условия нормировки $\varepsilon=1$ дают зависимость для критического значения k_*^2 стержня, содержащего несовершенства.

Теперь предположим, что стержень, рассмотренный в качестве примера в п. **2**, содержит в точке $x=\bar{x}$ дефект, не зависящий от прогиба, и пусть $\psi_0(x)=\delta(x-\bar{x})$ — дельта-функция, $\psi_i(x)=0$, $i>0$.

После подстановки выражения для $\psi_0(x)$ в (3.7) и проведения расчетов при $\bar{x}=1{,}5$, $a=0{,}5$ найдены зависимости $\mu=\mu(\varepsilon,\ \omega/\varepsilon)$, изображенные на рис. 4, и $\mu=\mu(\varepsilon;\ 0{,}5/\varepsilon)$, $\mu=\mu(\varepsilon;\ -0{,}5/\varepsilon)$, приведенные на рис. 2 (кривые *2*, *3* соответственно).

На рис. 5 представлены результаты расчета критического значения $k_*^2=k_*^2(\bar{x},a)$ по формуле (3.7) при $\omega=1$. При $\bar{x}=0$, $\bar{x}=\pi$ расчеты по формулам (2.13), (3.7) совпадают.

В заключение следует отметить, что при рассмотрении теории устойчивости эйлерова стержня как раздела прочностных расчетов в машиностроении, особенно в случаях конструкций из тонкостенных стержней, для которых предельные нагрузки лимитируются из соображений устойчивости, результаты нелинейного анализа не лишены практической ценности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов.— М.: Мир, 1983.
2. **Функциональный** анализ (сер. Справ. мат. б-ка)/Под ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.
3. **Теория** ветвления и нелинейные задачи на собственные значения/Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана.— М.: Мир, 1974.
4. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
5. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.
6. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
7. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем (сер. Б-ка расчетчика).— М.: Машиностроение, 1978.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.
9. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1961.
10. **Демидович Б. П., Марон М. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа.— М.: Физматгиз, 1963.
11. **Марсден Дж., Мак-Кракен М.** Бифуркация рождения цикла и ее приложение.— М.: Мир, 1980.

г. Бийск *Поступила 25/XI 1991 г., в окончательном варианте — 8/IV 1992 г.*

УДК 539.3

Т. А. Боднарь

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЙЛЕРОВА СТЕРЖНЯ

1. В [1] изучена устойчивость решений нелинейного уравнения Эйлера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\rho(x)\,y\left(1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{0,5}=0,\quad k^2=\frac{Pl^2}{EI\pi^2} \tag{1.1}$$

при условии, что собственные значения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\rho(x)\,y=0 \tag{1.2}$$

простые; тем самым из анализа выпал целый класс задач, для которых собственные значения уравнения (1.2) двукратны.

Продолжая анализ, проведенный в [1], рассмотрим уравнение (1.1) при $\rho(x)=x^\nu$, $-\infty<\nu<\infty$ и граничных условиях

$$y(x_1)=0,\quad dy(x_0)/dx=0, \tag{1.3}$$

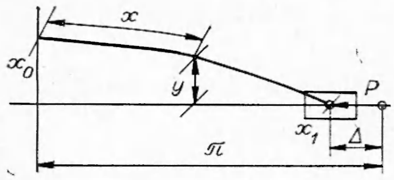

Рис. 1

справедливых для стержня, изображенного на рис. 1. При данной постановке задачи вся длина стержня неизвестна, поэтому буквой l обозначена длина, соответствующая безразмерному отрезку, ограниченному сечениями x_0, x_1; другие обозначения, использованные в (1.1) — (1.3), общеприняты или приведены на рис. 1.

Решение рассматриваемой задачи известно лишь в линейной постановке [2], при этом следует обратить внимание, что принятые в этой работе и ряде других как само собой разумеющиеся допущения о том, что стержень, шарнирно закрепленный на одном конце и находящийся под воздействием силы P, приложенной к нему с другого конца, делится точкой, в которой $dy/dx = 0$, на равные отрезки и что он симметричен по своей конфигурации относительно этой точки, справедливы лишь для стержней с постоянными поперечными сечениями $\nu = 0$.

В общем случае $\nu \neq 0$ точка x_0, в которой $dy/dx = 0$, делит стержень на неравные отрезки, соотношение между которыми неизвестно и, следовательно, может быть определено из решения. При этом закон $\rho(x) = x^\nu$ должен быть неизменным для всего стержня, или в противном случае данная задача сводится к рассмотренной в [1].

Анализ устойчивости решений нелинейного уравнения (1.1) с условиями (1.3) будет проводиться методом проекций [3] с учетом двумерности нуль-пространства оператора

$$L_k = d^2/dx^2 + k^2 x^\nu.$$

2. После разложения функции $k^2 x^\nu y (1 - (dy/dx)^2)^{0,5}$ в ряд по степеням y, dy/dx в точке $(y, dy/dx) = (0, 0)$ уравнение (1.1) приобретает вид

$$L_k y + \sum_{n=2}^{\infty} c_n y \, (dy/dx)^{n-1} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y \, \partial (dy/dx)^{n-1}} \left(k^2 x^\nu y \, (1 - (dy/dx)^2)^{0,5}\right).$$

Фундаментальная система решений уравнения $L_k y = 0$ состоит из функций [4]

$$\varphi_{1i}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\, I_\omega (2\lambda_i \omega x^{1/2\omega}), & -\infty < \nu < -2, \ -2 < \nu < \infty, \\ \sqrt{x} \cos (\lambda_i \ln x), & \nu = -2, \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\, N_\omega (2\lambda_i \omega x^{1/2\omega}), & -\infty < \nu < -2, \ -2 < \nu < \infty, \\ \sqrt{x} \sin (\lambda_i \ln x), & \nu = -2. \end{cases}$$

Здесь λ_i — i-е собственное значение оператора L_k; $\omega = (\nu + 2)^{-1}$; $I_\omega(x)$, $N_\omega(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода ω-го порядка.

При $-\infty < \nu < -2$, $-2 < \nu < \infty$ собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \ldots$) являются решениями уравнения

$$\det |a_{ij}| = 0,$$

где $a_{11} = \sqrt{x_1}\, I_\omega\left(2\omega\lambda x_1^{1/2\omega}\right)$; $a_{12} = \sqrt{x_1}\, N_\omega\left(2\omega\lambda x_1^{1/2\omega}\right)$; $a_{21} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} I_\omega\left(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}\right) -$

$$- \lambda x_0^{(1-\omega)/2\omega} I_{\omega+1}\left(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}\right); \ a_{22} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} N_\omega\left(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}\right) - \lambda x_0^{(1-\omega)/2\omega} \times$$

$\times N_{\omega+1}\left(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}\right)$,

а при $\nu = -2$ — уравнения $\mathrm{tg}\,(\lambda \ln (x_1/x_0)) = 2\lambda$.

Наименьшее собственное значение λ_1 позволяет записать условие устойчивости решения уравнения $L_k y = 0$ при условиях (1.3) в виде

$$\mu = k^2 - \lambda_1^2 \leqslant 0, \quad -\infty < \nu < -2, \; -2 < \nu < \infty, \tag{2.2}$$
$$\mu = k^2 - \lambda_1^2 - 0{,}25 \leqslant 0, \quad \nu = -2.$$

Последнее условие (2.2) хорошо известно [2]. Знак равенства в (2.2) соответствует границе устойчивости и определяет критическое значение k_*^2, полученное в линейном приближении. В силу соотношения (2.2) возможна формальная замена оператора L_k оператором $L_\mu = d^2/dx^2 + (\mu + \lambda_1^2)\, x^\nu$, ведущая к более удобным обозначениям.

Прежде чем приступить к решению (1.1), установим, что пространство функций $\varphi_{1i}(x)$, $\varphi_{2i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, интегрируемых на интервале (x_0, x_1) с квадратом, является гильбертовым со скалярным произведением $\langle \varphi_{ki}(x), \varphi_{nj}^*(x) \rangle$ ($\varphi_{nj}^*(x)$ — функция, сопряженная с функцией $\varphi_{nj}(x)$ относительно скалярного произведения).

Поскольку функции $\varphi_{kj}(x)$ $(k = 1, 2, j = 1, 2, \ldots)$ ортогональны на интервале (x_0, x_1) с весом x^ν, то с точностью до постоянных множителей $\varphi_{kj}^*(x) = x^\nu \varphi_{kj}(x)$ для всего интервала $-\infty < \nu < \infty$.

Теперь, определив амплитуду как проекцию функции $y(x)$ на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженными векторами $\varphi_{11}^*(x)$, $\varphi_{21}^*(x)$, $\varepsilon = \langle (y(x), y(x)), (\varphi_{11}^*(x), \varphi_{21}^*(x)) \rangle$, будем искать решение (2.1) в виде рядов

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n y_n(x), \quad \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \mu_n. \tag{2.3}$$

После подстановки (2.3) в (2.1) и приравнивания совокупностей членов при одинаковых степенях ε до третьей степени включительно приходим к системе уравнений

$$L_0 y_1 = 0; \tag{2.4}$$

$$L_0 y_2 + 2\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 + 2\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) = 0; \tag{2.5}$$

$$L_0 y_3 + 3\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_2 + 6\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) + 3\mu_2 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 + 6\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) = 0, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ — матричные дифференциальные операторы, определяемые как

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{c_2 \lambda_1^2}{2} \left(y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx} \right),$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \frac{c_3 \lambda_1^2}{3} \left(y_1 \frac{dy_2}{dx} \frac{dy_3}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_3}{dx} + y_3 \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} \right).$$

Решением уравнения (2.4) является линейная комбинация функций $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{21}(x)$, $y_1 = \varphi_{11}(x) + \sigma\varphi_{21}(x)$ (σ — множитель).

Уравнения (2.5), (2.6) разрешимы тогда и только тогда, когда для $k = 1, 2$ выполняются условия

$$\langle L_0 y_2, \varphi_{k1}^*(x) \rangle = \langle L_0 y_3, \varphi_{k1}^*(x) \rangle = 0,$$

вытекающие из теоремы Фредгольма об альтернативе. С учетом этого после скалярного умножения (2.5), (2.6) на $\varphi_{11}^*(x)$, $\varphi_{21}^*(x)$ получим

$$\mu_1 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1, \varphi_{k1}^*(x) \right\rangle + \langle \mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1), \varphi_{k1}^*(x) \rangle = 0,$$

$$\mu_1 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_2, \varphi_{k1}^*(x) \right\rangle + 2\langle \mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \varphi_{k1}^*(x) \rangle + \mu_2 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1, \varphi_{k1}^*(x) \right\rangle +$$
$$+ 2\langle \mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1), \varphi_{k1}^*(x) \rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

откуда, учитывая, что $c_2 = 0$ и, следовательно, $\mu_1 = 0$, $y_2 = 0$, находим

$$(2.7)\qquad \mu_2 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1, \varphi_{11}^*(x) \right\rangle + 2\langle C(y_1, y_1, y_1), \varphi_{11}^*(x)\rangle = 0,$$

$$\mu_2 \left\langle \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1, \varphi_{21}^*(x) \right\rangle + 2\langle C(y_1, y_1, y_1), \varphi_{21}^*(x)\rangle = 0.$$

После подстановки выражения для y_1 в (2.7) приходим к системе двух алгебраических уравнений

$$(2.8)\qquad C_{13}\sigma^3 + C_{12}\sigma^2 + C_{11}\sigma + B_{12}\sigma\mu_2 + B_{11}\mu_2 + B_{10} = 0,$$

$$C_{23}\sigma^3 + C_{22}\sigma^2 + C_{21}\sigma + B_{22}\sigma\mu_2 + B_{21}\mu_2 + B_{20} = 0,$$

где

$$C_{13} = -\lambda_1^2\langle x^\nu\varphi_{21}(x)(d\varphi_{21}(x)/dx)^2, \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$C_{12} = -\lambda_1^2\langle x^\nu(\varphi_{11}(x)(d\varphi_{21}(x)/dx)^2 + 2\varphi_{21}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx), \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$C_{11} = -\lambda_1^2\langle x^\nu(2\varphi_{11}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx + \varphi_{21}(x)(d\varphi_{11}(x)/dx)^2), \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$B_{12} = \langle x^\nu\varphi_{21}(x), \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$B_{11} = \langle x^\nu\varphi_{11}(x), \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$B_{10} = -\lambda_1^2\langle x^\nu\varphi_{11}(x)(d\varphi_{11}(x)/dx)^2, \varphi_{11}^*(x)\rangle;$$

$$C_{23} = -\lambda_1^2\langle x^\nu\varphi_{21}(x)(d\varphi_{21}(x)/dx)^2, \varphi_{21}^*(x)\rangle;$$

$$C_{22} = -\lambda_1^2\langle x^\nu(\varphi_{11}(x)(d\varphi_{21}(x)/dx)^2 + 2\varphi_{21}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx), \varphi_{21}^*(x)\rangle;$$

$$C_{21} = -\lambda_1^2\langle x^\nu(2\varphi_{11}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx + \varphi_{21}(x)(d\varphi_{11}(x)/dx)^2), \varphi_{21}^*(x)\rangle;$$

$$B_{22} = \langle x^\nu\varphi_{21}(x), \varphi_{21}^*(x)\rangle;$$

$$B_{21} = \langle x^\nu\varphi_{11}(x), \varphi_{21}^*(x)\rangle;$$

$$B_{20} = -\lambda_1^2\langle x^\nu\varphi_{11}(x)(d\varphi_{11}(x)/dx)^2, \varphi_{21}^*(x)\rangle.$$

Следуя обычной процедуре вычисления устойчивости [3], определим квадратичную форму системы (2.8), воспользовавшись методом последовательных приближений. В качестве первого приближения можно взять решение линеаризированной системы (2.8):

$$\sigma_1 = \frac{B_{21}B_{10} - B_{11}B_{20}}{B_{11}C_{21} - B_{21}C_{11}}.$$

Подстановка выражения для σ_1 в (2.8) дает уравнение двух конических сечений на плоскости (μ_2, σ):

$$(2.9)\qquad g_1(\mu_2, \sigma) = C_{12}\sigma^2 + C_{11}\sigma + B_{12}\sigma\mu_2 + B_{11}\mu_2 + \bar{B}_{10} + O|\sigma|^3 = 0,$$

$$g_2(\mu_2, \sigma) = C_{22}\sigma^2 + C_{21}\sigma + B_{22}\sigma\mu_2 + B_{21}\mu_2 + \bar{B}_{20} + O|\sigma|^3 = 0.$$

Здесь $\bar{B}_{10} = B_{10} + C_{13}\sigma_1^3$; $\bar{B}_{20} = B_{20} + C_{23}\sigma_1^3$.

Наличие двух независимых переменных μ_2, σ гарантирует существование решений системы (2.9). Причем в зависимости от знака дискриминанта эквивалентного системе (2.9) кубического уравнения

$$G = G_3\sigma^3 + G_2\sigma^2 + G_1\sigma + G_0 = 0,$$

где $G_3 = B_{12}C_{22} - B_{22}C_{12}$; $G_2 = B_{11}C_{22} + B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12} - B_{22}C_{11}$; $G_1 = B_{11}C_{21} - B_{12}\bar{B}_{20} - B_{22}\bar{B}_{10} - B_{21}C_{11}$; $G_0 = B_{11}\bar{B}_{20} - B_{21}\bar{B}_{10}$, система (2.9) имеет помимо тривиального $y(x) = 0$ три действительных решения или одно действительное и два комплексно-сопряженных. Если дискриминант равен нулю, то два или все три действительных корня совпадают. Существование действительных и комплексных решений объясняется тем, что под воздействием силы P стержень из состояния $y(x) = 0$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ будет деформироваться к новому состоянию равновесия, устойчивому или неустойчивому, совершая монотонное или колебательное движение. Это

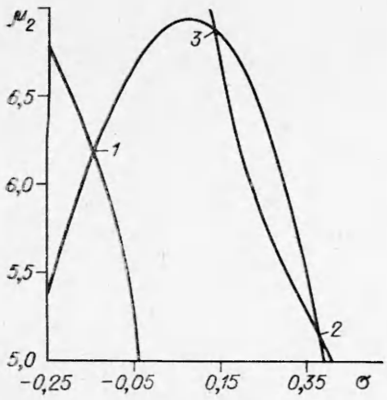

Рис. 2

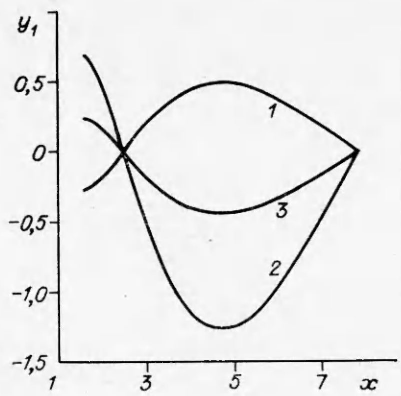

Рис. 3

объяснение становится достаточно очевидным, если рассмотреть параметр μ как время в пространстве изображений после перевода соответствующей начально-краевой задачи с начальным условием $y(x)=0$ в это пространство (например, преобразованием Лапласа).

Другой аспект существования множества решений $\left(\mu_2^{(i)}, \sigma^{(i)}\right)$ $(i = 1—3)$ системы (2.9) заключается в том, что эти решения относятся к различным стержням или при прочих равных параметрах к стержням различной длины. Действительно, поскольку λ_1, ε одинаковы для всех решений $\left(\mu_2^{(i)}, \sigma^{(i)}\right)$ $(i=1—3)$, то из (2.2), (2.3) вытекает, что каждому решению (2.9) соответствуют присущее ему значение $k^2 = \lambda_1^2 + 0{,}5\mu_2^{(i)}\varepsilon^2$ и, следовательно, длина.

Расчеты, проведенные при взятых в качестве примера исходных данных $x_0 = 3\pi/2$, $\nu = -2$, показали, что система (2.9) имеет три действительных решения: $\left(\mu_2^{(1)}; \sigma^{(1)}\right) = (6{,}192;\ -0{,}158)$, $\left(\mu_2^{(2)}; \sigma^{(2)}\right) = (5{,}161;\ 0{,}375)$, $\left(\mu_2^{(3)}; \sigma^{(3)}\right) = (6{,}880;\ 0{,}133)$ (рис. 2, точки пересечения конических сечений *1—3*).

Для каждого из приведенных выше решений системы (2.9) был вычислен прогиб $y_1(x)$ в диапазоне $x = x_0 \pm \pi$. Результаты вычислений изображены на рис. 3, где номера решений системы (2.9) и номера стержней совпадают. Результаты расчетов показывают, что для всех стержней прогиб равен нулю в точке (шарнир) $x_2 = 0{,}787\pi$ $(y(x_1)=0$ по условию), так что, как отмечалось выше, $|x_0 - x_2| \neq |x_1 - x_0|$.

Анализ устойчивости решений уравнения (2.1) с условиями (1.3) сводится к определению собственных значений матрицы Якоби системы (2.9) при соответствующей ее параметризации и должен проводиться для каждого i-го стержня с учетом полученных значений $\left(\mu_2^{(i)}, \sigma^{(i)}\right)$. Параметризация системы (2.9) заключается в представлении зависимостей $g_i(\mu_2, \sigma)$ $(i=1,\ 2)$ в виде функций от параметра μ. Комбинируя (2.3), (2.9) и используя условие нормировки $\varepsilon = 1$, можно записать систему (2.9) в виде

$$\bar{g}_1(\mu) = 4\mu^2\left(C_{12}\sigma^2\mu_2^{-2} + C_{11}\sigma\mu_2^{-2} + B_{12}\sigma\mu_2^{-1} + \right.$$
$$\left. + B_{11}\mu_2^{-1} + \bar{B}_{10}\mu_2^{-2}\right) + O(|\sigma| + |\mu|)^3 = 0,$$
$$\bar{g}_2(\mu) = 4\mu^2\left(C_{22}\sigma^2\mu_2^{-2} + C_{21}\sigma\mu_2^{-2} + B_{22}\sigma\mu_2^{-1} + B_{21}\mu_2^{-1} + \right.$$
$$\left. + \bar{B}_{20}\mu_2^{-2}\right) + O(|\sigma| + |\mu|)^3 = 0.$$

Тогда решение (2.1) с условиями (1.3) устойчиво, если вещественные части собственных значений матрицы Якоби

$$M = |\varepsilon_{ij}|,$$

где $\varepsilon_{11} = \partial\bar{g}_1(\mu)/\partial\mu_2^{-1}$; $\varepsilon_{12} = \partial\bar{g}_1(\mu)/\partial\left(\sigma\mu_2^{-1}\right)$; $\varepsilon_{21} = \partial\bar{g}_2(\mu)/\partial\mu_2^{-1}$; $\varepsilon_{22} =$

$= \partial \bar{g}_2(\mu)/\partial(\sigma\mu_2^{-1})$, отрицательны. Учитывая, что в каждой точке $(\mu_2^{(n)},\ \sigma^{(n)})$ при малом μ имеет место $\det M = \mu^2 \det M(\mu_2^{(n)}, \sigma^{(n)}) + O|\mu|^3$, условия устойчивости запишем в виде

$$\max(\mu \operatorname{Re} s_1^{(n)}, \mu \operatorname{Re} s_2^{(n)}) < 0,$$
$$|\operatorname{Re}(\varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)})| > |(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{0,25} \cos(0,5 \operatorname{arctg} \alpha_n^{-1}\beta_n)|. \tag{2.10}$$

Здесь $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$ — собственные значения матрицы

$$M(\mu_2^{(n)}, \sigma^{(n)}),\ \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}(\mu_2^{(n)}, \sigma^{(n)}),$$
$$\alpha_n = (\operatorname{Re}(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)}))^2 - (\operatorname{Im}(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)}))^2 +$$
$$+ 4 \operatorname{Re}\varepsilon_{12}^{(n)} \operatorname{Re}\varepsilon_{21}^{(n)} - 4 \operatorname{Im}\varepsilon_{12}^{(n)} \operatorname{Im}\varepsilon_{21}^{(n)},$$
$$\beta_n = 2 \operatorname{Re}(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)}) \operatorname{Im}(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)}) + 4 \operatorname{Re}\varepsilon_{12}^{(n)} \operatorname{Im}\varepsilon_{21}^{(n)} + 4 \operatorname{Re}\varepsilon_{21}^{(n)} \operatorname{Im}\varepsilon_{12}^{(n)}.$$

Если собственные значения $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$ вещественны, то запись условий (2.10) упрощается:

$$\max(\mu s_1^{(n)}, \mu s_2^{(n)}) < 0, \quad \det M(\mu_2^{(n)}, \sigma^{(n)}) > 0. \tag{2.11}$$

Заметим, что неравенства (2.11) справедливы тогда и только тогда, когда конические сечения (2.9) строго пересекаются на плоскости (μ_2, σ), т. е.

$$\det \begin{vmatrix} \partial g_1(\mu_2, \sigma)/\partial\mu_2 & \partial g_1(\mu_2, \sigma)/\partial\sigma \\ \partial g_2(\mu_2, \sigma)/\partial\mu_2 & \partial g_2(\mu_2, \sigma)/\partial\sigma \end{vmatrix} \neq 0.$$

Возвращаясь к комплексным значениям $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$, заметим, что стержень, нагруженный постоянной силой, не может представлять собой автоколебательную систему и, следовательно, вещественные части $\operatorname{Re} s_1^{(n)}$, $\operatorname{Re} s_2^{(n)}$ не могут менять знак, переходя через нуль.

Расчет собственных значений матрицы Якоби для полученных выше решений $(\mu_2^{(n)}, \sigma^{(n)})$ $(n = 1—3)$ дал следующие результаты:

$$(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (-9,504 + 7,684i;\ -9,504 - 7,684i),$$
$$(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (2,852 + 10,200i;\ 2,852 - 10,200i),$$
$$(s_1^{(3)}; s_2^{(3)}) = (12,873;\ -6,005),$$

откуда вытекает, что первый стержень устойчив при $\mu > 0$, второй — при $\mu < 0$, а третий неустойчив при любом μ.

Эти результаты требуют некоторого объяснения. Начнем с того, что, как видно из (2.2), значению $\mu = 0$ соответствует критическая сила $P_* = P(k_*^2)$ такая, что при $\mu > 0$ $P > P_*$ и наоборот. Тогда устойчивость второго стержня при $P < P_*$ отвечает общим представлениям о нагруженных стержнях; условие устойчивости первого стержня $P > P_*$ не означает, что P может быть сколь угодно большим (условия (2.10), (2.11) справедливы для малых μ), а свидетельствует о том, что при $P < P_*$ устойчивое положение стержня не удовлетворяет $dy(x_0)/dx = 0$. Это условие будет достигнуто в другой точке x или во всех точках x в случае тривиального решения. Что касается третьего стержня, то его деформированное состояние с $dy(x_0)/dx = 0$ неустойчиво при любом P, т. е. для стержня с данной длиной и конфигурацией невозможно силой P добиться устойчивого деформированного состояния, при котором максимальный прогиб достигался бы в точке x_0.

3. Рассмотрим стержень, схема которого приведена на рис. 4. Пусть сила P зависит от прогиба:

$$P = P_0(1 - \beta\,\Delta(y)). \tag{3.1}$$

Здесь P_0, β — постоянные;

$$\Delta(y) = \pi - \int_{x_0}^{x_1} (1 - (dy/dx)^2)^{0,5} dx.$$

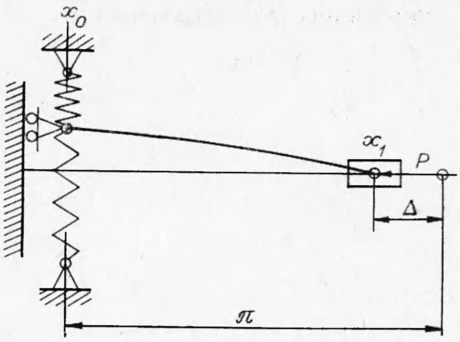

Рис. 4

Под воздействием силы P, приложенной к x_1, другой конец стержня x_0 может перемещаться в перпендикулярном к оси стержня направлении, преодолевая сопротивление пружины с жесткостью α. С увеличением прогиба P убывает и под действием пружины стержень будет стремиться к первоначальному положению. При такой постановке существуют все предпосылки для возникновения незатухающих периодических колебаний — предельных циклов.

Уравнение (1.1) после разложения по степеням y, dy/dx в точке $(y, dy/dx) = (0, 0)$ приобретает вид

$$(3.2) \qquad L_k y + \sum_{n=2}^{\infty} c_n y((dy/dx)^{n-1} - \beta \int_{x_0}^{x_1} (dy/dx)^{n-1} dx) = 0, \quad k^2 = \frac{P_0 l^2}{EI\pi^2}.$$

Способ крепления стержня позволяет записать граничные условия

$$(3.3) \qquad y(x_1) = 0, \quad dy(x_0)/dx + \alpha y(x_0) = 0,$$

приводящие к другим по сравнению с (1.3) соотношениям для собственных значений оператора L_k. Теперь они являются решениями уравнения

$$\det |a_{ij}| = 0,$$

где

$$a_{11} = \sqrt{x_1}\, I_\omega(2\omega\lambda x_1^{1/2\omega}), \quad a_{12} = \sqrt{x_1}\, N_\omega(2\omega\lambda x_1^{1/2\omega});$$

$$a_{21} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} + \alpha\sqrt{x_0}\right) I_\omega(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}) - \lambda x_0^{(1-\omega)/2\omega} I_{\omega+1}(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega});$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} + \alpha\sqrt{x_0}\right) N_\omega(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}) - \lambda x_0^{(1-\omega)/2\omega} N_{\omega+1}(2\omega\lambda x_0^{1/2\omega}),$$

при $-\infty < \nu < -2$, $-2 < \nu < \infty$ и уравнения

$$(1 + 2\alpha x_0)\operatorname{tg}(\lambda \ln(x_1/x_0)) = 2\lambda$$

при $\nu = -2$.

Дальнейшая процедура анализа устойчивости решений (3.2) аналогична проведенной в п. 2 для стержня, нагруженного постоянной силой. Поэтому, используя обозначения

$$\Delta_i(y) = \int_{x_0}^{x_1} dy_i/dx\, dx, \quad \Delta_{ij}(y) = \int_{x_0}^{x_1} dy_i/dx\, dy_j/dx\, dx,$$

$$\Delta_{ij} = \int_{x_0}^{x_1} d\varphi_{i1}(x)/dx d\varphi_{j1}(x)/dx\, dx,$$

укажем лишь на встречающиеся при анализе отличия. Это касается матричных дифференциальных операторов

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{c_2\lambda_1^2}{2}\left(y_1\left(\frac{dy_2}{dx} - \beta\Delta_2(y)\right) + y_2\left(\frac{dy_1}{dx} - \beta\Delta_1(y)\right)\right),$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \frac{c_3\lambda_1^2}{3}\left(y_1\left(\frac{dy_2}{dx}\frac{dy_3}{dx} - \beta\Delta_{23}(y)\right) + \right.$$

$$\left. + y_2\left(\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_3}{dx} - \beta\Delta_{13}(y)\right) + y_3\left(\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} - \beta\Delta_{12}(y)\right)\right),$$

приводящих к коэффициентам

$$C_{i3}=\lambda_1^2\left(\beta\Delta_{22}\langle x^\nu\varphi_{21}(x),\ \varphi_{i1}^*(x)\rangle-\left\langle x^\nu\varphi_{21}(x)\,(d\varphi_{21}(x)/dx)^2,\ \varphi_{i1}^*(x)\right\rangle\right),$$

$$C_{i2}=\lambda_1^2\bigl(\beta\,\langle x^\nu\,(\Delta_{22}\varphi_{11}(x)+2\Delta_{12}\varphi_{21}(x)),\ \varphi_{i1}^*(x)\rangle-\langle x^\nu(\varphi_{11}(x)\,(d\varphi_{21}(x)/dx)^2+$$
$$+\,2\varphi_{21}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx),\ \varphi_{i1}^*(x)\rangle\bigr),$$

$$C_{i1}=\lambda_1^2\,(\beta\,\langle x^\nu\,(2\Delta_{12}\varphi_{11}(x)+\Delta_{11}\varphi_{21}(x)),\ \varphi_{i1}^*(x)\rangle-$$
$$-\left\langle x^\nu\,(2\varphi_{11}(x)\,d\varphi_{11}(x)/dx\,d\varphi_{21}(x)/dx+\varphi_{21}(x)\,(d\varphi_{11}(x)/dx)^2),\ \varphi_{i1}^*(x)\right\rangle),$$

$$B_{i0}=\lambda_1^2\left(\beta\langle x^\nu\Delta_{11}\varphi_{11}(x),\ \ \varphi_{i1}^*(x)\rangle-\left\langle x^\nu\varphi_{11}(x)\,(d\varphi_{11}(x)/dx)^2,\ \varphi_{i1}^*(x)\right\rangle\right),\quad i=1,\,2.$$

Остальные коэффициенты, входящие в систему (2.9), остались без изменения, хотя, разумеется, они неявным образом зависят от α через λ_1.

Продолжая анализ устойчивости, так же как в п. **2**, можно найти решения уравнения $G=0$. Зависимость $G=G(\sigma,\ \beta)$, полученная при $\nu=0$, $x_0=0$, $\alpha=1$, приведена на рис. 5. При этих же исходных данных и фиксированных значениях β были определены решения системы (2.9) и собственные значения матриц Якоби, отвечающих этим решениям. В результате расчетов получено:

а) при $\beta=0{,}550$

$$\left(\mu_2^{(1)};\ \sigma^{(1)}\right)=(-1{,}496;\ 0{,}123),\ \left(s_1^{(1)};\ s_2^{(1)}\right)=$$
$$=(2{,}536;\ -0{,}350),\ \left(\mu_2^{(2)};\ \sigma^{(2)}\right)=(-1{,}136-0{,}411i;\ 0{,}352+1{,}663i),$$
$$\left(s_1^{(2)};\ s_2^{(2)}\right)=(3{,}175-0{,}612i;\ 0{,}0439+0{,}285i)$$

(третье решение $\left(\mu_2^{(3)},\ \sigma^{(3)}\right)$, комплексно-сопряженное со вторым, не приводится);

б) при $\beta=0{,}612$

$$\left(\mu_2^{(1)};\ \sigma^{(1)}\right)=(-1{,}759;\ 0{,}168),\ \ \left(s_1^{(1)};\ s_2^{(1)}\right)=(2{,}927;\ -0{,}269),$$
$$\left(\mu_2^{(2)};\ \sigma^{(2)}\right)=(-1{,}423+0{,}273i;\ 0{,}0856-0{,}998i),$$
$$\left(s_1^{(2)};\ s_2^{(2)}\right)=(3{,}483+0{,}410i;\ \ 0-0{,}252i);$$

в) при $\beta=0{,}700$

$$\left(\mu_2^{(1)};\ \sigma^{(1)}\right)=(-2{,}256;\ \ 0{,}372),\ \ \ \left(s_1^{(1)},\ s_2^{(1)}\right)=(3{,}431;\ \ -0{,}254),$$
$$\left(\mu_2^{(2)};\ \ \sigma^{(2)}\right)=(-1{,}887+0{,}0982i;\ \ -0{,}114-0{,}481i),$$
$$\left(s_1^{(2)};\ \ s_2^{(2)}\right)=(3{,}809+0{,}188i;\ \ -0{,}0164-0{,}272i).$$

Как следует из расчетов, при всех указанных значениях β действительные решения, соответствующие состояниям стационарного равнове-

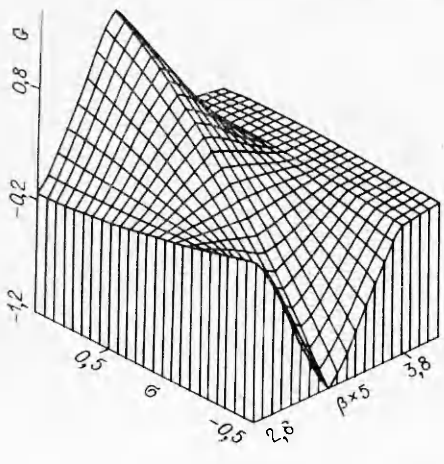

Рис. 5

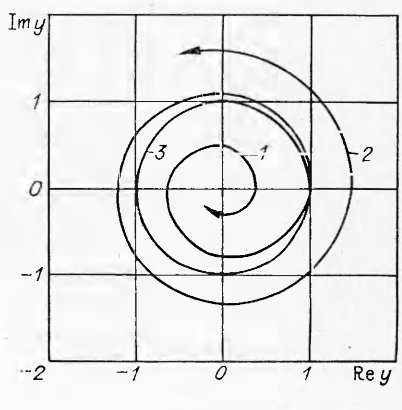

Рис. 6

сия стержней, неустойчивы при любом μ. Комплексно-сопряженные решения, отвечающие колебательным режимам стержней, в случае а устойчивы при $\mu < 0$ (рис. 6, кривая *1*), в случае в неустойчивы при любом μ, а при $\mu < 0$ фазовая траектория имеет вид кривой *2*. В случае б колебательный режим представляет собой предельный цикл при $\mu < 0$ (кривая *3*). Здесь, так же как и в п. 2, в каждом из случаев а — в различным решениям системы (2.9) соответствуют стержни разной длины. При комплексно-сопряженных решениях длины стержней совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарь Т. А.** Устойчивость эйлерова стержня. Нелинейный анализ // ПМТФ.— 1993.— № 2.
2. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
3. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
4. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1961.

г. Бийск *Поступила 7/II 1992 г.*

УДК 677.017

Б. С. Резников, И. Ю. Шалагинова

СТРУКТУРНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ МЯГКИХ КОМПОЗИТОВ ВОЛОКНИСТОЙ ОСНОВЫ

Клееные волокнистые материалы, являющиеся мягкими композитами, находят широкое применение в промышленности. Поэтому проблема прогнозирования их физико-механических свойств актуальна.

В настоящее время при описании деформирования и разрушения нетканых клееных материалов в основном используется феноменологический подход [1—3], который не позволяет в полной мере учитывать структуру материала, физико-механические свойства волокон и связующего, пористость и т. д., а тем самым вести целенаправленный поиск новых материалов с заданными эксплуатационными свойствами. В данной работе на основе структурной модели [4] исследуется ползучесть мягкого композита с учетом линейных вязкоупругих свойств связующего и волокон.

При одноосном растяжении вдоль оси Oy напряжением σ в указанной механической модели волокнистого композита возникает двухосное напряженное состояние, для которого в [4] выведены уравнения статического равновесия

$$\sigma(1-\Omega_x)=\sigma_z\Omega_z\cos^2\alpha+\sigma_y\Omega_y,\quad \sigma_x\Omega_x+\sigma_z\Omega_z\sin^2\alpha=0 \tag{1}$$

и условия совместности деформаций (в случае, когда они считаются малыми)

$$\begin{gathered}(1+\varepsilon_z)^2=(1+\varepsilon_x)^2\sin^2\alpha_0+(1+\varepsilon_y)^2\cos^2\alpha_0,\\ (1+\varepsilon_y)\operatorname{tg}\alpha=(1+\varepsilon_x)\operatorname{tg}\alpha_0\quad \forall\sigma\geqslant 0,\ \forall t\geqslant 0.\end{gathered} \tag{2}$$

В соотношениях (1), (2) использованы обозначения из [4], укажем только, что здесь и в дальнейшем все величины с индексами x, y относятся к связующему, а с z — к волокнам, t — время.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1), (2), будем считать, что волокна и связующее подчиняются трехэлементной реологической модели вида

$$\frac{d}{dt}\sigma_c+\nu_c\sigma_c=B_c\left(\frac{d}{dt}\varepsilon_c+\mu_c\varepsilon_c\right), \tag{3}$$