

**ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ  
И АНАЛИЗ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ  
АНТИСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ**

*В. В. Мадорский, Ю. А. Устинов*

(Ростов-на-Дону)

В ряде работ (например, [1, 2]) колебания пластин (плит) из пьезоэлектрических материалов исследуются на основе приближенных двумерных уравнений. Область применения таких уравнений практически не изучена. Однако из характера их построения вытекает, что они плохо приспособлены для исследования высокочастотных колебаний тонких и толстых плит, не в состоянии описать явление краевого резонанса и т. п. Сравнения с экспериментами [3] порою дают значительные расхождения даже для достаточно низких частот. Исследование области применимости таких двумерных теорий (например, по параметру относительной толщины  $\epsilon = h/a$  и частоте  $\Omega$ ) требует анализа задачи на основе трехмерных уравнений электроупругости. В классической теории упругости аналогичная проблема анализировалась на основе совместного применения метода однородных решений и асимптотического метода [4].

Как известно, в динамических задачах построение однородных решений для пластин (плит) связано с определением корней дисперсионного уравнения. Дисперсионное уравнение при рассмотрении плоской задачи электроупругих колебаний при условии, что вектор внешних усилий равен нулю на лицевых поверхностях пластины, и равенств нормальных составляющих электрической индукции и тангенциальных составляющих электрического поля на границе пьезоэлектрик — вакуум, было получено в [5]. Путем приближенного решения этого уравнения найдены зависимости фазовой скорости от частоты для первых двух нижайших мод симметричных и антисимметричных типов колебаний соответственно. Для круглого пьезоактивного волновода вещественные корни дисперсионного уравнения для нормальных волн осесимметричного типа исследованы в [6].

Данная работа посвящена построению системы однородных решений антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты произвольной в плане.

1. Обозначим через  $A$  область, занятую цилиндром (плитой),  $\Gamma$  — его боковая поверхность,  $S$  — срединная поверхность,  $2h$  — толщина,  $b$  — характерный линейный размер плиты. Отнесем  $A$  к декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  с началом на  $S$  и осью  $x_3$ , параллельной образующей цилиндра. Будем считать, что материал плиты — предварительно поляризованная керамика класса  $C_{6v} \equiv 6mm$  с осью поляризации, параллельной оси  $x_3$ . Торцы плиты полностью покрыты электродами бесконечно малой толщины, которые закорочены.

Основываясь на соотношениях [2], уравнения колебаний плиты можно записать в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &(\rho\omega^2 + c_{11}\Delta + c_{66}\partial_2^2 - c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2) u_1 + (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 u_2 + \\ &+ (c_{44} + c_{13})\partial_1\partial_3 u_3 + (e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3\varphi = 0; \\ &(\rho\omega^2 + c_{66}\Delta + c_{44}\partial_3^2) u_2 + (c_{66} + c_{12})\partial_1\partial_2 u_1 + (c_{11} - c_{66})\partial_2^2 u_2 + \\ &+ (c_{44} + c_{13})\partial_2\partial_3 u_3 + (e_{31} + e_{15})\partial_2\partial_3\varphi = 0; \\ &(c_{44} + c_{13})(\partial_1\partial_3 u_1 + \partial_2\partial_3 u_2) + (\rho\omega^2 + c_{44}\Delta + c_{33}\partial_3^2) u_3 + (e_{15}\Delta + e_{33}\partial_3^2)\varphi = 0; \\ &(e_{15} + e_{31})(\partial_1\partial_3 u_1 + \partial_2\partial_3 u_2) + (e_{15}\Delta + e_{33}\partial_3^2) u_3 - (\epsilon_{11}\Delta + \epsilon_{33}\partial_3^2)\varphi = 0; \\ &\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \end{aligned}$$

где  $U_i = u_i e^{j\omega t}$  — компоненты вектора перемещений;  $\varphi$  — потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности соотношением  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ ;  $c_{mn}$  — упругие постоянные;  $e_{mn}$  — пьезоконстанты;  $\epsilon_{mn}$  — диэлектрические проницаемости.

На торцах при  $x_3 = \pm h$  заданы следующие условия:

$$(1.2) \quad t_{3i}(x, \pm h) = 0; \varphi(x, \pm h) = C; x = \{x_1, x_2\},$$

где  $t_{ni}$  — амплитуды механических напряжений;  $C \equiv \text{const}$ .

Будем считать, что  $C = 0$ , поскольку не представляется трудным построить частное решение уравнений (1.1), не зависящее от  $x$  и удовлетворяющее условию  $C \neq 0$ . Решения уравнений (1.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям (1.2), назовем однородными решениями.

Инвариантность уравнений (1.1) и граничных условий (1.2) от группы поворота относительно  $x_3$  позволяет упростить исходную задачу. Действительно, представим плоское поле  $\{u_1, u_2\}$  в виде

$$(1.3) \quad u_1 = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi; u_2 = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi.$$

Очевидно, что такое представление всегда возможно. Подстановка (1.3) в (1.1) позволяет расчленить исходную задачу на следующие две:

$$(1.4) \quad L(\Delta) \mathbf{V} = 0, \quad \{M(\Delta) \mathbf{V}\}_{x_3 = \pm h} = 0;$$

$$(1.5) \quad H(\Delta) \Psi \equiv (c_{44} \partial_3^2 + c_{66} \Delta + \rho \omega^2) \Psi = 0; \quad \{\partial_3 \Psi\}_{x_3 = \pm h} = 0,$$

где  $\mathbf{V} = \{\Phi, u_3, \varphi\}$  — вектор-функция;  $L, M$  — матричные операторы вида

$$(1.6) \quad L = \begin{pmatrix} \rho \omega^2 + c_{11} \Delta + c_{44} \partial_3^2 & (c_{41} + c_{13}) \partial_3 & (e_{15} + e_{31}) \partial_3 \\ \partial_3 (c_{44} + c_{13}) \Delta & \rho \omega^2 + c_{33} \partial_3^2 + c_{44} \Delta & e_{15} \Delta + e_{33} \partial_3^2 \\ \partial_3 (e_{15} + e_{31}) \Delta & e_{15} \Delta + e_{33} \partial_3^2 & -(e_{11} \Delta + \epsilon_{33} \partial_3^2) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} c_{44} \partial_3 & c_{44} & e_{15} \\ c_{11} \Delta & c_{33} \partial_3 & e_{33} \partial_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем понятие элементарных решений первого и второго рода. Для этого будем отыскивать решения задач (1.4), (1.5) в виде

$$(1.7) \quad V = v(x_3) m(x); (\Delta + a^2) m = 0; v = \{v_1, v_2, v_3\};$$

$$\Psi = \psi(x_3) n(x); (\Delta + k^2) n = 0.$$

Введем безразмерные координаты и величины по формуле

$$(1.8) \quad \xi = x_3/h; \eta = x_2/b; \xi = x_1/b; \epsilon = h/b;$$

$$\Omega^2 = \rho \omega^2 h^2 / c_{44}; \alpha = ah; \lambda = kh.$$

Подставляя (1.7) в (1.4), (1.5) и учитывая (1.8), после разделения переменных получаем спектральные задачи

$$(1.9) \quad L(-\alpha^2) v = 0; \{M(-\alpha^2) v\}_{\xi = \pm 1} = 0;$$

$$(1.10) \quad H(-\lambda^2) \psi = 0; \{\psi, \xi\}_{\xi = \pm 1} = 0.$$

Как будет видно ниже, задачи (1.9), (1.10) имеют дискретный спектр. Пусть  $\{\alpha_k\}$  — спектр задачи (1.9), а  $\{\lambda_j\}$  — спектр задачи (1.10). Каждой из точек спектра соответствуют решения вида

$$(1.11) \quad V_k = v_k m_k; (\epsilon^2 \nabla^2 + \alpha_k) m_k = 0; \nabla^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2;$$

$$(1.12) \quad \Psi_j = \psi_j n_j; (\epsilon^2 \nabla^2 + \lambda_j) n_j = 0.$$

Решение (1.11) назовем элементарным решением первого рода, (1.12) — элементарным решением второго рода. В совокупности они определяют полную систему однородных решений, позволяющую удовлетворить произвольным граничным условиям на боковой поверхности.

2. Рассмотрим спектральные задачи (1.9), (1.10). Задача (1.10) решается просто и описывается системой соотношений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi_j &= h^{-1/2} \cos \gamma_j x_3; \sin \gamma_j h = 0; j = 0, 2, 4, \dots; \\ \psi_j &= h^{-1/2} \sin \gamma_j x_3; \cos \gamma_j h = 0, j = 1, 3, 5, \dots; \\ \gamma_j^2 &= c_{44}^{-1} (c_{66} h_j^2 - \rho \omega^2). \end{aligned}$$

Система собственных функций (2.1) — полная ортонормированная система.

Значительно более трудной оказывается задача (1.9), символическая запись которой содержит в себе систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и однородные граничные условия. Общее решение системы уравнений имеет вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= \sum_{i=1}^3 h_i \beta_i [A_i \operatorname{sh}(\beta_i \zeta) + B_i \operatorname{ch}(\beta_i \zeta)]; \\ v_2 &= \sum_{i=1}^3 e_i [A_i \operatorname{ch}(\beta_i \zeta) + B_i \operatorname{sh}(\beta_i \zeta)]; \\ v_3 &= \sum_{i=1}^3 [A_i \operatorname{ch}(\beta_i \zeta) + B_i \operatorname{sh}(\beta_i \zeta)], \end{aligned}$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — произвольные постоянные;  $\beta_i$  — корни характеристического уравнения

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \beta^6 + P\beta^4 + Q\beta^2 + R &= 0; \\ P &= N_1 \Omega^2 - N_2 \alpha^2; \quad Q = D_1 \Omega^4 - D_2 \Omega^2 \alpha^2 + D_3 \alpha^4; \\ R &= -\alpha^2 (C_1 \Omega^4 - C_2 \Omega^2 \alpha^2 + C_3 \alpha^4); \\ N_1 &= c_{44} [(c_{33} + c_{44}) \varepsilon_{33} + e_{33}^2] / G; \quad D_1 = c_{44}^2 \varepsilon_{33} / G; \\ N_2 &= [c_{33} (c_{11} \varepsilon_{33} + c_{44} \varepsilon_{11}) + c_{33} (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{44} (e_{31} e_{33} + c_{13} \varepsilon_{33}) - \\ &\quad - 2c_{13} e_{33} (e_{15} + e_{31}) - c_{13}^2 \varepsilon_{33}] / G; \quad G = c_{44} (\varepsilon_{33} c_{33} + e_{33}^2); \\ D_2 &= c_{44} [(c_{44} + c_{11}) \varepsilon_{33} + (c_{44} + c_{33}) \varepsilon_{11} + (e_{31} + e_{15})^2 + 2e_{15} e_{33}] / G; \\ D_3 &= [c_{44} (c_{11} \varepsilon_{33} + e_{31}^2) + c_{11} (c_{33} \varepsilon_{11} + 2e_{15} e_{33}) - c_{13}^2 \varepsilon_{11} - 2c_{13} \times \\ &\quad \times (c_{44} \varepsilon_{11} + e_{31} e_{15} + e_{15}^2)] / G; \quad C_1 = c_{44}^2 \varepsilon_{11} / G; \\ C_2 &= [(c_{44} + c_{11}) \varepsilon_{11} + e_{15}^2] c_{44} / G; \\ C_3 &= c_{11} (c_{44} \varepsilon_{11} + e_{15}^2) / G; \\ e_i &= \frac{(c_{44} + c_{13}) (\varepsilon_{33} \beta_i^2 - \varepsilon_{11} \alpha^2) + (e_{31} + e_{15}) (e_{33} \beta_i^2 - e_{15} \alpha^2)}{(c_{44} + c_{13}) (\varepsilon_{33} \beta_i^2 - e_{15} \alpha^2) - (e_{31} + e_{15}) (c_{33} \beta_i^2 + c_{44} \Omega^2 - c_{44} \alpha^2)}; \\ h_i &= \frac{(c_{44} + c_{13}) e_i + (e_{31} + e_{15})}{c_{44} (\Omega^2 + \beta_i^2) - c_{11} \alpha^2}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что задача (1.10) чисто упругая и ее решение (2.1) не содержит характеристик электрического поля, а задача (1.9) является

связной и в выражениях (2.2), (2.3) содержатся все постоянные материала. Связность задачи и определяет ее сложность.

Общее решение (2.2) расщепляется на симметричное  $A_i = 0$  и антисимметричное  $B_i = 0$ . Рассмотрим антисимметричное решение, что соответствует изгибным колебаниям плиты.

Удовлетворяя однородным граничным условиям, получаем дисперсионное уравнение

$$(2.4) \quad f(\alpha, \Omega) \equiv \begin{vmatrix} a_1 \operatorname{sh} \beta_1 & a_2 \operatorname{sh} \beta_2 & a_3 \operatorname{sh} \beta_3 \\ b_1 \operatorname{ch} \beta_1 & b_2 \operatorname{ch} \beta_2 & b_3 \operatorname{ch} \beta_3 \\ \operatorname{ch} \beta_1 & \operatorname{ch} \beta_2 & \operatorname{ch} \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$(2.5) \quad \begin{aligned} a_i &= (-c_{13}\alpha^2 h_i + c_{33}e_i + e_{33})\beta_i; \\ b_i &= \alpha [c_{44}(h_i\beta_i^2 + e_i) + e_{15}]. \end{aligned}$$

Корни этого уравнения и определяют систему элементарных решений первого рода. Собственное решение задачи (1.9), соответствующее точке спектра  $\alpha_k$ , имеет вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v_1^{(k)} &= \sum_{i=1}^3 A_i^{(k)} h_i^{(k)} \beta_i^{(k)} \operatorname{sh}(\beta_i^{(k)} \zeta), \\ v_2^{(k)} &= \sum_{i=1}^3 A_i^{(k)} e_i^{(k)} \operatorname{ch}(\beta_i^{(k)} \zeta), \\ v_3^{(k)} &= \sum_{i=1}^3 A_i^{(k)} \operatorname{ch}(\beta_i^{(k)} \zeta). \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение (2.4) может быть переписано в более привычной форме

$$(2.7) \quad \sum_{n=1}^3 M_n \operatorname{th} \beta_n = 0.$$

3. Разобьем предварительно корни уравнения (2.4) на две группы: вещественные и комплексные. Однородные решения, соответствующие комплексным корням, при малых  $\varepsilon$  имеют характер погранслоя, а однородные решения, соответствующие вещественным корням, описывают внутренние механические и электрические поля. Исследуем поведение корней уравнения (2.4) при малых значениях параметра  $\Omega$ , воспользовавшись для этого методом возмущения [7]. Запишем уравнение (1.9) в виде

$$(3.1) \quad L(-\alpha^2)v \equiv [L_0(-\alpha^2) + \Omega^2 L_1]v = 0.$$

Вид операторов  $L_0$  и  $L_1$  устанавливается из сопоставления формул (3.1), (1.9) и (1.6). Из (3.1) следует, что оператор  $L(-\alpha^2)$  можно рассматривать как возмущение неограниченного оператора  $L_0(-\alpha^2)$  ограниченным оператором  $\Omega^2 L_1$ . Спектр  $L_0(-\alpha^2)$  определяется уравнением (2.4), если в нем положить  $\Omega = 0$ . При  $\Omega = 0$  уравнение (2.4) имеет только один четырехкратный вещественный корень  $\alpha = 0$  и счетное множество комплексных. Для ряда материалов системы PZT, ЦТС асимптотический анализ показывает, что при  $\Omega = 0$  в верхней полуплоскости существует три ветви комплексных корней.

Первая ветвь совпадает с мнимой осью, при этом асимптотические значения корней следующие:

$$(3.2) \quad \alpha_k^0 = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\theta_1},$$

где  $\theta_1^2 = \left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2 < 0$  — вещественный корень уравнения (2.3) при  $\Omega = 0$ .

Для материалов системы ЦТС точки пересечения мнимых ветвей с плоскостью  $\Omega = 0$  можно также определить по формуле

$$\kappa_k^0 = \frac{k}{2} \frac{(15\epsilon_{33})^{1/2}}{\sqrt{\epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}}}},$$

ошибка при этом не превышает 2%.

Две другие ветви симметричны относительно мнимой оси. Положение правой ветви и распределение корней  $\alpha_n^0 = z_n^0 + jy_n^0$  на ней описываются асимптотическими соотношениями

$$(3.3) \quad b_2 z_n^0 + a_2 y_n^0 = p_n; \quad a_2 z_n^0 - b_2 y_n^0 = r_n,$$

где

$$p_n = (2n + 1/2)\pi/2; \quad r_n = (1/2) \operatorname{arcsch} (\operatorname{Im} M_3/2\operatorname{Re} M_3 - \operatorname{Re} M_3/2 \operatorname{Im} M_3).$$

Здесь  $\theta_2 = \beta_2/\alpha = a_2 + jb_2$  — корень бикубического уравнения, лежащий в первом квадрате.

Формулы (3.2), (3.3) уже при  $k = n = 1$  определяют значения корней с погрешностью, не превышающей 1%. Можно определить характер поведения комплексных и мнимых корней при малых  $\Omega$ . Считая, что величина  $\sigma = \Omega/|\alpha|$  достаточно малая, разложим по степеням этой величины корни бикубического уравнения (2.3)

$$(3.4) \quad \left(\frac{\beta_i}{\alpha}\right)^2 = \theta_i^2 - F_i \sigma^2,$$

где

$$F_i = f_i + jg_i = \frac{N_2 \theta_i^4 - D_2 \theta_i^2 + C_2}{3\theta_i^4 - 2N_2 \theta_i^2 + D_2}.$$

Подставляя  $\beta_1$  из (3.4) в (3.2), после некоторых преобразований получим асимптотические приближения мнимых корней при малых частотах

$$(3.5) \quad \kappa_k(\Omega) = \kappa_k^0 + \frac{f_1 \Omega^2}{2\theta_1 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}.$$

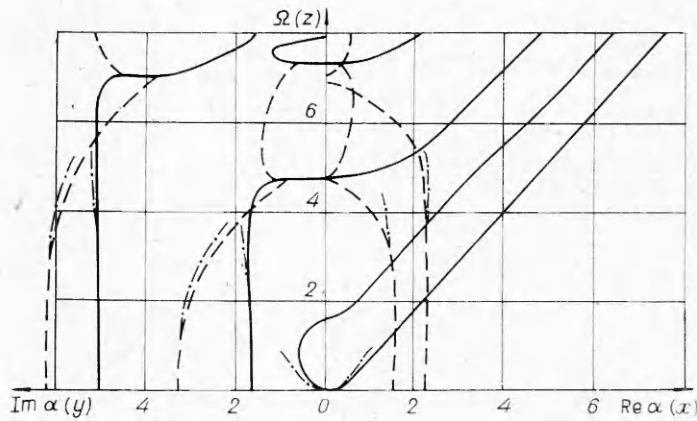
Аналогично подставляя  $\beta_2$  в (3.3), получим систему двух уравнений относительно  $z_n, y_n$ , которую можно записать в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (a_2^2 - b_2^2)(z_n^2 - y_n^2) - 4a_2 b_2 z_n y_n - f_2 \Omega^2 &= r_n^2 - p_n^2, \\ a_2 b_2 (z_n^2 - y_n^2) + (a_2^2 - b_2^2) z_n y_n - \frac{1}{2} g_2 \Omega^2 &= r_n p_n. \end{aligned}$$

Подставляя конкретные значения модулей керамики, из формул (3.4) — (3.6) можно определить характер зависимости мнимых и комплексных корней дисперсионного уравнения для малых частот. Для керамики ЦТС-19 они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1,48(1 - 0,007\Omega^2); \quad y_1 = 3,47(1 - 0,02\Omega^2); \quad \kappa_1 = 1,68(1 + 0,013\Omega^2); \\ z_2 &= 2,11(1 - 0,004\Omega^2); \quad y_2 = 6,37(1 - 0,07\Omega^2); \quad \kappa_2 = 5,04(1 + 0,002\Omega^2). \end{aligned}$$

Из формулы видно, что величины  $\kappa_k^0(\Omega)$ ,  $z_k(\Omega)$ ,  $y_k(\Omega)$  слабо зависят от частоты. Поэтому при малых частотах они могут быть аппроксимированы корнями из уравнений (3.2), (3.3).



Рассмотрим построение асимптотических приближений корней в окрестности точки  $\alpha = 0, \Omega = 0$ .

Поскольку у вырожденного оператора  $\alpha = 0$  является четырехкратной точкой спектра, то исследование спектра оператора  $L(-\alpha^2)$  будем изучать методами ветвления [7]. Решение спектральной задачи (3.1) в этом случае отыскивается в виде

$$(3.7) \quad \alpha^2 = t_1^2 \Omega + t_2^2 \Omega^2 + \dots, \quad v = v^{(0)} + \Omega v^{(1)} + \Omega^2 v^{(2)} + \dots$$

Подстановка (3.7) в (3.1) приводит к некоторой рекуррентной системе, после интегрирования которой получаем

$$(3.8) \quad v_1^{(0)} = -w_0 \zeta; \quad v_2^{(0)} = w_0; \quad v_3^{(0)} = 0;$$

$$v_2^{(1)} = t_1 w_0 \Delta_2 \frac{\zeta^2 - 1}{2} + w_1^0; \quad v_3^{(1)} = t_1 w_0 \Delta_1 \frac{\zeta^2 - 1}{2};$$

$$v_1^{(1)} = -t_1 \left\{ \left[ \frac{c_{44} + c_{13}}{c_{44}} \Delta_2 + \frac{c_{31} + c_{15}}{c_{44}} \Delta_1 + \frac{c_{11}}{c_{44}} \right] w_0 \left( \frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta}{2} \right) + w_1^0 \zeta; \quad w_1^0 = \text{const}; \right.$$

$$(3.9) \quad t_1^4 = B^4; \quad B^4 = \frac{3c_{14}}{e_{31} \Delta_1 + c_{13} \Delta_2 + c_{11}}.$$

Здесь  $w_0$  — произвольная постоянная, которую можно считать, например, равной единице.

Уравнение (3.9) имеет четыре корня:

$$(3.10) \quad t_{11} = B, \quad t_{12} = -B, \quad t_{13} = jB; \quad t_{14} = -jB.$$

Из формул (3.10) видно, что в окрестности точки (0,0) существует два вещественных корня и два мнимых. Формула

$$(3.11) \quad \alpha = t_{11} \Omega^{1/2} (1 \pm 0(\Omega))$$

описывает начало первой дисперсионной кривой, изображенной на фигуре. Формула (3.11) обеспечивает 1%-ную точность при  $\Omega \leq \Omega_0 = 0,25$ . Для  $\Omega > \Omega_0$  первая кривая вырождается в прямую с углом наклона (для ЦТС-19)  $V_R = \Omega/\alpha = 1,06$ . Полученное значение  $V_R$  соответствует фазовой скорости волн Рэлея для данного материала.

Рассмотрим теперь вопрос о построении дисперсионных кривых для произвольного значения  $\Omega$ .

Построим их асимптотику в окрестности  $\alpha = 0$ . В уравнениях (2.3), (2.4) положим  $\alpha = 0$  и определим те значения  $\Omega$ , которые являются началом дисперсионных кривых. Получаем два множества значений

$$(3.12) \quad \Omega_m = m\pi/2, \quad m = 1, 3, 5, \dots,$$

$$\Omega_n = n\pi/k_0, \quad k_0 = \sqrt{\frac{c_{44}e_{11}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найденные значения  $\Omega_n$  и  $\Omega_m$  — резонансы для неограниченного слоя.

Для того, чтобы получить приближенные корни  $|\alpha| \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow m\pi/2$ , полагаем

$$(3.13) \quad \Omega_m^2 \approx \frac{m^2\pi^2}{4} - R_m\alpha_m^2.$$

Учитывая, что  $\alpha$  мало, из совместного анализа уравнений (2.3), (2.4) получаем

$$(3.14) \quad R_m = - (8\beta_3/m^2\pi^2 \operatorname{tg} \beta_3)D + A_0,$$

где

$$A_0 = (N_2 - D_2 + C_1)/(2N_1 - D_1 - 3); \quad \beta_3 = (m\pi/2)k_0;$$

$$D = \frac{\left[ -c_{13} \frac{(c_{44} + c_{13})e_2 + (e_{31} + e_{15})}{c_{11} + c_{44}A_0} + c_{33}e_2 + e_{33} \right] \left[ \frac{(c_{44} + c_{13})e_3 + (e_{31} + e_{15})}{c_{44}(1 - k_0^2)} k_0^2 + e_3 \right]}{(c_{33}e_3 + e_{33}^2) \frac{(c_{44} + c_{13})e_2 + (e_{31} + e_{15})}{c_{11} + c_{44}A_0} k_0^2}.$$

Таким образом, при  $R_m > 0$  мнимые корни имеют место при  $\Omega_m > m\pi/2$ , вещественные — при  $\Omega_m < m\pi/2$ , а при  $R_m < 0$  — наоборот. Задавая конкретные значения модулей керамики, можно вычислить из (3.14) величины  $R_m$ . Так, для керамики ЦТС-19  $R_1 = -3,606$ ,  $R_3 = -0,783$ . Аналогично можно построить асимптотику корней при  $\Omega_n \rightarrow n\pi/k_0$ . Переходя к изотропному случаю, получаем из формул (3.13), (3.14) известные результаты [8]. Хотя формулы (3.13), (3.14) имеют сравнительно небольшую область применения, которая уменьшается с ростом  $m$ , они представляют интерес, поскольку связаны с определением участков отрицательных групповых скоростей.

На фигуре изображены дисперсионные кривые для керамики ЦТС-19, полученные численным решением уравнений (2.3), (2.4). Вещественные и чисто мнимые значения нанесены сплошными линиями, причем чисто мнимые корни отложены слева от начала координат.

Действительные и мнимые части комплексных корней нанесены штриховыми линиями, при этом ось  $Ox$  является осью действительных значений  $\alpha$ , а ось  $Oy$  — мнимых значений  $\alpha$ . По оси  $Oz$  отложены значения безразмерной частоты  $\Omega$ . Штрихпунктирными линиями обозначены кривые, соответствующие асимптотическим приближениям корней. Видно, что при малых частотах мнимые и комплексные корни дисперсионного уравнения (2.4) мало изменяются по сравнению с их асимптотическими значениями  $x_k(\Omega)$ ,  $z_k(\Omega)$ ,  $y_k(\Omega)$  из формул (3.5), (3.6), причем частотная область применимости этих формул увеличивается с возрастанием порядкового номера  $k$ . При  $k = 1$  ошибка не превышает 5% для  $\Omega \leq 2$ , а при  $k = 2$  — для  $\Omega \leq 4$ .

Учет пьезоэффекта не приводит к каким-либо качественным изменениям для вещественных и комплексных кривых по сравнению с изотропной задачей. Они только смещены на малую величину, зависящую от выбора констант пьезокерамики. Аналогичный результат для веществ-

ных корней получен в [6]. Однако появление почти вертикальной ветви, соответствующей чисто мнимым корням, можно объяснить только пьезоэлектрической связью. На основе дисперсионных кривых для каждого  $\Omega$  можно определить фазовую и групповую скорости распространения возмущения в плоском волноводе.

Последняя, как известно, характеризует перенос энергии. Здесь, по-видимому, представляет интерес исследование распределения переносимой энергии при фиксированной частоте по отдельным модам, соответствующим дисперсионным кривым. Однако такой анализ можно провести, решив конкретную краевую задачу, т. е. определив функции  $m_k(\xi, \eta)$ ,  $n_k(\xi, \eta)$  (модули пьезокерамики ЦТС-19 взяты из [9]).

Поступила 30 XII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tiersten H. F., Mindlin R. D. Forced vibrations of piezoelectric crystal plates.— «Quart. Appl. Math.», 1962, vol. 20, p. 107.
2. Mindlin R. D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates.— «Int. J. Solids and Struct.», 1972, vol. 8, N 7.
3. Lurasiewicz V., Filipczynski L. Vibrations of piezoelectric ceramic transducers loaded mechanically.— «Proc. Vibr. Probl.», 1972, vol. 11, N 3.
4. Аксентян О. К., Воронич И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины.— ПММ, 1963, т. 28, вып. 6.
5. Коцаренко Н. Я. и др. Электронное затухание и усиление волн Лэмба в пьезополупроводниках.— УФЖ, 1974, т. 16, № 10.
6. Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе — «Дефектоскопия», 1975, № 4.
7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
8. Нигул У. К. О корнях уравнения ЛЭМБА для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности.— «Изв. АН ЭССР», 1963, т. 12, № 3.
9. Смажеская Е. Г., Фельдман Н. Б. Пьезоэлектрическая керамика. М., «Сов. радио», 1971.

УДК 539.121.7

#### МОДЕЛЬ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ АТОМА НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА В ИМПУЛЬСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Е. Галанов

(Новосибирск)

1. Цель данной работы — получить дифференциальное сечение однократного рассеяния атома на простом кристалле. Взаимодействие в системе определяется в виде суммы парных потенциалов взаимодействия частицы с атомами решетки. Принимается, что процессы, приводящие к рассеянию, слабо зависят от процессов, приводящих к связи и тепловому выравниванию в кристалле. Поэтому рассматривается гармоническое приближение для гамильтониана кристалла [1] и импульсное приближение с «квазиклассической связью» для описания рассеяния [2, 3]. Будем