УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФОРМУЛ ЧЕЗАРО ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Исследована задача нахождения вектора перемещений из системы нелинейных дифференциальных уравнений, в которую входят компоненты градиента перемещений. Выражения в правой части этой системы при определенных значениях параметров имеют кинематический смысл тензоров конечных деформаций Лагранжа и Эйлера. Задача заключается в построении обобщенных формул Чезаро при конечных деформациях. Процесс построения решения включает два этапа: алгебраический и дифференциальный, причем второй имеет место для пространства с размерностью, большей либо равной двум. Предложен алгоритм обращения исходной системы и проведены аналитические построения для случая двумерного пространства. Получено решение задачи на первом (алгебраическом) этапе, т. е. выведено точное аналитическое выражение компонент вектора перемещений через известный тензор конечных деформаций и неизвестную скалярную функцию, имеющую кинематический смысл поворота. Сформулированы необходимые условия существования такой зависимости.

Ключевые слова: кинематика, соотношения Коши, тензоры конечных деформаций, формулы Чезаро, инвариант, плоская деформация.

1. Соотношения Коши и формулы Чезаро. В кинематике сплошной среды [1] известны соотношения Коши $\tilde{\varepsilon} = (\operatorname{Grad}\boldsymbol{u} + (\operatorname{Grad}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})/2$, или $\tilde{\varepsilon} = \operatorname{Def}\boldsymbol{u}$, связывающие в геометрически линейном случае тензор малых деформаций Коши $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ и вектор перемещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. В декартовых координатах в пространстве $\mathbb{R}^3$ эти соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \qquad i,j = 1,2,3. \tag{1.1}$$

Введем также антисимметричный тензор поворотов $\tilde{\omega}$ с компонентами

$$\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2, \tag{1.2}$$

поэтому представление $\operatorname{Grad}\boldsymbol{u} = \tilde{\varepsilon} + \tilde{\omega}$ есть разбиение градиента перемещений на симметричную и антисимметричную части. Из (1.1), (1.2) следуют дифференциальные связи

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}, \tag{1.3}$$

из которых в свою очередь выводятся условия совместности Сен-Венана, обычно записываемые одним из нескольких способов:

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}; \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} + \varepsilon_{\gamma\gamma,\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \varepsilon_{\beta\gamma,\gamma\alpha}; \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00020-а).

$$\eta_{pq}(\tilde{\varepsilon}) \equiv \epsilon_{pli}\, \epsilon_{qjk} \varepsilon_{ij,lk} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь ϵ_{pli} — трехиндексный в пространстве $\mathbb{R}^3$ символ Леви-Чивиты, $\tilde{\eta}(\tilde{\varepsilon}) = \operatorname{Ink} \tilde{\varepsilon}$ — симметричный тензор несовместности Кренера, имеющий в $\mathbb{R}^3$ шесть независимых компонент. Следовательно, число независимых условий совместности, записанных с использованием любого тензора второго ранга, также равно шести. В (1.5) по греческим индексам суммирование не проводится.

Соотношения Коши (1.1) можно рассматривать как систему шести линейных дифференциальных уравнений с частными производными относительно трех функций $u_i(\boldsymbol{x})$. При известных во всей области Ω сплошной среды деформациях $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})$, компонентах перемещений u_{i0} в одной точке P_0 с координатами x_{i0} и компонентах тензоров поворотов ω_{ij0} решение системы (1) в любой точке $P \in \Omega$ с координатами x_i представляется формулами Чезаро [2, 3], называемыми также формулами Чезаро — Вольтерры:

$$u_i(\boldsymbol{x}) = u_{i0} + \omega_{ij0}(x_j - x_{j0}) + \int\limits_{P_0}^{P} [\varepsilon_{ik}(\boldsymbol{y}) + (x_j - y_j)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})(\boldsymbol{y})]\, dy_k. \tag{1.7}$$

Согласно дифференциальным связям (1.3) выражение для компонент тензора поворотов в точке P имеет вид

$$\omega_{ij}(\boldsymbol{x}) = \omega_{ij0} + \int\limits_{P_0}^{P} (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})(\boldsymbol{y})\, dy_k. \tag{1.8}$$

Необходимым условием независимости криволинейных интегралов в (1.7), (1.8) от пути интегрирования является выполнение шести условий совместности, записанных, например, в форме (1.6). Если в области Ω любая замкнутая кривая путем непрерывного деформирования стягивается в точку (тогда для любого замкнутого контура имеет место формула Стокса), то условий совместности достаточно для обеспечения единственности полей перемещений (1.7) и поворотов (1.8). В противном случае требуются дополнительные интегральные условия совместности деформаций.

Формулы Чезаро (1.7) позволяют восстанавливать вектор перемещений по полям деформаций и напряжений [4. С. 31–36]. Однако на практике эти формулы применяются редко, что обусловлено сложностью аналитического вычисления контурных интегралов [5].

Как отмечено выше, можно не наделять кинематическим смыслом описываемые объекты $\boldsymbol{u}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\eta}$, а рассматривать систему (1.1) как систему дифференциальных уравнений с частными производными. В этом случае система шести условий (1.6) эквивалентна обращению в нуль всех компонент тензора кривизны Римана, число которых в пространстве $\mathbb{R}^n$ равно $n^2(n^2-1)/12$. Иными словами, пространство, в котором находится область Ω, является евклидовым. Возможная неединственность означает наличие в области Ω включений, дислокаций, дисклинаций, обусловливающее отличие от нуля вектора Бюргерса [6].

2. Нелинейный аналог задачи. Рассмотрим систему шести нелинейных дифференциальных уравнений

$$\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 + q u_{k,i} u_{k,j}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

где q — постоянный параметр; $\tilde{\gamma}(\boldsymbol{x})$ — заданный симметричный тензор второго ранга, который при $q = 1/2$ и $q = -1/2$ имеет смысл тензоров конечных деформаций Лагранжа и Эйлера соответственно. Поставим следующую задачу обращения: определить компоненты перемещений u_i через γ_{ij} и найти условия разрешимости системы (2.1) (условия совместности для компонент γ_{ij}).

Обозначим, как и в (1.1), (1.2), симметричную и антисимметричную части $\operatorname{Grad} \boldsymbol{u}$ через $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\omega}$. Следуя процедуре вывода формул Чезаро [7. С. 37–38; 8. С. 66–67], получаем (1.7). С помощью тензорного равенства

$$\tilde{\varepsilon} + q(\tilde{\varepsilon}^2 - \tilde{\omega} \cdot \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \cdot \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^2) = \tilde{\gamma} \tag{2.2}$$

или

$$\varepsilon_{ij} + q(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}) = \gamma_{ij} \tag{2.3}$$

надо выразить $\tilde{\varepsilon}$ через $\tilde{\gamma}$. Система (2.3) не является алгебраической, поскольку на $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\omega}$ наложены дифференциальные связи (1.3). Кроме того, компоненты ε_{ij} удовлетворяют условиям (1.6).

Рассмотрим сначала тривиальный одномерный аналог задачи. При этом в (2.1), (2.3) индексы принимают только одно значение, равное единице, $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, $\omega_{11} = 0$, $\gamma_{11} = \gamma$. Тензорное равенство (2.2) сводится к скалярному квадратному уравнению $q\varepsilon^2 + \varepsilon - \gamma = 0$. Из двух корней этого уравнения (полагая $q\gamma \geqslant -1/4$) будем рассматривать тот, который имеет конечный предел при $q \to 0$, т. е.

$$\varepsilon = (\sqrt{1 + 4q\gamma} - 1)/(2q). \tag{2.4}$$

В то же время, представляя корень уравнения в виде регулярного по степеням q ряда

$$\varepsilon = \varepsilon^{\{0\}} + q\varepsilon^{\{1\}} + q^2\varepsilon^{\{2\}} + \ldots, \tag{2.5}$$

последовательно получаем $\varepsilon^{\{0\}} = \gamma$, $\varepsilon^{\{1\}} = -\gamma^2$, $\varepsilon^{\{2\}} = 2\gamma^3$, $\ldots$. Ряд (2.5) сходится к выражению (2.4) при $|q\gamma| < 1/4$. Например, для $q = \pm 1/2$ сходимость имеет место при $|\gamma| < 1/2$.

3. Алгебраический этап решения задачи обращения. Исследуем подробнее задачу об обратимости соотношений (2.2) и задачу нахождения тензорной функции $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\gamma})$ в двумерном пространстве. Ниже все индексы принимают значения 1 и 2. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\tilde{\varepsilon} = \tilde{e} + I_{\varepsilon 1}\tilde{I}/2, \qquad \tilde{\gamma} = \tilde{\chi} + I_{\gamma 1}\tilde{I}/2, \qquad \omega_{ij} = \omega\epsilon_{ij},\\ I_{\varepsilon n} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\tilde{\varepsilon}^n}, \qquad I_{en} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\tilde{e}^n}, \qquad I_{\gamma n} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\tilde{\gamma}^n}, \qquad I_{\chi n} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\tilde{\chi}^n}, \qquad n \in \mathbb{N}\end{gathered} \tag{3.1}$$

($\tilde{I}$ — единичный тензор второго ранга; ϵ_{ij} — двумерный символ Леви-Чивиты; $\tilde{e}$, $\tilde{\chi}$ — девиаторы тензоров $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\gamma}$; $I_{\varepsilon n}$, I_{en}, $I_{\gamma n}$, $I_{\chi n}$ — инварианты n-й степени соответствующих тензоров ($I_{e1} = I_{\chi 1} = 0$)). В качестве независимых инвариантов тензоров $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\gamma}$ выберем пары $(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2})$ и $(I_{\gamma 1}, I_{\gamma 2})$, состоящие из линейного и квадратичного инвариантов.

Из формулы Гамильтона — Кели можно вывести выражения для инвариантов более высоких степеней:

$$I_{\varepsilon 3}^3 = I_{\varepsilon 1}(3I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)/2, \qquad I_{\varepsilon 4}^4 = (I_{\varepsilon 2}^4 + 2I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^4)/2. \tag{3.2}$$

Кроме того,

$$I_{e2}^2 = I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2/2, \qquad I_{\chi 2}^2 = I_{\gamma 2}^2 - I_{\gamma 1}^2/2. \tag{3.3}$$

Первый этап построения тензорной функции $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\gamma})$, обратной (2.2) (алгебраический этап), состоит в выводе зависимости $\tilde{\varepsilon}(\omega, \tilde{\gamma})$ со скалярным аргументом-параметром $\omega(\boldsymbol{x})$, полностью определяющим плоские повороты. Согласно (1.3), (3.1) этот параметр удовлетворяет системе двух уравнений

$$\omega_{,k} = \varepsilon_{1k,2} - \varepsilon_{2k,1}, \tag{3.4}$$

являющейся совместной в силу единственного в плоском случае уравнения совместности малых деформаций $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$.

Зависимость $\tilde\varepsilon(\omega,\tilde\gamma)$ можно найти, зная скалярную и тензорную функции $I_{\varepsilon 1}(\omega,\tilde\gamma)$ и $\tilde e(\omega,\tilde\gamma)$. Из (2.2) и равенств $\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon)=0$, $\mathrm{tr}\,\tilde\omega^2=-2\omega^2$ следует, что

$$I_{\gamma 1}=I_{\varepsilon 1}+q(I_{\varepsilon 2}^2+2\omega^2). \tag{3.5}$$

Возводя обе части (2.2) в квадрат:

$$\tilde\gamma^2=\tilde\varepsilon^2+q(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\alpha+\tilde\alpha\cdot\tilde\varepsilon+\tilde\varepsilon\cdot\tilde\beta+\tilde\beta\cdot\tilde\varepsilon)+q^2(\tilde\alpha^2+\tilde\alpha\cdot\tilde\beta+\tilde\beta\cdot\tilde\alpha+\tilde\beta^2) \tag{3.6}$$

($\tilde\alpha=\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon$; $\tilde\beta=\tilde\varepsilon^2-\tilde\omega^2\equiv\tilde\varepsilon^2+\omega^2\tilde I$) и используя тождества

$$\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\alpha)=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon^2\cdot\tilde\omega-\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon)=0,$$
$$\mathrm{tr}\,(\tilde\alpha\cdot\tilde\varepsilon)=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon^2)=0,$$
$$\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\beta)=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon^3-\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega^2)=I_{\varepsilon 3}^3+\omega^2 I_{\varepsilon 1}=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon^3-\tilde\omega^2\cdot\tilde\varepsilon)=\mathrm{tr}\,(\tilde\beta\cdot\tilde\varepsilon),$$
$$\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega)=\omega^2(I_{\varepsilon 2}^2-I_{\varepsilon 1}^2),\qquad \mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon^2\cdot\tilde\omega^2)=-\omega^2 I_{\varepsilon 2}^2,$$
$$\mathrm{tr}\,\tilde\alpha^2=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega+\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon-\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega^2\cdot\tilde\varepsilon-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon^2\cdot\tilde\omega)=2\omega^2(2I_{\varepsilon 2}^2-I_{\varepsilon 1}^2),$$
$$\mathrm{tr}\,(\tilde\alpha\cdot\tilde\beta)=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon^2+\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega^2-\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega^3-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon^3)=0,$$
$$\mathrm{tr}\,\omega^4=2\omega^4,\qquad \mathrm{tr}\,\beta^2=\mathrm{tr}\,(\tilde\varepsilon^4+\tilde\omega^4-\tilde\varepsilon^2\cdot\tilde\omega^2-\tilde\omega^2\cdot\tilde\varepsilon^2)=I_{\varepsilon 4}^4+2\omega^4+2\omega^2 I_{\varepsilon 2}^2$$

и равенства (3.2), вычислим следы левой и правой частей (3.6):

$$\begin{aligned}I_{\gamma 2}^2&=I_{\varepsilon 2}^2+qI_{\varepsilon 1}(3I_{\varepsilon 2}^2-I_{\varepsilon 1}^2+2\omega^2)+\\&\quad+q^2((I_{\varepsilon 2}^4+2I_{\varepsilon 1}^2I_{\varepsilon 2}^2-I_{\varepsilon 1}^4)/2+2\omega^2(3I_{\varepsilon 2}^2-I_{\varepsilon 1}^2)+2\omega^4).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Алгебраическую систему (3.5), (3.7) в принципе можно разрешить относительно $I_{\varepsilon 1}(\omega,I_{\gamma 1},I_{\gamma 2})$ и $I_{\varepsilon 1}^2(\omega,I_{\gamma 1},I_{\gamma 2})$. Это позволит найти зависимость $\tilde\varepsilon(\omega,\tilde\gamma)$. Изложенный подход, в соответствии с которым одна группа инвариантов выражается через другую, универсален для пространства любой размерности, но реализовать его достаточно трудно.

В случае двумерного пространства может быть использован анализ девиаторных частей тензорного соотношения (2.2). Так как $\mathrm{tr}\,\tilde\alpha=0$ и $\tilde e\cdot\tilde\omega=-\tilde\omega\cdot\tilde e$, то

$$\begin{aligned}\tilde\chi&=\tilde e+q(\tilde\varepsilon\cdot\tilde\omega-\tilde\omega\cdot\tilde\varepsilon)+q(\tilde\varepsilon^2-\tilde\omega^2)-q(I_{\varepsilon 2}^2+2\omega^2)\tilde I/2=\\&=\tilde e+2q\tilde e\cdot\tilde\omega+q[\tilde e^2+I_{\varepsilon 1}\tilde e+(I_{\varepsilon 1}^2/4-I_{\varepsilon 2}^2/2)\tilde I].\end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу первого равенства (3.3) и того факта, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ квадрат любого девиатора является шаровым тензором, т. е. $\tilde e^2-I_{e2}^2\tilde I/2\equiv\tilde 0$, равенства (3.8) приводятся к виду

$$\tilde\chi=\tilde e+2q\tilde e\cdot\tilde\omega+qI_{\varepsilon 1}\tilde e=(1+qI_{\varepsilon 1})\tilde e\cdot\Big(\tilde I+\frac{2q}{1+qI_{\varepsilon 1}}\,\tilde\omega\Big). \tag{3.9}$$

Обращая (3.9), запишем

$$\tilde e=\frac{1}{X}\big((1+qI_{\varepsilon 1})\tilde\chi-2q\tilde\chi\cdot\tilde\omega\big),\qquad I_{e2}^2=\frac{I_{\chi 2}^2}{X}, \tag{3.10}$$

где $X=(1+qI_{\varepsilon 1})^2+4q^2\omega^2$. Следовательно, согласно (3.3)

$$I_{\varepsilon 2}^2=\frac{1}{2}\,I_{\varepsilon 1}^2+\frac{1}{X}\Big(I_{\gamma 2}^2-\frac{1}{2}\,I_{\gamma 1}^2\Big). \tag{3.11}$$

Подставляя $I_{\varepsilon 2}^2$ из (3.11) в (3.3), получаем искомое уравнение, в котором инвариант $I_{\varepsilon 1}$ может быть выражен через $I_{\gamma 1}$ и $I_{\gamma 2}^2$. Это уравнение сводится к уравнению

$$X^2-(1+2qI_{\gamma 1})X+q^2(2I_{\gamma 2}^2-I_{\gamma 1}^2)=0. \tag{3.12}$$

Так же как и в одномерном тестовом примере, выберем тот корень $I_{\varepsilon 1}$, который при $q \to 0$ имеет конечный предел, равный $I_{\gamma 1}$:

$$I_{\varepsilon 1} = \frac{1}{q}\Big(\sqrt{\frac{1}{2}\,(1 + 2qI_{\gamma 1} + \sqrt{D}\,) - 4q^2\omega^2} - 1\Big); \tag{3.13}$$

$$D = 1 + 4qI_{\gamma 1} + 8q^2(I_{\gamma 1}^2 - I_{\gamma 2}^2) \equiv (1 + 2qI_{\gamma 1})^2 - 8q^2 I_{\chi 2}^2. \tag{3.14}$$

С учетом найденного инварианта $I_{\varepsilon 1}$ (3.13) выражение (3.10) можно записать в следующей форме:

$$\tilde{e} = \frac{2\tilde{\chi}}{1 + 2qI_{\gamma 1} + \sqrt{D}} \cdot \Big(\sqrt{\frac{1}{2}\,(1 + 2qI_{\gamma 1} + \sqrt{D}\,) - 4q^2\omega^2}\;\tilde{I} - 2q\tilde{\omega}\Big). \tag{3.15}$$

Итак, зависимость $\tilde{\varepsilon}(\omega, \tilde{\gamma}) = \tilde{e}(\omega, \tilde{\gamma}) + I_{\varepsilon 1}(\omega, \tilde{\gamma})\tilde{I}/2$, определяемая равенствами (3.13)–(3.15), построена. Из (3.14) следует, что необходимым условием существования этой зависимости является неравенство $D \geqslant 0$, т. е.

$$|1 + 2qI_{\gamma 1}| \geqslant 2\sqrt{2}\,qI_{\chi 2}. \tag{3.16}$$

Условие (3.16) аналогично неравенству $1 + 4q\gamma \geqslant 0$ в (2.4) в одномерном случае.

4. Дифференциальный этап решения задачи обращения. Второй (дифференциальный) этап обращения тензорной функции (2.2) состоит в решении системы (3.4) двух нелинейных уравнений с частными производными относительно одной функции $\omega(\boldsymbol{x})$, когда правые части в (3.4) зависят от ω в соответствии с формулами (3.13)–(3.15). Эта система является достаточно сложной, поэтому при произвольно заданном тензоре $\tilde{\gamma}$ трудно получить ее точное аналитическое решение.

Следует отметить, что для решения данной задачи можно использовать итерационный метод, основанный на схеме

$$\omega_{,k}^{(n+1)} = \varepsilon_{1k,2}(\omega^{(n)}, \tilde{\gamma}) - \varepsilon_{2k,1}(\omega^{(n)}, \tilde{\gamma}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

с некоторым заданным начальным приближением $\omega^0(\boldsymbol{x})$.

Разложим в степенные по q ряды ($|q| \ll 1$) выражения (3.13), (3.15), ограничиваясь линейными приближениями:

$$I_{\varepsilon 1} = I_{\gamma 1} - q(I_{\gamma 2}^2 + 2\omega^2) + O(q^2), \qquad \tilde{e} = \tilde{\chi} \cdot [\tilde{I} - q(I_{\gamma 1}\tilde{I} + 2\tilde{\omega})] + O(q^2). \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) выражения для трех компонент тензора малых деформаций имеют вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \gamma_{\alpha\alpha} - q(I_{\gamma 1}\chi_{\alpha\alpha} - 2\omega\chi_{12} + I_{\gamma 2}^2/2 + \omega^2) + O(q^2), \qquad \alpha = 1, 2, \\ \varepsilon_{12} = \gamma_{12} - q(I_{\gamma 1}\chi_{12} + 2\omega\chi_{11}) + O(q^2). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Подставляя в (4.2) выражения $\omega = \omega^{\{0\}}$, являющиеся нулевым приближением по q:

$$\omega^{\{0\}} = \int \gamma_{11,2}^{\{0\}}\,dx_1 - \gamma_{12}^{\{0\}} = \gamma_{12}^{\{0\}} - \int \gamma_{22,1}^{\{0\}}\,dx_2,$$

в линейном по q приближении получаем искомые компоненты тензора $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\gamma})$ (одномерный аналог представлен в (2.5)).

Единственное в плоском случае условие совместности компонент тензора $\tilde{\gamma}$ записывается следующим образом (см. также [9. С. 52–56; 10. С. 93–94]):

$$\varepsilon_{11,22}(\tilde{\gamma}) + \varepsilon_{22,11}(\tilde{\gamma}) = 2\varepsilon_{12,12}(\tilde{\gamma}).$$

Таким образом, в работе получено аналитическое выражение компонент вектора перемещений через известный тензор конечных деформаций и неизвестную скалярную функцию. Сформулированы необходимые условия существования такой зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
2. **Cesáro E.** Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Rend. Accad. Napoli. 1906. V. 12, N 1. P. 311–321.
3. **Volterra V.** Sur l'équilibre des corps elastiques multipliment connexes // Ann. l'École Norm. Sup. 1907. V. 24. P. 401–517.
4. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976.
5. **Ciarlet P. G., Gratie L., Mardare C.** A generalization of the classical Cesáro — Volterra path integral formula // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 2009. V. 347. P. 577–582.
6. **Markenscoff X.** A note of strain jump conditions and Cesáro integrals for bonded and slipping inclusions // J. Elasticity. 1996. V. 45, N 1. P. 45–51.
7. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
8. **Победря Б. Е.** Основы механики сплошной среды / Б. Е. Победря, Д. В. Георгиевский. М.: Физматлит, 2006.
9. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
10. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Изд. 6-е. СПб.: Лань, 2004. Т. 1.

Поступила в редакцию 14/VIII 2013 г.