha, b_0, \dots) \leq l_i \leq l_s(\alpha, b_0, \dots)$$

в фазовом пространстве параметров: возмущения затухают при $l_c < l_i$ и растут при $l_c > l_i$ (экспоненциально, если они малы). При $l_c < l_a$ (l_a — абсолютное критическое значение) возмущения затухают, а при $l_c > l_s$ растут при любых начальных условиях. Значение l_i при уменьшении возмущений стремится снизу к пределу l_s согласно критерию устойчивости в малом (8). При изменении R_0 на отрезке $0 \div 0,7$ с шагом $0,1$ и фиксированных значениях $D_0 = 0,115$, $b_0 = 2$, $\beta_* = 0$, $j = 5,5$ $l_i = 0,61256$; $0,59913$; $0,58789$; $0,57802$; $0,56789$; $0,55513$; $0,53742$; $0,52693$ соответственно.

Из-за слабой сходимости решения к пределу в окрестности точек бифуркации требовался контроль точности вычислений и расчет до значения $\xi \approx 2000$ для определения этих точек методом последовательных приближений. При $R_0 \geq 0,7$ найти значение l_a не удавалось из-за слабого затухания (роста) решения при $\xi \rightarrow \infty$ в окрестности искомой точки. Ниже указаны некоторые промежуточные критические значения l_i для заостренного тела в зависимости от начальных условий:

$$l_i = 0,61256 \quad \text{при} \quad \gamma_0 = (-0,5; 0,5), \quad l_i = 0,66955 \quad \text{при} \quad \gamma_0 = (-0,1; 0,1), \\ l_i = 0,69335 \quad \text{при} \quad \gamma_0 = (-0,01; 0,01) \quad (\gamma_0 = (\eta_0, \omega_0)).$$

Интервал бифуркации решения $l_s - l_a$ увеличивается при наличии затупления, например: $l_s - l_a \approx 0,092$ при $R_0 = 0$, $l_s - l_a \approx 0,235$ при $R_0 = 0,5$. Если точка l_c расположена справа от критической точки l_i хотя бы на малом расстоянии (развита неустойчивость), то достаточно быстро наступает стабилизация: $\gamma, \Delta \rightarrow \gamma_*, \Delta_*$. Предельным циклом всегда является постоянное движение по окружности асимптотически большого радиуса $R_* = 1/(\varepsilon^2 \omega_*)$, как и в случае заостренных тел. При увеличении l_c амплитуды γ_* растут, а зона отрыва почти сразу распространяется на всю длину тела избранной формы.

В расчетах обнаружен интересный эффект неустойчивости решения при значениях l_c , близких (справа) к l_i : возмущением при этом оказалась дискретность вычислений, хотя они проводились с очень высокой точностью. В качестве примера рассмотрим результаты расчета с учетом торможения, представленные на рис. 3. Видно, что кривые зависимости $\omega(\xi)$, полученные методом трапеций при разном количестве точек разбиения N_l отрезка интегрирования $0 \leq l \leq 1$, существенно различаются. Количество точек разбиения

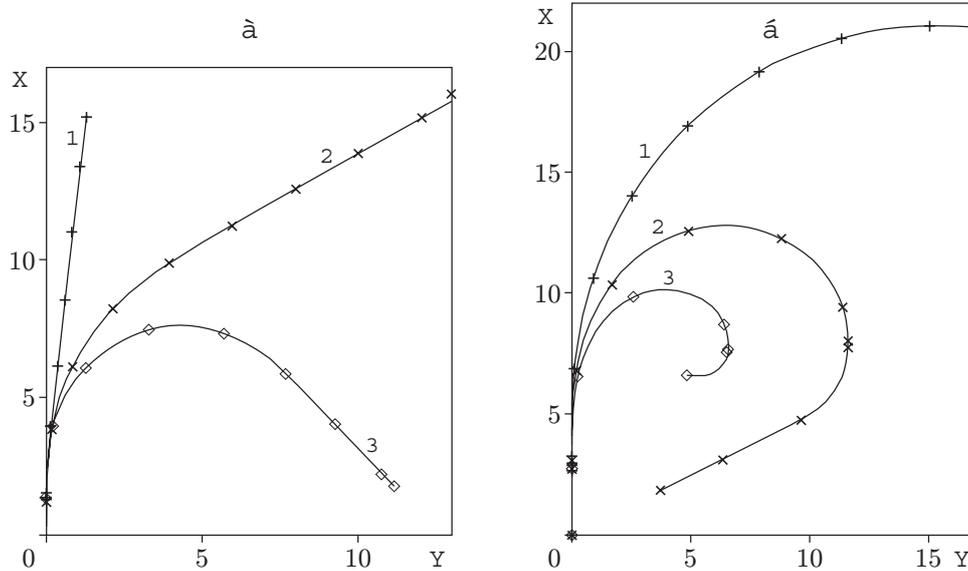


Рис. 4. Траектории легкого (*a*) и массивного (*б*) ударника при $R_0 = 0,4$; $\beta_0 = 2$; $\beta_* = 0$; $\alpha_0 = 1$; $\omega_0 = -\eta_0 = 0,4$; $\tau = 0,5$:
a — $D_0 = 0,3$ (1 — $l_c = 0,58$; 2 — $l_c = 0,62$; 3 — $l_c = 0,66$); *б* — $D_0 = 0,06$ (1 — $l_c = 0,55$; 2 — $l_c = 0,59$; 3 — $l_c = 0,63$)

на единице длины траектории в процессе интегрирования методом Рунге — Кутты было фиксированным: $n_\varepsilon = 15$. Кривая 1 на рис. 3 соответствует значению $N_l = 400$. По мере увеличения N_l кривые смещаются от нее в разные стороны, что свидетельствует о проявлении вычислительной неустойчивости, а не о недостаточной точности расчетов. Следует отметить, что при небольшом изменении параметров ($l_c = 0,59$ или $\tau = 1,3$) наступает стабилизация: все три кривые совпадают.

5. Влияние определяющих параметров на траектории движения с торможением. В процессе решения задачи (5), (6) при $\alpha \neq \text{const}$ находились координаты центра масс тела X, Y , начиная со входа в полупространство $X > 0$, и траектории $X = X(Y)$. Анализ результатов показал, что пластическое трение τ существенно влияет на длину траектории и, как указано выше, способствует подавлению неустойчивости. При изменении положения центра масс l_c , рассматриваемого в данном пункте как свободный параметр, не связанный с формой тела и другими параметрами, качественно меняется траектория движения (причем несколько раз). От величины D , которая определяется главным образом отношением плотностей, при очень высоких скоростях прямо пропорционально зависит длина траектории, а также ее кривизна. На рис. 4, *a* показаны кривые, форма которых близка к некоторым траекториям заостренных, более массивных ($D_0 = 0,115$) ударников [14]. Прямолинейная траектория (кривая 1) соответствует устойчивому движению, две другие траектории (кривые 2, 3) имеют начальный, близкий к дуге окружности участок, сменяющийся участком прямолинейного движения, что согласуется с теоретическим выводом об увеличении запаса устойчивости при уменьшении скорости. Если скорость увеличивается в два раза, то прямолинейные участки исчезают, траектории принимают форму, близкую к дугам окружности, что согласуется с результатами анализа при “замороженной” осевой скорости.

При сохранении отрыва вблизи тыльных точек тела другой формы при ненулевом угле отрыва ($\beta_0 = 1,5$, $\beta_* = b(1) = 0,3$) и $R_0 = 0,4$, $D_0 = 0,06$, $l_c = 0,52$; $0,55$; $0,58$ форма траекторий близка к форме кривых, представленных на рис. 4, *a*.

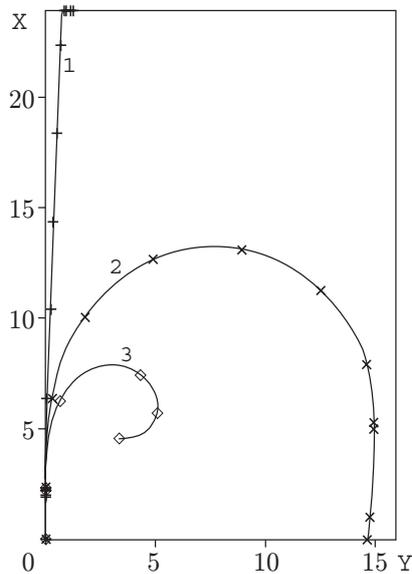


Рис. 5. Траектории тела умеренной плотности ($D_0 = 0,115$) при $R_0 = 0,2$; $\beta_0 = 2$; $\beta_* = 0$; $\alpha_0 = 1$; $\omega_0 = -\eta_0 = 0,4$; $\tau = 1$:
 1 — $l_c = 0,52$; 2 — $l_c = 0,6$; 3 — $l_c = 0,68$

В случае очень массивного ударника ($D_0 = 0,06$), например из вольфрамового сплава, проникающего в вулканическую породу малой плотности (пемзу), помимо удлинения пути при устойчивом движении наблюдаются новые нелинейные эффекты: слабоискривленное движение заканчивается резким разворотом тела из-за больших углов атаки (рис. 4, б). Это связано с появлением вторичного максимума угловой скорости вращения ω на кривой зависимости $\omega(\xi)$. Описанный эффект не наблюдался в случае заостренных тел [14] и может быть объяснен существенным расширением зоны бифуркации $l_s - l_a$ для затупленных тел и изменением характера зависимости параметров траектории γ_* , Δ_* от осевой скорости.

В случае $R_0 = 0,2$, $D_0 = 0,115$ (рис. 5) эффект удлинения пути вследствие уменьшения лобового сопротивления более значителен, чем эффект торможения, обусловленный пластическим трением. При увеличении начальной скорости в два раза ($\alpha_0 = 0,25$) (рис. 6, а) и при увеличении значений l_c (рис. 6, б) кривизна траекторий увеличивается, что обусловлено увеличением “запаса неустойчивости” $l_c - l_i$ (с ростом скорости проникания значения l_i , как правило, уменьшаются). Увеличение “запаса” только за счет изменения l_c (рис. 6, б), в отличие от случая роста скорости входа, приводит к резкому уменьшению длины пути из-за быстрого нарастания возмущений.

Форма кривых на рис. 4, а не меняется, если угол отрыва не равен нулю ($\beta_* = 0,5$) и центр масс немного смещен к носу тела ($l_c = 0,55; 0,6; 0,65$). В этом случае $l = 7/12$, что соответствует положению точки отрыва при симметричном обтекании. При изменении угла отрыва до значения $\beta_* = 0,8$ по сравнению с $\beta_* = 0$ на рис. 5, так же как при увеличении скорости входа в два раза, траектории почти идентичны кривым на рис. 6, а. Все это свидетельствует о том, что вариация параметра отрыва (а значит, и выбор модели отрыва) практически не влияет на основные качественные закономерности движения, при этом остается неизменной классификация траекторий.

6. Затупленный конус. Конус ($\beta_0 = 1$, $\beta_* = 0$) и цилиндр, а также их комбинации с элементами криволинейного меридиана являются вырожденными формами тела по отношению к отрыву: в соответствии с предложенной моделью конечные пятна отрыва появляются мгновенно. В окрестности $-l_c < \pm\omega^{-1}(1 \pm \eta) < 1 - l_c$ конус сначала движется в режиме сплошного обтекания, а затем его движение определяется критическим значением положения центра масс l_g [13].

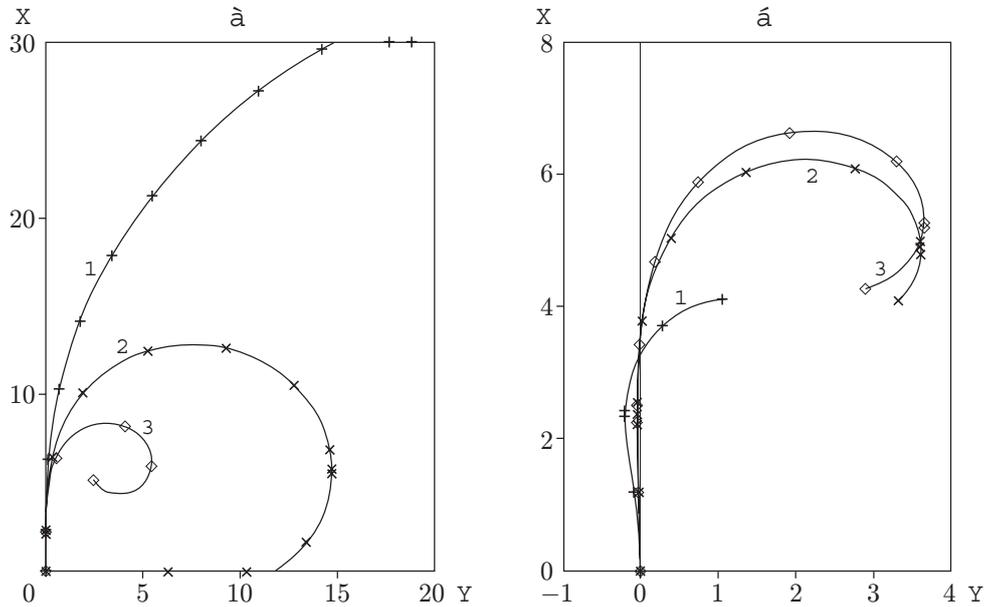


Рис. 6. Изменение траекторий ударника при увеличении начальной скорости (а) и запаса неустойчивости (б):
 а — 1 — $l_c = 0,52$; 2 — $l_c = 0,6$; 3 — $l_c = 0,68$; б — 1 — $l_c = 0,69$; 2 — $l_c = 0,71$; 3 — $l_c = 0,73$

Рассчитанные траектории конуса при $R_0 = 0,4$, $\beta_0 = 1$; $b_* = 0$, $D_0 = 0,3; 0,06$, $\alpha_0 = 1; -0,4; 0,4$ и значениях $l_c = 0,58; 0,61; 0,64; 0,70; 0,74; 0,78$ качественно соответствуют приведенным на рис. 4,б и рис. 6,б. Отличие состоит в том, что в этом случае значения угла атаки и скорости вращения перед полной остановкой больше. Отсутствуют также прямолинейные участки траекторий в области неустойчивости: кривизна траекторий увеличивается, и они становятся более короткими, чем в случае параболической формы тела.

Заметим, что для однородного по плотности конуса $l_g = 0,6345$, и если он достаточно массивен, то его движение неустойчиво. Конус часто используется в опытах по пенетрации, поэтому при сопоставлении проникания осесимметричных и трехмерных конфигураций необходимо выполнение условия равенства критериев устойчивости.

7. Расчет силовых характеристик динамического изгиба. Рассмотрим задачу об изгибе тонкого неоднородного по длине упругого стержня под действием боковой квазистатической нагрузки в результате взаимодействия со средой в процессе высокоскоростного проникания и со свободными от усилий концами. Главный вектор и главный момент этих нагрузок не равны нулю, поэтому разложим движение упругого тела на составляющие: движение как жесткого тела и динамический изгиб. Соответственно внешнюю безразмерную боковую нагрузку q_0 представим в виде суперпозиции эквивалентной несамобалансированной нагрузки, не вызывающей изгиба, и самобалансированного остатка $q(l, \xi)$:

$$q_0(l, \xi) = m(l)[P_0/m_0 + P_1(l - l_c)/J] + q(l, \xi) \equiv \alpha\Phi(l, \xi)R(l),$$

$$P_j(\xi) = \int_0^1 q_0(l, \xi)(l - l_c)^j dl, \quad m_0 = \int_0^1 m(l) dl.$$

Здесь $m(l) = \pi\rho(l)r^2(l)$ — погонная масса; P_j — равнодействующие сил. Перерезывающая сила Q и изгибающий момент M определяются путем решения краевой задачи

$$\frac{dQ}{dl} = q(l, \xi), \quad \frac{d^2M}{dl^2} = q(l, \xi), \quad Q = 0, \quad M = 0, \quad l = 0, 1$$

при нормировке

$$q = \frac{q_y}{B}, \quad Q = \frac{Q_y}{BL}, \quad M = \frac{M_y}{BL^2}, \quad B = b_f \tau_d r_{\max}$$

(индексом y отмечены размерные величины). Максимальное растягивающее напряжение $\sigma_{x,\max}$, его безразмерный аналог σ_{\max} в некотором сечении стержня и запас прочности n определяются по известным формулам

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{R^3} = \frac{\pi \varepsilon^2 \sigma_{x,\max}}{4b_f \tau_d}, \quad n = \frac{\Sigma_*}{\Sigma}, \quad \Sigma = \max \{ \sigma_{\max}(l) \}, \quad 0 < l < 1, \quad (9)$$

где Σ_* — безразмерный предел прочности на растяжение, связанный с его размерным аналогом σ_* формулой, аналогичной выражению для σ_{\max} в (9).

Для обеспечения заданного расположения центра масс подбором погонной массы $m(l)$ считаем, что ударник состоит из двух материалов плотности: $\rho = \rho'$ при $0 < l < l_1$ и $\rho = \rho''$ при $l_1 < l < 1$; $\gamma = \rho'/\rho''$. Тогда

$$l_c = \frac{I_1}{I_0}, \quad I_k = \int_0^1 l^k m(l) dl, \quad J = \int_0^1 (l - l_c)^2 m(l) dl. \quad (10)$$

Подбором значения l_1 при некотором заданном значении l_c из уравнения (10) находят отношение γ и момент инерции J , а затем вычисляется параметр j_0 по одной из формул (4).

В случае параболической формы тела (7) расчетные формулы принимают вид

$$\gamma = \frac{l_c[F_1(1) - F_1(l_1)] + F_2(l_1) - F_2(1)}{F_2(l_1) - l_c F_1(l_1)},$$

$$j_0 = \frac{(\gamma - 1)F_1(l_1) + F_1(1)}{(\gamma - 1)[l_c^2 F_1(l_1) - 2l_c F_2(l_1) + F_3(l_1)] + l_c^2 F_1(1) - 2l_c F_2(1) + F_3(1)},$$

$$F_k = l^k \left(\frac{R_0^2}{k} + \frac{2R_0 R_1 l}{k+1} + \frac{(R_1^2 - 2R_0 R_2) l^2}{k+2} - \frac{2R_1 R_2 l^3}{k+3} + \frac{R_2^2 l^4}{k+4} \right),$$

$$R_1 = \beta_0(1 - R_0), \quad R_2 = (\beta_0 - 1)(1 - R_0), \quad k = 1, 2, 3.$$

Анализ показывает, что зависимость $\sigma_{\max}(l)$ непрерывна в точке $l = 0$, т. е. остается конечной и в случае заостренного тела, однако имеет в ней абсолютный максимум; тем не менее разрушение начинается с носика тела. Таким образом, для обеспечения большей прочности носик тела необходимо затуплять.

Влияние радиуса затупления R_0 на величину запаса прочности, положение точки начала разрушения и время достижения опасного состояния исследуем на примере тела параболической формы (7), варьируя положение центра масс и радиус затупления, при следующих значениях параметров (осевая скорость “заморожена”): $\beta_0 = 2$, $\tau = 1$, $D_0 = 0,115$, $\beta_* = 0$, $b_f = 7$, $\tau_d = 5$ МПа, $\sigma_* = 1$ ГПа, $\varkappa = 2$.

Наличие дискообразного затупления еще не означает срыв потока среды непосредственно за диском: срыв наступает при достижении некоторой предельной скорости. Этому препятствуют два фактора: образование перед диском застойной зоны, которая “смывается” и становится более узкой при увеличении скорости движения, а также наличие

Таблица 1

R_0	l_0	l_c	γ	j	n	l_{\max}	S_{\max}	Δ_{\max}
0	0,65	0,61	2,361	21,37	0,92	0,001	3,0	0,455
		0,62	2,108	21,16	0,30	0,038	20,0	1,0
		0,63	1,887	21,04	0,26	0,001	20,0	1,0
0,1	0,60	0,59	2,317	18,57	1,30	0,201	2,6	0,468
		0,61	1,889	18,47	0,40	0,190	20,0	1,0
		0,63	1,541	18,65	0,33	0,190	20,0	1,0
0,2	0,60	0,58	2,053	17,11	1,69	0,276	2,93	0,502
		0,60	1,686	17,05	0,51	0,274	20,0	1,0
		0,62	1,386	17,23	0,45	0,273	20,0	1,0
0,3	0,55	0,57	1,819	15,45	2,44	0,334	4,4	0,413
		0,59	1,512	15,79	0,78	0,300	20,0	1,0
		0,61	1,253	14,52	0,84	0,268	20,0	1,0
0,4	0,55	0,57	1,483	14,74	3,17	0,398	5,9	0,656
		0,59	1,238	15,14	1,12	0,338	20,0	1,0
		0,61	1,030	15,31	1,10	0,355	20,0	1,0

Примечание. Расчеты проведены при $\beta_0 = 2$, $\beta_* = 0$, $\omega_0 = 0,4$.

Таблица 2

R_0	l_0	l_c	γ	j	n	l_{\max}	S_{\max}	Δ_{\max}
0	0,65	0,65	1,515	21,06	3,58	0,044	2,53	0,130
		0,66	1,358	21,21	3,50	0,001	3,13	0,141
		0,67	1,217	21,45	0,21	0,001	20,0	1,0
0,1	0,70	0,66	1,124	19,80	3,88	0,310	3,8	0,162
		0,67	1,009	19,95	0,31	0,190	20,0	1,0
		0,68	0,906	20,18	0,34	0,178	20,0	1,0
0,2	0,65	0,66	0,926	18,26	4,54	0,415	3,27	0,175
		0,67	0,835	18,60	0,58	0,243	20,0	1,0
		0,68	0,751	19,03	0,74	0,218	20,0	1,0
0,3	0,70	0,66	0,766	16,84	5,34	0,480	2,67	0,185
		0,67	0,693	17,09	5,43	0,478	4,07	0,2
		0,68	0,627	17,40	0,96	0,495	20,0	1,0
0,4	0,70	0,68	0,526	16,39	6,52	0,538	3,73	0,214
		0,69	0,477	16,80	0,25	0,465	20,0	1,0
		0,70	0,431	17,28	0,19	0,463	20,0	1,0
0,5	0,70	0,70	0,366	16,49	7,90	0,628	6,4	0,2
		0,71	0,331	17,08	0,106	0,473	20,0	1,0
		0,72	0,297	17,77	0,087	0,475	20,0	1,0

Примечание. Расчеты проведены при $\beta_0 = 2$, $\beta_* = 0$, $\omega_0 = 0,1$.

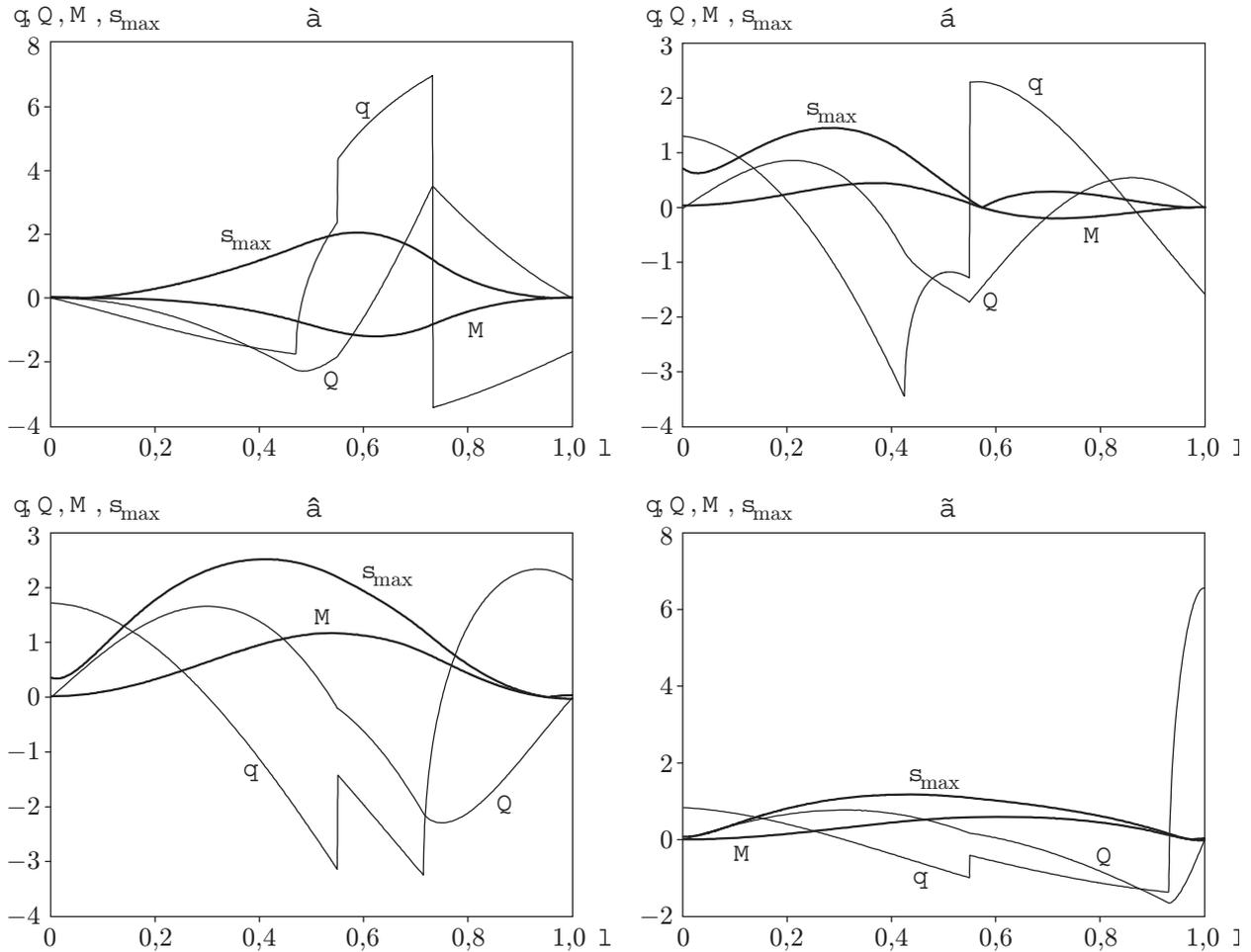


Рис. 7. Зависимость боковой нагрузки q , перерезывающей силы Q , изгибающего момента M и максимального по сечению напряжения σ_{\max} от глубины погружения l при $r_0 = 0,4$; $l_c = 0,57$; $\omega_0 = 0,4$; $\varkappa = 2$:
 a — $\xi = 0,733$; b — $\xi = 1$; v — $\xi = 6$; z — $\xi = 7$

ненулевого (максимального) угла наклона боковой поверхности тела непосредственно за диском.

В табл. 1, 2 приведены значения запаса прочности n , расстояние от носика тела l_{\max} , длина траектории ξ_{\max} , где достигается максимум $\sigma_{\max}(l)$, и длина зоны отрыва Δ_{\max} в момент достижения максимума. При каждом значении радиуса затупления R_0 расчеты проводились для трех значений расстояния l_c , которым соответствовали “устойчивая” (близкая к прямолинейной) траектория, а также “слабонеустойчивая” и “сильнонеустойчивая” траектории при использовании двух значений начальных возмущений: $\omega_0 = -\eta_0 = 0,1$ и $\omega_0 = -\eta_0 = 0,4$. Из табл. 1, 2 следует, что даже в случае малого затупления ($R_0 = 0,1$) опасная точка $l = l_{\max}$ смещается от носика к центру тела (это смещение максимально для “устойчивых” траекторий). При этом запас прочности может увеличиться в 1,5 раза. Отмеченные особенности наблюдаются и при увеличении радиуса затупления до значения $R_0 = 0,9$, при этом точка $l = l_{\max}$ находится вблизи центра тела. Соответствующая глубина погружения ξ_{\max} также существенно меняется в зависимости от параметров l_c , R_0 , ω_0 . Следует отметить, что минимум запаса прочности достигается не на входе, а при полном погружении тела в среду: для близких к прямолинейным траекторий при $\xi_{\max} \approx 2,5 \div 6,0$,

а для криволинейных “неустойчивых” траекторий — при выходе на стационарную траекторию, где в расчетах достигается максимум возмущения.

Запас прочности n растет с увеличением радиуса затупления при прочих равных условиях. При $0 \leq R_0 \leq 0,1$ приращение n близко к линейному и меняется существенно, а затем, при $R_0 \geq 0,1$, не убывает, хотя сравнение может быть только косвенным, так как оно проводится для разных кривых затухания или роста возмущений ω, η .

Анализ данных о размере зоны отрыва Δ_{\max} показывает, что опасные напряжения возникают, как правило, при достижении ее максимального значения, которое опосредованно коррелирует с максимумом ω, η .

На рис. 7 показано распределение боковой изгибающей нагрузки q , перерезывающей силы Q , изгибающего момента M и максимального по сечению растягивающего напряжения σ_{\max} при различных значениях ξ . Скачок при $l = l_1 = 0,57$ обусловлен скачком вычитаемых из полной боковой нагрузки инерционных сил (обуславливающих движение тела как жесткого) из-за скачка плотности в этом сечении. Затем следует резкое (характерное для пограничного слоя) изменение этой нагрузки в начале зоны отрыва.

Заключение. Из результатов исследования устойчивости прямолинейного движения тонкого затупленного тела следует, что большие возмущения, вообще говоря, в большей степени снижают запас устойчивости в малом по сравнению с заостренными телами. Показана возможность реализации криволинейных траекторий, качественно близких к заданным, при существенно различных значениях параметра отрыва: прямолинейных, искривленных на начальном участке и затем прямолинейных (при этом тело может удаляться, двигаться параллельно или приближаться к поверхности мишени, так что возможен его возврат на эту поверхность или останов внутри мишени), искривленных, близких к дуге окружности. Таким образом, основные характеристики изучаемых движений слабо зависят от выбора критерия отрыва, который нуждается в уточнении. Распределение динамических нагрузок, действующих на тонкое тело со стороны среды, аналогично распределению в пограничном слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 18–24.
2. Бивин Ю. К., Симонов И. В. Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 4. С. 447–450.
3. Симонов И. В. Кавитационное проникание тел минимального сопротивления в прочную среду // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 6. С. 111–119.
4. Фомин В. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
5. Богданов А. В., Николаев А. В., Скуридин Г. А. и др. Об одном методе исследования планет земной группы // Космич. исслед. 1988. Т. 24, вып. 4. С. 591–603.
6. Zaitsev A. V., Dobrov A. V., Kotin V. A., Simonov I. V. Possibilities of the hypervelocity impact experiment in frames of demonstration project “Space patrol” // Intern. J. Impact Engng. 1997. V. 20. P. 849–860.
7. Симонов И. В., Федотов С. А., Хаврошкин О. Б. Предкатастрофическое состояние геофизических объектов, триггерное воздействие и пенетрация // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 6. С. 811–813.
8. Сагомоян А. Я. Проникание. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.

9. **Флитман Л. М.** Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 4. С. 155–164.
10. **Флитман Л. М.** Безотрывное обтекание затупленного тела высокоскоростным упругопластическим потоком // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 4. С. 642–651.
11. **Бивин Ю. К., Викторов В. В., Коваленко Б. Я.** Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. № 3. С. 105–110.
12. **Бивин Ю. К., Колесников В. А., Флитман Л. М.** Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 5. С. 181–185.
13. **Симонов И. В.** Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 2. С. 311–320.
14. **Симонов И. В.** О классификации траекторий плоскопараллельного движения тела вращения в прочной среде при отрыве потока // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 2. С. 198–202.
15. **Осипенко К. Ю., Симонов И. В.** Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитации // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 151–161.
16. **Осипенко К. Ю., Симонов И. В.** Обтекание конуса сверхзвуковым потоком пористой среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 87–95.

*Поступила в редакцию 19/VIII 2002 г.,
в окончательном варианте — 13/III 2003 г.*
