

УДК 532.59; 551.466

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЕ

В. Ю. Ляпидевский<sup>\*,\*\*</sup>, М. В. Турбин<sup>\*\*</sup>,  
Ф. Ф. Храпченков<sup>\*\*,\*\*\*</sup>, В. Ф. Кукарин<sup>\*\*\*\*</sup>

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

\*\* Воронежский государственный университет, 394018 Воронеж, Россия

\*\*\* Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,  
690041 Владивосток, Россия

\*\*\*\* Институт неорганической химии им. А. В. Николаева СО РАН,  
630090 Новосибирск, Россия

E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, mrmike@mail.ru, fed@poi.dvo.ru, kukarin@niic.nsc.ru

В рамках второго приближения теории мелкой воды исследуется течение многослойной стратифицированной по плотности жидкости. Построена математическая модель распространения придонных и приповерхностных внутренних волн большой амплитуды, учитывающая влияние тонкой структуры термоклина (пикноклина). С использованием полученных решений, описывающих распространение уединенных волн и волновых боров, интерпретируются натурные данные.

Ключевые слова: многослойная мелкая вода, внутренние волны, волновой бор, натурный эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20200105

**Введение.** Распространение поверхностных и внутренних волн в океане часто описывается аналогичными моделями. В частности, для описания длинных волн используются различные модели теории мелкой воды. При этом амплитуда внутренних волн в отличие от амплитуды поверхностных волн может быть существенно больше начальной толщины одного из слоев (поверхностного или придонного), вдоль которого эта волна распространяется. Амплитуда приповерхностных внутренних волн в океане может достигать нескольких сотен метров [1]. В прибрежной зоне приповерхностные волны преобразуются в придонные волны большой амплитуды и распространяются в направлении берега в виде внутреннего волнового бора [2]. Трансформация нелинейных внутренних волн в зоне “заплеска”, т. е. в зоне, расположенной выше линии контакта основного пикноклина с дном, является в настоящее время объектом интенсивных исследований [3–5].

Математическая модель двухслойного течения, описывающая распространение нелинейных волн произвольной амплитуды в рамках второго приближения теории мелкой воды, предложена в [6]. Модели трехслойного течения для приповерхностных и придонных волн большой амплитуды выведены и верифицированы в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (код проекта 14.Z50.31.0037) и в рамках Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН № П.1.2.

© Ляпидевский В. Ю., Турбин М. В., Храпченков Ф. Ф., Кукарин В. Ф., 2020

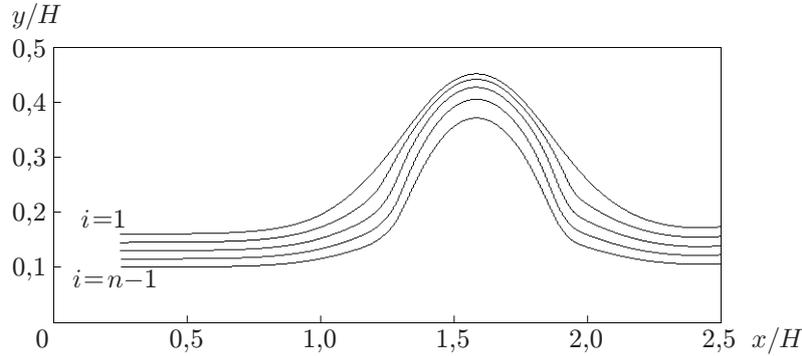


Рис. 1. Схема течения многослойной жидкости

В океане реальная стратификация не является двух- или трехслойной. Анализ нелинейных волновых процессов с учетом непрерывной стратификации вызывает большие трудности и может быть проведен только для некоторых случаев [8].

В настоящей работе исследуется структура бегущих волн с большой амплитудой в многослойной жидкости. При этом основным фактором, формирующим решение типа уединенных волн и волновых боров, является негидростатичность распределения давления в одном из слоев, внешнем по отношению к придонной или приповерхностной волне. Построенные решения используются для интерпретации натуральных данных.

**Математическая модель.** Рассматриваемая математическая модель распространения нелинейных возмущений в многослойной жидкости является упрощенной модификацией модели, предложенной в [9]. Рассматриваемая модель выведена при следующих допущениях:

- распределение давления во всех промежуточных слоях является гидростатическим;
- справедливо приближение Буссинеска  $(\rho_i - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$  ( $\rho_i$  — плотность жидкости в  $i$ -м слое ( $i = 1, \dots, n$ )).

В приближении Буссинеска полная глубина канала постоянна в случае течений над ровным дном, т. е.  $H = \sum_{i=1}^n h_i + \zeta = \text{const}$  ( $\zeta$  — толщина верхнего слоя;  $h_i$  — толщина нижележащих слоев) (рис. 1). Уравнения движения имеют вид

$$h_{it} + (h_i u_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \zeta_t + (\zeta w)_x = 0, \\ u_{it} + (u_i^2/2 + p_i)_x = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$u_{nt} + \left(\frac{1}{2} u_n^2 + p_n\right)_x + \frac{\beta^-}{3h_n} \left(h_n^2 \frac{d_n^2 h}{dt^2}\right)_x = f_n, \quad w_t + \left(\frac{1}{2} w^2 + p\right)_x + \frac{\beta^+}{3\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right)_x = f,$$

где

$$p_i = p + \sum_{j=1}^{i-1} b_j h_j + b_i \sum_{j=i}^n h_j, \quad b_i = \frac{\rho_i - \rho_0}{\rho_0} g, \quad \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_n, \quad \frac{\rho_n - \rho_0}{\rho_0} \ll 1,$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d_n}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_n \frac{\partial}{\partial x},$$

$u_i$  — скорость в  $i$ -м слое;  $w$  — скорость в верхнем слое;  $p$  — модифицированное давление на верхней крышке;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta^\pm \equiv \text{const}$ . Функции  $f_i, f$  представляют собой диссипативные члены и конкретизируются ниже.

При  $n = 1$  система (1) является вариантом двухслойной сильнонелинейной модели [6] в приближении Буссинеска. Трехслойная модель ( $n = 2$ ) с гидростатической прослойкой, исследованная и верифицированная в [5, 7, 10], использовалась для построения стационарных и нестационарных внутренних волн первой и второй мод. В общем случае рассматриваемая модель пригодна для описания нелинейных волновых процессов на границе раздела однородных слоев различной плотности с учетом изменения плотности и сдвига скорости в прослойке.

Одной из форм распространения нелинейных возмущений в стратифицированных жидкостях являются уединенные волны. При  $n = 1$  в модели (1) такие волны описываются однопараметрическим семейством солитонообразных решений. При  $n > 1$  соответствующие решения можно построить только для дискретного набора определяющих параметров [7].

Следующим шагом в направлении упрощения модели, позволяющим получить однопараметрическое семейство солитонов в многослойной жидкости, является дополнительное предположение о гидростатическом распределении давления в (1) в нижнем слое ( $\beta^- = 0$ ). Этот подход использован при моделировании придонных и приповерхностных внутренних волн большой амплитуды в рамках трехслойной модели течения ( $n = 2$ ) [7].

Рассмотрим модель (1) с  $\beta^- = 0$ ,  $\beta^+ = 1$ . Уравнения (1) запишем в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} h_{it} + (h_i u_i)_x &= 0, & u_{it} + (u_i^2/2 + p_i)_x &= f_i, & i &= 1, \dots, n, \\ R_t + (Rw - w^2/2 + p - \zeta^2 w_x^2/2)_x &= f, \end{aligned} \quad (2)$$

$$R = w - \frac{1}{3\zeta} (\zeta^3 w_x)_x, \quad \zeta = H - \sum_{j=1}^n h_j, \quad w = \frac{1}{\zeta} \left( \bar{Q}(t) - \sum_{j=1}^n h_j u_j \right),$$

удобной для численного расчета нестационарных течений ( $\bar{Q} = \bar{Q}(t) = \sum_{j=1}^n h_j u_j + \zeta w$  — полный расход жидкости в канале, задаваемый граничными условиями). Для трехслойного течения ( $n = 2$ ) верификация численных решений (1), (2) проведена в [7, 11]. В настоящей работе ограничимся рассмотрением структуры стационарных решений (2).

**Бегущие волны.** Рассмотрим уравнения (2), зависящие от переменной  $\xi = x - Dt$ ,  $D = \text{const}$ . Поскольку модель инвариантна относительно преобразования Галилея, без ограничения общности можно исследовать случай стационарных решений ( $D = 0$ ).

Уравнения стационарного течения можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для этого достаточно найти скорости  $w$ ,  $u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) из соотношений

$$\zeta w = Q = \text{const}, \quad h_i u_i = Q_i = \text{const}, \quad \bar{Q} = Q + \sum_{j=1}^n Q_j$$

и производные  $h'_i$  (штрих означает производную по  $x$ ):

$$h'_1 = \frac{h_1^3}{Q_1^2} (p' - b_1 \zeta' - f_1) = a_1 p' + c_1, \quad a_1 = \frac{h_1^3}{Q_1^2}, \quad c_1 = -\frac{h_1^3}{Q_1^2} (b_1 \zeta' + f_1). \quad (3)$$

Аналогичным образом находим производные при  $k = 2, \dots, n$ :

$$h'_k = a_k p' + c_k, \quad a_k = \frac{h_k^3}{Q_k^2} \left( \sum_{j=1}^{k-1} a_j (b_j - b_k) + 1 \right), \quad c_k = \frac{h_k^3}{Q_k^2} \left( \sum_{j=1}^{k-1} c_j (b_j - b_k) - b_k \zeta' - f_k \right). \quad (4)$$

Поскольку правые части в (2) описывают трение между слоями, функции  $f_i$ ,  $f$  имеют вид

$$f = -\frac{c_L(w - u_1)|w - u_1|}{\zeta}, \quad f_1 = -\frac{c_L((u_1 - w)|u_1 - w| + (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|)}{h_1},$$

$$f_i = -\frac{c_L((u_i - u_{i+1})|u_i - u_{i+1}| + (u_i - u_{i-1})|u_i - u_{i-1}|)}{h_i}, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$f_n = -\frac{c_L(u_n - u_{n-1})|u_n - u_{n-1}|}{h_n}, \quad c_L \equiv \text{const}.$$

Далее из (3), (4) находим  $p'$ :

$$0 = \left(\zeta + \sum_{j=1}^n h_j\right)' = \zeta' + \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)p' + \sum_{j=1}^n c_j, \quad (5)$$

$$p' = -\left(\zeta' + \sum_{j=1}^n c_j\right) / \sum_{j=1}^n a_j = F(\zeta', h_1, \dots, h_n).$$

Из уравнения импульса для верхнего слоя в (2) получаем

$$\zeta''' = \frac{3\zeta}{Q^2} \left(f + \frac{Q^2 \zeta'}{\zeta^3} - p'\right) + \frac{2\zeta' \zeta''}{\zeta} - \frac{\zeta'^3}{\zeta^2}. \quad (6)$$

Исключая  $p'$  из (5), (6), имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\zeta' = q, \quad q' = z, \quad z' = \frac{3\zeta}{Q^2} \left(f + \frac{Q^2}{\zeta^3} q - F\right) + \frac{2qz}{\zeta^2} - \frac{q^3}{\zeta^3}, \quad (7)$$

$$h'_i = a_i F + c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Уравнения (7) можно использовать для описания как уединенных волн, так и нелинейных волновых пакетов.

**Уединенные волны.** Рассмотрим структуру бегущих волн в бездиссипативной среде ( $c_L = 0$ ). В этом случае система (2) является однородной ( $f = 0$ ,  $f_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) и ее решение можно найти в квадратурах. Вновь будем полагать, что  $D = 0$ , т. е. рассматриваются стационарные волны.

Обозначим верхним индексом "0" одно из состояний потока в стационарном течении. Тогда, используя (2), произвольное состояние волны представим в следующем виде:

$$Q = \zeta^0 w^0, \quad J = (w^0)^2/2 + p^0, \quad Q_i = h_i^0 u_i^0, \quad J_i = (u_i^0)^2/2 + p_i^0, \quad (8)$$

$$p_i^0 = b_i \sum_{j=i}^n h_j^0 + \sum_{j=1}^{i-1} b_j h_j^0 + p^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad p^0 = 0.$$

Все величины в (8), описывающие стационарное течение, выразим через  $h = h_n$ . При этом величины  $b_i$  постоянны и считаются заданными ( $b = b_n$ ). При  $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$  последовательно вычисляем параметры течения:

$$u_n = \frac{Q_n}{h}, \quad u_i^2 = 2 \left( J_i - J_{i+1} + \frac{1}{2} u_{i+1}^2 - (b_i - b_{i+1}) \sum_{j=i+1}^n h_j \right), \quad h_i = \frac{Q_i}{u_i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, получаем

$$u_i = u_i(h), \quad h_i = h_i(h), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\zeta = H - \sum_{j=1}^n h_j = \zeta(h), \quad p = J_n - \frac{1}{2} u_n^2 - \sum_{j=1}^n b_j h_j = p(h), \quad p^0 = 0.$$

Далее находим

$$J = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\zeta^2} + p + \frac{Q^2}{3\zeta^2} (\zeta\zeta'' + \zeta'^2) - \frac{Q^2}{\zeta^2} \zeta'^2, \quad (9)$$

$$\zeta'' = \frac{3\zeta}{Q^2} \left( J - \frac{Q^2}{2\zeta^2} + \frac{Q^2}{6\zeta^2} \zeta'^2 - p \right) = \Phi(\zeta(h)) = \Phi_1(h).$$

Интегрируя уравнение (9) на участке монотонности функции  $\zeta = \zeta(h)$ , получаем решение в виде

$$(\zeta^{-1/2}\zeta')^2 = \int_{\zeta^0}^{\zeta} \frac{2\Phi(s)}{s^2} ds = \Psi(\zeta) = \int_{h^0}^h \frac{2\Phi_1(r)}{\zeta^2(r)} d\zeta(r) = \Psi_1(h),$$

или

$$\zeta'^2 = \zeta\Psi(\zeta). \quad (10)$$

В зависимости от поведения функции  $\Psi(\zeta)$  ( $\Psi(\zeta) \geq 0$ ) решение (10) может либо быть периодическим, либо представлять собой уединенные волны. Для построения периодического решения достаточно найти интервал  $(\zeta_1, \zeta_2)$ , такой что  $\Psi(\zeta) > 0$  при  $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$  и  $\Psi(\zeta_1) = 0$ ,  $\Psi(\zeta_2) = 0$ . Профиль волны задается уравнением

$$x = x_0 \pm \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{ds}{(s\Psi(s))^{1/2}}.$$

Уединенные волны (солитоны) реализуются в случае, когда один из корней  $\zeta_1, \zeta_2$  является кратным. В случае кратности каждого из корней  $\zeta_1, \zeta_2$  имеет место гладкий переход от одного равномерного потока к другому (гладкий бор). В общем случае структура уединенных волн зависит от большого числа параметров, в безразмерных переменных ( $H = 1$ ,  $g = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ) — от параметров  $h_i^0, u_i^0, b_i, i = 1, \dots, n$ .

Полная классификация уединенных волн в потоке без сдвига скорости проведена в [12] для двухслойного течения ( $n = 1$ ). В этом случае определяющими параметрами для уединенных волн являются параметр  $\zeta^0$  и число Фруда  $\text{Fr} = D$  (безразмерные переменные), причем при  $0 < \text{Fr} < 1/2$  реализуются солитоны, а при  $\text{Fr} = 1/2$  — гладкий бор. Заметим, что в рассматриваемой модели выбор верхнего и нижнего слоев не является равноправным. Учет негидростатичности только в верхнем слое позволяет описать придонные волны повышения. При моделировании приповерхностных волн полученную картину течения достаточно отразить симметрично относительно средней линии канала. В приближении Буссинеска это соответствует одновременной замене положительного направления вертикальной оси  $y$  на отрицательное и знака “+” у величины плавучести  $b$  на знак “-” [12].

На рис. 2 в безразмерных переменных показана приповерхностная уединенная волна в многослойной покоящейся жидкости ( $h_5^0 = 0,82$ ,  $b_5 = 1$ ,  $b_{i+1} - b_i = 0,2$ ,  $h_{i+1}^0 - h_i^0 = 0,02$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ). Решение зависит от числа Фруда  $\text{Fr} = D/\sqrt{bH} = D$ . При увеличении числа Фруда от значения  $\text{Fr} = 0,48$  (см. рис. 2,а) до некоторого критического значения уединенная волна превращается в столообразную волну с уплощенной средней частью. На рис. 2,б показана столообразная волна для значения числа Фруда  $\text{Fr} = 0,484386$ . При  $\text{Fr} \rightarrow \text{Fr}_* \simeq 0,4843869$  волна распадается на два гладких бора, распространяющихся в противоположных направлениях.

**Внутренние волны большой амплитуды в шельфовой зоне моря.** Структура наблюдаемых нелинейных внутренних волн в прибрежных водах морей очень разнообразна и зависит прежде всего от положения основного термоклина (пикноклина) относительно

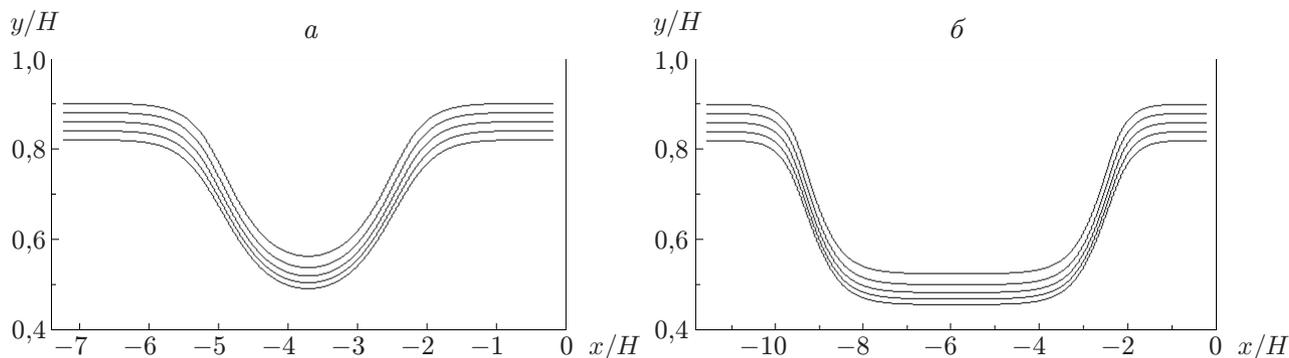


Рис. 2. Приповерхностная уединенная волна в покоящейся многослойной жидкости при различных значениях числа Фруда:

*a* —  $Fr = 0,483$ , *б* —  $Fr = 0,484386$

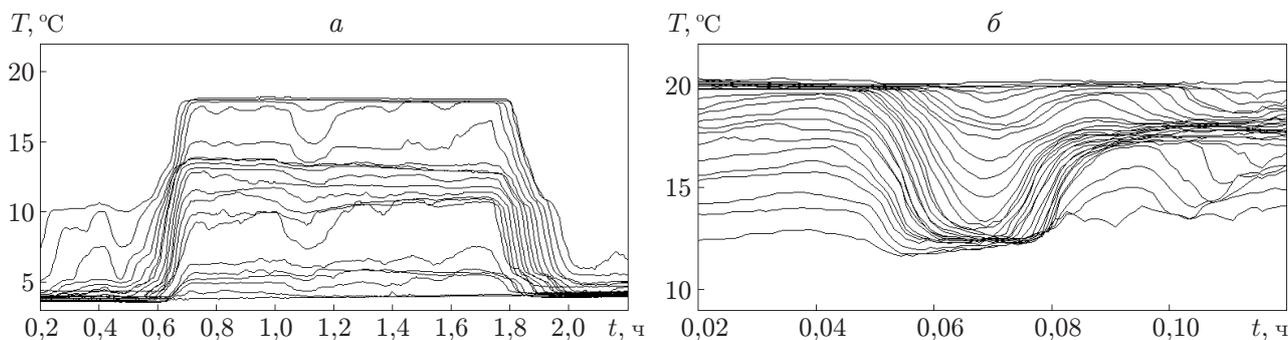


Рис. 3. Изменение температуры во внутренней волне в шельфовой зоне:

*a* — столообразная волна, *б* — волна повышения в линейно стратифицированном придонном слое

дна. В глубоководных частях шельфовой зоны наблюдаются волны понижения, которые по мере приближения к береговой линии меняют полярность и трансформируются в придонные волны повышения. Математические модели (1) и (2) пригодны для описания таких волн, в случае если длина волны существенно больше глубины.

Трансформация нелинейных внутренних волн в зоне “заплеска”, т. е. в зоне, расположенной выше линии контакта основного пикноклина с дном, является объектом интенсивных исследований [3–5]. Одним из эффективных инструментов исследования динамики внутренних волн в шельфовой зоне являются кабельные или автономные донные станции, оснащенные цепочками термисторов, которые размещаются вертикально с заданным шагом. Методика проведения экспериментов и соответствующие измерительные системы описаны в [13, 14]. Используемые измерительные системы регистрируют изменения температуры на различной глубине при прохождении внутренних волн (рис. 3). На рис. 3, *a* приведен фрагмент записи донными станциями столообразной волны ( $H = 30$  м, 20 датчиков, расположенных вертикально с шагом, равным 1 м), на рис. 3, *б* показана придонная уединенная волна с начальным распределением температуры перед фронтом волны, близким к линейному ( $H = 20$  м, 30 датчиков, расположенных вертикально с шагом, равным 0,5 м). Видно, что даже исходные данные записи температуры на различных горизонтах являются эффективным инструментом анализа внутренних волн. Однако для сравнения натуральных данных с результатами расчетов по многослойной математической модели (2) целесообразно определить по полученным экспериментальным данным поведение изотерм,

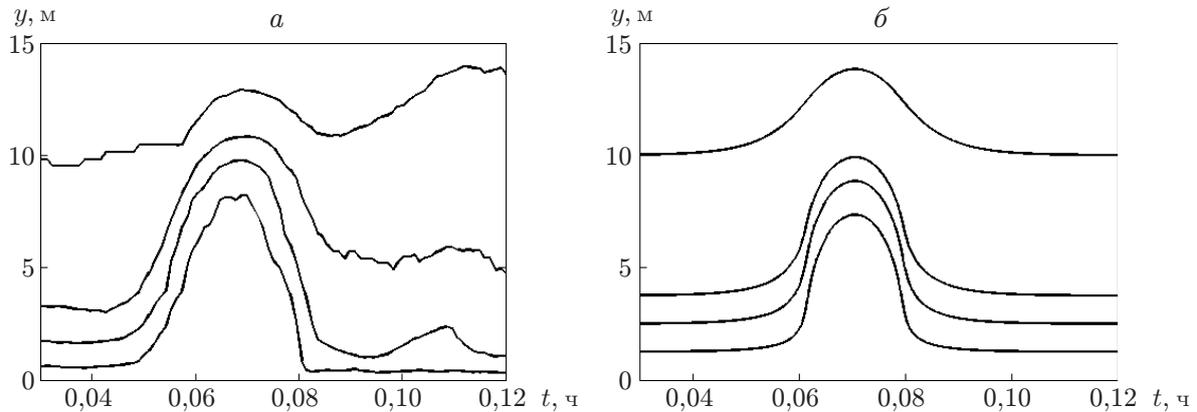


Рис. 4. Изотермы в придонной уединенной волне большой амплитуды:  
*a* — с шагом  $2^\circ\text{C}$  для уединенной волны, показанной на рис. 3, *б* — соответствующее численное решение (2) при  $n = 4$

поскольку именно изотермы соответствуют границам выбранных в рамках модели слоев равной плотности (влияние изменения солености при прохождении внутренних волн не учитывается, так как на рассматриваемом полигоне соленость меняется незначительно).

Заметим, что поведение изотерм для волны, показанной на рис. 3, *a*, качественно описывается решением (2) (см. рис. 2, *б*). Однако в этом случае аналогичное решение можно получить при меньшем числе слоев ( $n = 1$  или  $n = 2$ ) в силу того, что начальная стратификация близка к двухслойной. Для волны, показанной на рис. 3, *б*, температура и, следовательно, плотность жидкости меняются в придонном слое достаточно большой толщины. Поэтому рассмотрим возможность использования многослойной модели (2) для этого случая более подробно.

На рис. 4, *a* представлены изотермы, построенные с шагом  $2^\circ\text{C}$  для уединенной волны, показанной на рис. 3, *б*. Результаты соответствующего численного решения (2) при  $n = 4$  приведены на рис. 4, *б*. Заметим, что модель (2) описывает только структуру внутренней волны первой моды, поэтому при  $c_L = 0$  построенное решение представляет собой симметричный солитон. В реальных условиях уединенная волна распространяется по течению со сдвигом скорости и генерирует высшие моды. Тем не менее численный расчет позволяет получить качественные и амплитудные характеристики изотерм в зарегистрированной волне.

Внутренние волны с амплитудой, достигающей нескольких сотен метров, регулярно наблюдаются в тропических морях [1], структура термоклина в которых существенно отличается от двухслойной. Поэтому использование уравнений многослойной мелкой воды с достаточно большим числом слоев для моделирования уединенных волн и волновых пакетов является оправданным.

На рис. 5 приведено распределение плотности в приповерхностной уединенной волне, зарегистрированной в Южно-Китайском море (см. рис. 9 в [15]). Использование математической модели позволяет получить достаточно точные результаты, так как амплитуда волны существенно больше начальной толщины приповерхностного однородного слоя.

Придонные и приповерхностные уединенные волны встречаются в реальных условиях достаточно часто, однако нелинейные возмущения в стратифицированной по плотности жидкости в основном распространяются в виде волновых боров. Волновой бор представляет собой пакет нелинейных внутренних волн, убывающих по амплитуде и существенно меняющих начальную стратификацию за фронтом волны [16]. В системе координат,

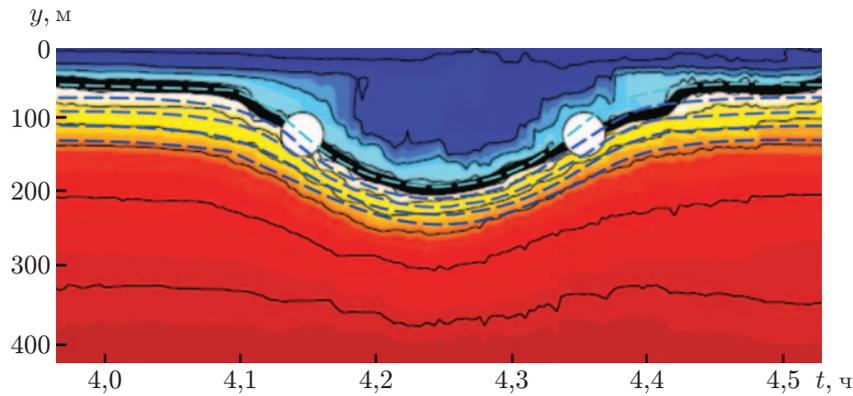


Рис. 5. Распределение плотности в приповерхностной уединенной волне, зарегистрированной в Южно-Китайском море [15]:

сплошные линии — изопикны (линии равной плотности), жирная линия — положение максимума градиента плотности, штриховые линии — соответствующее решение (7) при  $n = 5$

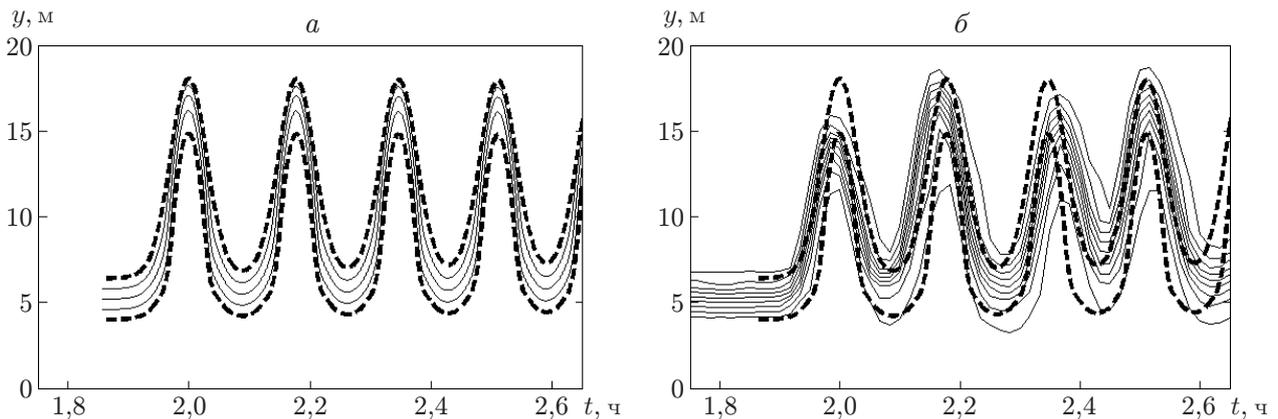


Рис. 6. Изотермы в волновом боре в многослойной жидкости (сплошные линии) и рассчитанные границы однородных слоев при прохождении волнового пакета (штриховые линии):

$a$  — решение (7) при  $n = 5$ ,  $Fr = 0,485$ ,  $c_L = 0,004$ ,  $H = 40$  м,  $b = 0,02$  м/с<sup>2</sup>,  $h^0 = h_5^0 = 4$  м,  $\zeta^0 = 33,6$  м,  $b$  — зарегистрированный волновой пакет

движущейся с фронтом возмущения, волновой пакет не является стационарным, но на относительно небольших участках распространения можно рассматривать его как квазистационарный и использовать уравнения (7) для расчета характеристик волнового пакета.

На рис. 6,  $a$  приведено стационарное решение, описывающее формирование придонного волнового бора в покоящейся двухслойной жидкости с прослойкой конечной толщины, разбитой на несколько слоев равной плотности. Решение получено при  $n = 5$ ,  $Fr = 0,485$ ,  $c_L = 0,004$ ,  $H = 40$  м,  $b = 0,02$  м/с<sup>2</sup>,  $h^0 = h_5^0 = 4$  м,  $\zeta^0 = 33,6$  м и равномерном начальном распределении толщин и плотности в прослойке. На рис. 6,  $b$  с шагом, равным 1 °С, представлены изотермы, зарегистрированные одной из донных станций. Результаты сравнения экспериментальных и расчетных данных показывают, что течение в наблюдаемом волновом боре не описывается точно бегущей волной, однако стационарное решение (7) адекватно описывает фазовые и амплитудные характеристики волнового пакета.

**Заключение.** Использование многослойной модели мелкой воды в рамках первого приближения (гидростатическое распределение давления во всех слоях равной плотности) имеет существенное ограничение, обусловленное потерей гиперболичности уравнений движения при увеличении сдвига скорости в слоях. Учет дополнительных членов, зависящих от вертикального ускорения жидкости во внешних слоях, в (1) позволяет использовать модель для расчета внутренних волн первой и второй моды и их взаимодействия в нестационарных течениях, не проводя анализа гиперболичности равновесной системы.

Использование упрощенной модели (2) позволяет получить достаточно широкий класс точных решений и даже в случае многослойной жидкости найти решения в квадратурах, описывающие распространение приповерхностных и придонных уединенных волн. Результаты проведенного сравнения с данными натуральных наблюдений показывают, что модель (2) является эффективным инструментом расчета уединенных волн и волновых боров большой амплитуды.

Основной особенностью уравнений (1), (2), описывающих многослойные течения, является возможность в рамках достаточно простой математической модели учитывать влияние тонкой структуры термоклина (распределения скорости и плотности в прослойке) на распространение нелинейных внутренних волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Helfrich K. R., Melville W. K.** Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425. DOI: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129.
2. **Новотрясов В. В., Пермяков М. С.** Экспериментально-теоретическое определение предельной амплитуды и минимальной длительности уединенных волн в слабодиспергирующем мелком море // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 3. С. 67–72.
3. **Scotti A., Pineda J.** Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L22307. DOI: 10.1029/2004GL021052.
4. **Bourgault D., Blokhina M. D., Mirshak R., Kelley D. E.** Evolution of a shoaling internal solitary wavetrain // *Geophys. Res. Lett.* 2007. V. 34. L03601. DOI: 10.1029/2006GL028462.
5. **Кукарин В. Ф., Ляпидевский В. Ю., Навроцкий В. В., Храпченков Ф. Ф.** Эволюция внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря // *Фундам. и прикл. гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 2. С. 35–45.
6. **Choi W., Camassa R.** Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 386. P. 1–36. DOI: 10.1017/S0022112099005820.
7. **Liapidevskii V., Gavrilov N.** Large internal solitary waves in shallow waters // *The ocean in motion: circulation, waves, polar oceanography* / Ed. by M. G. Velarde, R. Yu. Tarakanov, A. V. Marchenko. S. l.: Springer Oceanography, 2018. P. 87–108. DOI: 10.1007/978-3-319-71934-4\_9.
8. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л., Морозов Е. Г. и др.** Внутренние стационарные волны в глубоководных стратифицированных течениях // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 2. С. 74–83.
9. **Choi W.** Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves // *Proc. of the 4th Intern. conf. on hydrodynamics, Yokohama, 7–9 Sept. 2000* / Ed. by Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki. Yokohama: S. n., 2000. P. 453–458.
10. **Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А.** Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом // *Фундам. и прикл. гидрофизика.* 2015. Т. 8, № 3. С. 32–43.
11. **Ляпидевский В. Ю., Новотрясов В. В., Храпченков Ф. Ф., Яроцук И. О.** Внутренний волновой бор в шельфовой зоне моря // *ПМТФ.* 2017. Т. 58, № 5. С. 60–71. DOI: 10.15372/PMTF20170506.

12. **Gavrilov N., Liapidevskii V., Gavrilova K.** Large amplitude internal solitary waves over a shelf // *Natural Hazards Earth System Sci.* 2011. V. 11. P. 17–25. DOI: 10.5194/nhess-11-17-2011.
13. **Novotryasov V. V., Stepanov D. V., Yaroshchuk I. O.** Observations of internal undular bores on the Japan / East Sea shelf-coastal region // *Ocean Dynamics.* 2016. V. 66. P. 19–25.
14. **Леонтьев А. П., Ярощук И. О., Смирнов С. В. и др.** Пространственно-распределенный измерительный комплекс для мониторинга гидрофизических процессов на океаническом шельфе // *Приборы и техника эксперимента.* 2017. № 1. С. 128–135. DOI: 10.7868/S0032816216060227.
15. **Lien R.-Ch., Hanyey F., Ma B., Yang Y. J.** Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetic // *J. Phys. Oceanography.* 2014. V. 44, N 4. P. 1095–1115. DOI: 10.1175/JPO-D-13-088.1.
16. **Кукарин В. Ф., Ляпидевский В. Ю., Храпченков Ф. Ф., Ярощук И. О.** Нелинейные внутренние волны в шельфовой зоне моря // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 3. С. 38–47.

*Поступила в редакцию 29/VII 2019 г.,  
после доработки — 29/VII 2019 г.  
Принята к публикации 29/VII 2019 г.*

---