

УДК 539.374

О ПОВЕДЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНОГО ТРЕНИЯ

С. Е. Александров

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

E-mail: sergeyaleksandrov@yahoo.com

В предположении, что главные оси анизотропии наклонены под произвольным углом к поверхностям трения, рассмотрено мгновенное течение, возникающее при расширении и скручивании жесткопластического ортотропного материала между соосными цилиндрическими шероховатыми поверхностями, на которых действует закон максимального трения. Решение сведено к квадратурам, выполнен его анализ. Проведено сравнение поведения полученного решения вблизи поверхностей трения с поведением известных решений для других моделей жесткопластических материалов.

Ключевые слова: сингулярность, трение, аналитическое решение, пластическая анизотропия.

При использовании ряда жесткопластических моделей материала решения краевой задачи может не существовать, если на поверхности трения задано условие прилипания (т. е. считается, что скорость точек на контактной поверхности пластического материала равна скорости точек на соприкасающейся поверхности инструмента). Для того чтобы получить решение краевой задачи, необходимо принять условие проскальзывания при максимально достижимом значении удельных сил трения (если не используется какой-либо другой закон трения, например закон Кулона). В этом случае поле скоростей является сингулярным (вблизи поверхности трения некоторые производные от компонент вектора скорости стремятся к бесконечности) [1–6]. Однако это свойство решений существенно зависит от выбранной модели материала [7, 8]. В частности, в работах [9, 10] для ортотропного жесткопластического материала получены решения краевых задач, включающих закон максимального трения. Из этих решений следует, что вблизи поверхностей трения поле скоростей является сингулярным, причем поведение компонент вектора скорости такое же, как и в случае изотропного идеально жесткопластического материала [2]. В решениях [9, 10] предполагалось, что одна из главных осей анизотропии совпадает с поверхностью трения (точнее, с линией, поскольку рассматривалось плоскодеформированное состояние). Так как это свойство решений зависит от модели материала, представляет интерес выяснить, сохраняется ли оно в случае произвольной ориентации главных осей анизотропии. Одной из краевых задач, наиболее подходящих для исследования поведения решений вблизи поверхностей максимального трения, является задача о плоском пластическом деформировании материала между двумя соосными расширяющимися шероховатыми цилиндрами, один из которых вращается [5, 6, 8]. Преимуществом этой краевой задачи является возможность получения аналитического или полуаналитического решения для широкого класса определяющих уравнений без ослабления краевых условий. В данной работе такая задача ста-

вится и решается для жесткопластического ортотропного материала, удовлетворяющего квадратичному условию текучести [11].

Аналитическая формулировка закона максимального трения зависит от модели материала. Для моделей, приводящих к гиперболическим системам уравнений, этот закон вводится наиболее естественным способом в предположении, что при проскальзывании поверхность трения (линия в случае плоскодеформированного состояния) совпадает с огибающей семейства характеристик.

Рассмотрим слой пластического материала, расположенный между двумя соосными цилиндрическими поверхностями. Радиус внутренней поверхности равен a , внешней — b . Введем полярную систему координат r, θ , начало которой совпадает с центрами цилиндрических поверхностей. Внутренняя поверхность расширяется со скоростью V_0 , скорость расширения внешней поверхности определяется из уравнения несжимаемости. Кроме того, внешняя поверхность не вращается, а внутренняя вращается по часовой стрелке, причем окружная скорость ее точек равна U_0 . Предположим, что на контактных поверхностях выполняется условие прилипания. Тогда кинематические краевые условия имеют вид

$$r = a: \quad u_r = V_0, \quad u_\theta = -U_0; \quad (1)$$

$$r = b: \quad u_\theta = 0. \quad (2)$$

Здесь u_r — радиальная скорость; u_θ — окружная скорость. Статическое краевое условие имеет вид

$$r = a: \quad \sigma_{rr} = -p_0, \quad (3)$$

где σ_{rr} — радиальное напряжение. Значение величины $p_0 > 0$ несущественно, но оно должно быть достаточно велико, чтобы на поверхностях трения не возникал режим проскальзывания в соответствии с законом трения Кулона.

Предложенное в [11] условие текучести для ортотропного материала имеет вид

$$(\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\zeta\zeta})^2 / (4\alpha^2) + \sigma_{\zeta\eta}^2 = T^2. \quad (4)$$

Здесь ζ, η — главные оси анизотропии в плоскости течения; $\sigma_{\zeta\zeta}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\zeta\eta}$ — напряжения в системе координат, связанной с главными осями анизотропии; α, T — постоянные материала (T — предел текучести при чистом сдвиге в главных осях анизотропии, α выражается через пределы текучести в главных осях анизотропии [11]). Теоретически значение α находится в интервале $0 < \alpha < \infty$ (для изотропного материала $\alpha = 1$). Ассоциированный закон течения с условием текучести (4) имеет вид

$$\xi_{\zeta\zeta} = -\xi_{\eta\eta} = \lambda(\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\eta\eta}) / (2\alpha^2), \quad \xi_{\zeta\eta} = \lambda\sigma_{\zeta\eta}, \quad \lambda \geq 0, \quad (5)$$

где $\xi_{\zeta\zeta}, \xi_{\eta\eta}, \xi_{\zeta\eta}$ — компоненты тензора скорости деформации в системе координат, связанной с главными осями анизотропии.

Решение строится для мгновенного напряженно-деформированного состояния в начальный момент времени, поэтому уравнения эволюции параметров, характеризующих пластическую анизотропию, можно не рассматривать.

Предположим, что ось ζ образует постоянный угол γ с осью r (рис. 1). В этом случае координатные линии системы координат, связанной с главными осями анизотропии, являются логарифмическими спиралями. По-видимому, такое состояние анизотропии не встречается в приложениях, однако это несущественно при изучении поведения решения вблизи поверхности трения $r = a$, представляющей собой основную цель настоящей работы.

Решение не зависит от θ , поэтому нетривиальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \quad (6)$$

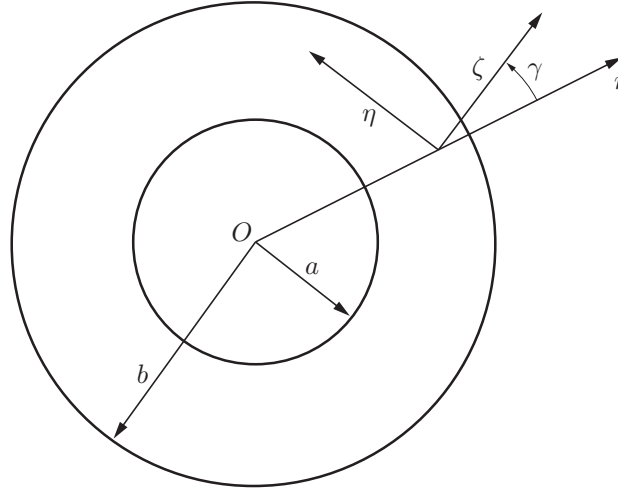


Рис. 1. Ориентация главных осей анизотропии

где $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ — окружное и касательное напряжения в полярной системе координат. Компоненты тензора напряжения в координатах ζ , η и r , θ связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma + (1/2)(\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\eta\eta}) \cos 2\gamma - \sigma_{\zeta\eta} \sin 2\gamma, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma - (1/2)(\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\eta\eta}) \cos 2\gamma + \sigma_{\zeta\eta} \sin 2\gamma, \\ \sigma_{r\theta} &= (1/2)(\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\eta\eta}) \sin 2\gamma + \sigma_{\zeta\eta} \cos 2\gamma,\end{aligned}\quad (7)$$

где $\sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2 = (\sigma_{\zeta\zeta} + \sigma_{\eta\eta})/2$. Условие текучести (4) выполняется в результате подстановки

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \sigma + T\alpha \cos 2\psi, \quad \sigma_{\eta\eta} = \sigma - T\alpha \cos 2\psi, \quad \sigma_{\zeta\eta} = T \sin 2\psi. \quad (8)$$

Интегрируя второе уравнение системы (6), получаем $\sigma_{r\theta}/T = \beta(a/r)^2$, где $\beta > 0$ — постоянная интегрирования. Знак β определяется выбранным направлением вращения внутреннего цилиндра. Учитывая (7), (8) и полученное решение для $\sigma_{r\theta}$, находим

$$\beta a^2/r^2 = \alpha \cos 2\psi \sin 2\gamma + \sin 2\psi \cos 2\gamma. \quad (9)$$

Пусть $-\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/4$. Тогда, поскольку левая часть (9) положительна, угол ψ может изменяться в интервале

$$-(1/2) \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} 2\gamma) < \psi < -(1/2) \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} 2\gamma) + \pi/2. \quad (10)$$

Используя (9), получаем

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\beta a^2}{r^3(\alpha \sin 2\gamma \sin 2\psi - \cos 2\gamma \cos 2\psi)}. \quad (11)$$

Исключив с помощью (7), (8) разность $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ в первом уравнении системы (6), выразим производную $\partial\sigma_{rr}/\partial r$ через ψ и r . Переходя к дифференцированию по ψ с помощью (11) и исключая r с использованием (9), получаем

$$\frac{1}{T} \frac{d\sigma_{rr}}{d\psi} = \frac{2(\alpha \cos 2\psi \cos 2\gamma - \sin 2\psi \sin 2\gamma)(\cos 2\psi \cos 2\gamma - \alpha \sin 2\psi \sin 2\gamma)}{\alpha \cos 2\psi \sin 2\gamma + \sin 2\psi \cos 2\gamma}. \quad (12)$$

Пусть $\psi = \psi_a$ при $r = a$. Тогда решение уравнения (12), удовлетворяющее (3), имеет вид

$$\frac{\sigma_{rr} + p_0}{T} = \int_{\psi_a}^{\psi} \frac{2(\alpha \cos 2\mu \cos 2\gamma - \sin 2\mu \sin 2\gamma)(\cos 2\mu \cos 2\gamma - \alpha \sin 2\mu \sin 2\gamma)}{\alpha \cos 2\mu \sin 2\gamma + \sin 2\mu \cos 2\gamma} d\mu.$$

В полярной системе координат компоненты тензора скорости деформации выражаются через компоненты $\xi_{\zeta\zeta}$ и $\xi_{\eta\zeta}$ по формулам преобразования

$$\xi_{\theta\theta} = -\xi_{rr} = -\xi_{\zeta\zeta} \cos 2\gamma + \xi_{\zeta\eta} \sin 2\gamma, \quad \xi_{r\theta} = \xi_{\zeta\zeta} \sin 2\gamma + \xi_{\zeta\eta} \cos 2\gamma, \quad (13)$$

в которых учтено уравнение несжимаемости $\xi_{\zeta\zeta} + \xi_{\eta\eta} = \xi_{rr} + \xi_{\theta\theta} = 0$. Так как в рассматриваемом случае $\xi_{rr} = du_r/dr$, $\xi_{\theta\theta} = u_r/r$, то решение уравнения несжимаемости, удовлетворяющее первому условию в (1), имеет вид

$$u_r/V_0 = a/r. \quad (14)$$

Подставляя (8) в (5) и исключая λ , получаем

$$\alpha \xi_{\zeta\zeta} \operatorname{tg} 2\psi = \xi_{\zeta\eta}. \quad (15)$$

Из (13), (15) следует

$$\frac{\xi_{r\theta}}{\xi_{\theta\theta}} = \frac{\alpha \sin 2\psi \cos 2\gamma + \cos 2\psi \sin 2\gamma}{\alpha \sin 2\psi \sin 2\gamma - \cos 2\psi \cos 2\gamma}. \quad (16)$$

В рассматриваемом случае $2\xi_{r\theta} = du_\theta/dr - u_\theta/r$, $\xi_{\theta\theta} = u_r/r$. Подставляя эти соотношения в (16), переходя к дифференцированию по ψ с помощью (11) и исключая r и u_r с использованием (9) и (14), получаем уравнение для u_θ в виде

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\alpha u_\theta}{V_0 r} \right) = \frac{2}{\beta} (\alpha \sin 2\psi \cos 2\gamma + \cos 2\psi \sin 2\gamma). \quad (17)$$

Пусть $\psi = \psi_b$ при $r = b$. Тогда решение уравнения (17), удовлетворяющее (2), имеет форму

$$\frac{\alpha u_\theta}{V_0 r} = \frac{1}{\beta} [\sin 2\gamma (\sin 2\psi - \sin 2\psi_b) - \alpha \cos 2\gamma (\cos 2\psi - \cos 2\psi_b)]. \quad (18)$$

Зависимость u_θ от r в параметрическом виде можно получить из (9), (18). В частности, из (9) следует

$$\beta = \alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma; \quad (19)$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\alpha \cos 2\psi_b \sin 2\gamma + \sin 2\psi_b \cos 2\gamma}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma}. \quad (20)$$

Подставляя второе условие (1) в (18) и исключая β с помощью (19), получаем

$$\frac{U_0}{V_0} = \frac{\sin 2\gamma (\sin 2\psi_b - \sin 2\psi_a) - \alpha \cos 2\gamma (\cos 2\psi_b - \cos 2\psi_a)}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma}. \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) образуют систему для определения ψ_a и ψ_b , при решении которой необходимо учитывать неравенство (10). Если система (20), (21) имеет решение при любом значении отношения U_0/V_0 , то всегда реализуется режим прилипания. Однако можно показать, что существует некоторое максимальное значение $\Omega = U_0/V_0$, такое что при $U_0/V_0 > \Omega$ система (20), (21) не имеет решения. Величина Ω зависит от γ , α , a/b .

В случае плоской деформации уравнения рассматриваемой модели материала являются уравнениями гиперболического типа и имеют двойные характеристики, уравнения которых получены в [11]. Вводя обозначение $d\zeta/d\eta = \operatorname{tg} \chi$ (χ — угол наклона характеристики к оси η , отсчитываемый от оси по ходу часовой стрелки) и учитывая (8), эти уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{tg}^2 \chi + 2\alpha \operatorname{tg} 2\psi \operatorname{tg} \chi - 1 = 0. \quad (22)$$

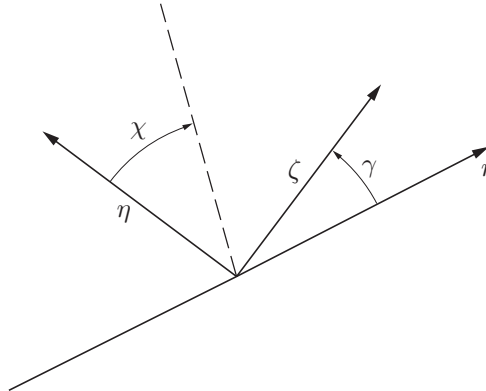


Рис. 2. Ориентация характеристического направления (штриховая линия)

На рис. 2 показано положение осей r, ζ, η , а также характеристическое направление (штриховая линия). При выполнении закона максимального трения характеристическое направление совпадает с касательной к поверхности трения. По сути, данное утверждение является формулировкой закона максимального трения в случае проскальзывания для моделей материала, описываемых гиперболическими системами уравнений. При этом сам закон максимального трения имеет ясный математический смысл. Для большинства исследованных моделей материала поверхность максимального трения является огибающей семейства характеристик. Таким образом, решение не может быть продолжено через эту поверхность. В рассматриваемом случае при выполнении закона максимального трения характеристическое направление должно быть перпендикулярно оси r . Из рис. 2 следует, что это условие выполняется при $\chi = \gamma$. Подставляя это равенство в (22), можно показать, что поверхность $r = a$ является поверхностью максимального трения, если

$$\operatorname{tg}^2 \gamma + 2\alpha \operatorname{tg} 2\psi_a \operatorname{tg} \gamma - 1 = 0. \tag{23}$$

Зная величину ψ_a , из последнего уравнения системы (8) можно найти соответствующую величину касательного напряжения. Поскольку $\operatorname{tg} 2\gamma = 2 \operatorname{tg} \gamma / (1 - \operatorname{tg}^2 \gamma)$, уравнение (23) принимает вид

$$\alpha \sin 2\psi_a \sin 2\gamma - \cos 2\psi_a \cos 2\gamma = 0. \tag{24}$$

Из (11), (24) следует, что $dr/d\psi = 0$ при $r = a$. Кроме того, из (11) можно найти вторую производную $d^2r/d\psi^2$ и с учетом (9) получить $d^2r/d\psi^2 = 2a > 0$ при $r = a$. Таким образом, при $\psi = \psi_a$ функция $r(\psi)$ достигает минимума $r = a$, если ψ_a определяется из (23). При заданном отношении a/b этому значению ψ_a соответствует некоторое значение ψ_b , определяемое из (20). По известным величинам ψ_a и ψ_b из уравнения (21) вычисляется значение Ω . При дальнейшем увеличении отношения U_0/V_0 возникает проскальзывание и решение в пластической области не изменяется (ψ_a, ψ_b определяются из (20), (21) при $U_0/V_0 = \Omega$). На рис. 3 показана зависимость Ω от угла γ , характеризующего анизотропные свойства материала, при $a/b = 1/2$ и различных значениях α , на рис. 4 — зависимость Ω от a/b при $\alpha = 2$ и различных значениях γ .

Дальнейший анализ проводится для режима проскальзывания (ψ_a определяется из (23)). Так как при $r = a$ $\xi_{\theta\theta} = V_0/a$, то из (16) следует, что при $r \rightarrow a$ $\xi_{r\theta} \rightarrow \infty$. Раскладывая в (16) знаменатель дроби в ряд в окрестности точки $\psi = \psi_a$, получаем

$$\xi_{r\theta} = \frac{V_0}{2a} \frac{\alpha \sin 2\psi_a \cos 2\gamma + \cos 2\psi_a \sin 2\gamma}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma} (\psi - \psi_a)^{-1} + o[(\psi - \psi_a)^{-1}], \quad \psi \rightarrow \psi_a. \tag{25}$$

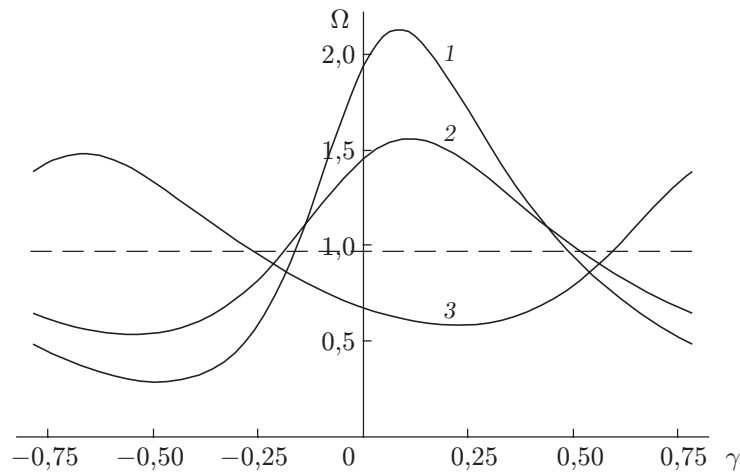


Рис. 3. Зависимость отношения скоростей, при котором возникает режим проскальзывания, от угла γ , характеризующего анизотропные свойства материала: 1 — $\alpha = 2$, 2 — $\alpha = 1,5$, 3 — $\alpha = 0,7$; штриховая линия — зависимость $\Omega(\gamma)$ для изотропного материала ($\alpha = 1$) [8]

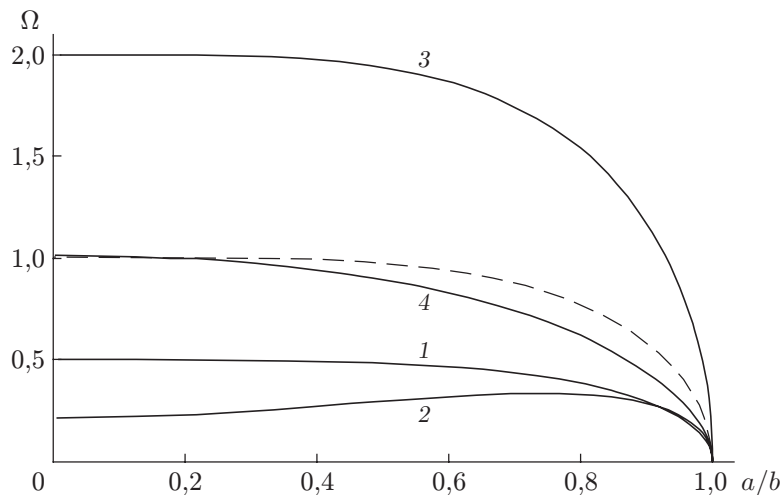


Рис. 4. Зависимость отношения скоростей, при котором возникает режим проскальзывания, от угла γ , характеризующего анизотропные свойства материала, и геометрического параметра a/b : 1 — $\gamma = \pm\pi/4$, 2 — $\gamma = -\pi/6$, 3 — $\gamma = 0$, 4 — $\gamma = \pi/6$; штриховая линия — зависимость $\Omega(a/b)$ для изотропного материала ($\alpha = 1$) [8]

Раскладывая в (11) знаменатель дроби в ряд в окрестности точки $\psi = \psi_a$ и учитывая (19), находим

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{2a(\psi - \psi_a)} + o[(\psi - \psi_a)^{-1}], \quad \psi \rightarrow \psi_a.$$

Из этого уравнения следует, что в окрестности точки $\psi = \psi_a$

$$|\psi - \psi_a| = (r - a)^{1/2}/a^{1/2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получаем

$$|\xi_{r\theta}| = \frac{V_0}{2\sqrt{a}} \left| \frac{\alpha \sin 2\psi_a \cos 2\gamma + \cos 2\psi_a \sin 2\gamma}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma} \right| (r - a)^{-1/2} + o[(r - a)^{-1/2}], \quad r \rightarrow a. \quad (27)$$

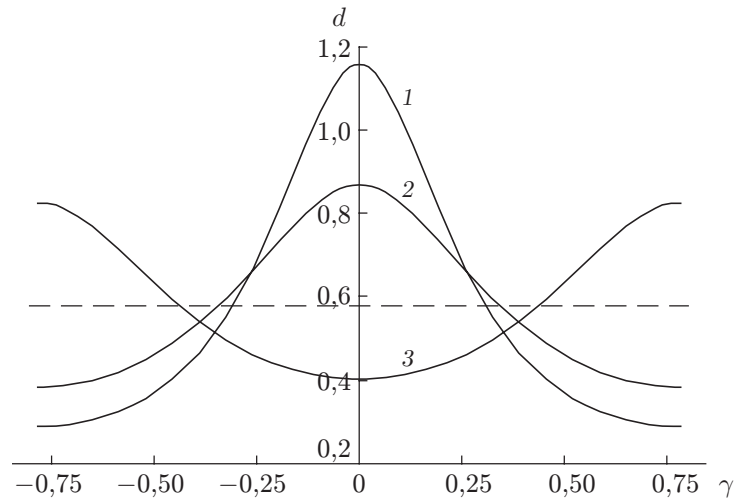


Рис. 5. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности скорости деформации от угла γ , характеризующего анизотропные свойства материала: 1 — $\alpha = 2$, 2 — $\alpha = 1,5$, 3 — $\alpha = 0,7$; штриховая линия — зависимость $d(\gamma)$ для изотропного материала ($d = 1/\sqrt{3}$)

Поскольку в полярной системе координат при $r \rightarrow a$ нормальные скорости деформации ограничены, поведение эквивалентной скорости деформации ξ_{eq} вблизи поверхности максимального трения полностью определяется разложением (27). В частности, из (27) следует

$$\xi_{eq} = \frac{V_0}{\sqrt{3a}} \left| \frac{\alpha \sin 2\psi_a \cos 2\gamma + \cos 2\psi_a \sin 2\gamma}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma} \right| (r-a)^{-1/2} + o[(r-a)^{-1/2}], \quad r \rightarrow a, \quad (28)$$

где $\xi_{eq} = \sqrt{2/3} (\xi_{rr}^2 + \xi_{\theta\theta}^2 + 2\xi_{r\theta}^2)^{1/2}$. Поведение эквивалентной скорости деформации вблизи поверхности максимального трения такое же, как и в случае изотропной пластичности [2]. Коэффициент при главном члене в разложении (28) называется коэффициентом интенсивности скорости деформации D [2]. Из (28) получаем

$$D = \frac{V_0}{\sqrt{3a}} \left| \frac{\alpha \sin 2\psi_a \cos 2\gamma + \cos 2\psi_a \sin 2\gamma}{\alpha \cos 2\psi_a \sin 2\gamma + \sin 2\psi_a \cos 2\gamma} \right|. \quad (29)$$

От коэффициента интенсивности скорости деформации зависит величина эквивалентной скорости деформации в тонком слое вблизи поверхности максимального трения, поэтому он входит в некоторые теории, описывающие эволюцию свойств материала в тонком слое вблизи поверхностей с большими удельными силами трения [12, 13]. Влияние пластической анизотропии на безразмерный коэффициент интенсивности скорости деформации $d = D\sqrt{a}/V_0$, вычисленный с помощью (23), (29), показано на рис. 5.

Следует отметить, что в случае проскальзывания линия $r = a$ является огибающей семейства характеристик. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что согласно (23) касательная к линии $r = a$ представляет собой характеристическое направление, но линия $r = a$ не является характеристикой, так как на ней не выполняется характеристическое соотношение [11].

Помимо сингулярности (28) особенностью найденного поля скоростей, в отличие от поля скоростей в изотропном случае, является немонотонность распределения окружной скорости по радиусу при $U_0/V_0 = \Omega$, $a/b = 1/2$, $\alpha = 2$ и некоторых значениях α и γ (рис. 6). Из рис. 6 следует, что при $\gamma = -\pi/8$, $-\pi/5$ окружная скорость достигает максимума

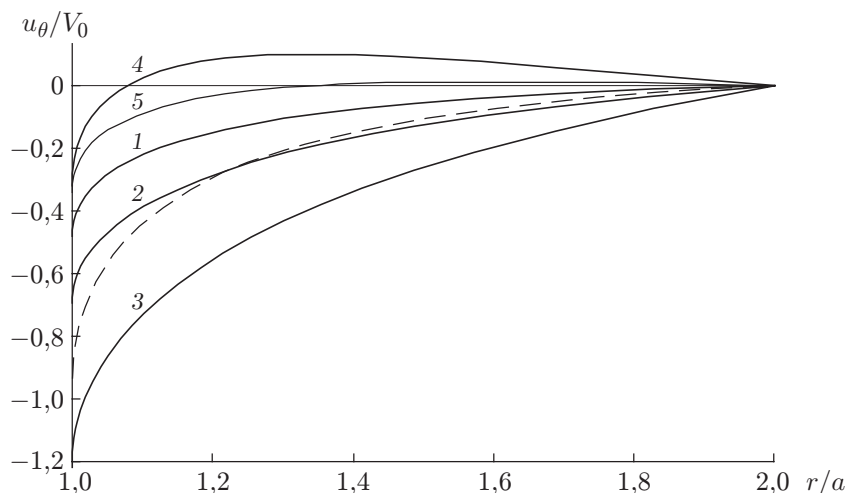


Рис. 6. Распределение окружной скорости по радиусу для анизотропного материала:

1 — $\gamma = \pm\pi/4$, 2 — $\gamma = \pi/5$, 3 — $\gamma = \pi/8$, 4 — $\gamma = -\pi/8$, 5 — $\gamma = -\pi/5$; штриховая линия — распределение окружной скорости в случае изотропного материала

при некотором значении r в интервале $a < r < b$ и, более того, меняет знак. При $\gamma > 0$ распределение окружной скорости является монотонным, как и в случае изотропного материала. Заметим, что немонотонность распределения окружной скорости также имеет место в некоторых моделях пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Об уравнениях пластического течения в пограничном слое // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 6. С. 328–334.
2. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
3. Александров С. Е., Лямина Е. А. Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 4. С. 492–495.
4. Александров С. Е. Сингулярные решения в осесимметричных течениях среды, подчиняющейся модели двойного сдвига // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 180–186.
5. Александров С. Е., Пирумов А. Р., Чесникова О. В. Особенности пластического течения пористых материалов в зоне фрикционного контакта // Порошковая металлургия. 2008. № 9/10. С. 13–20.
6. Alexandrov S., Mishuris G. Qualitative behaviour of viscoplastic solutions in the vicinity of maximum-friction surfaces // J. Engng Math. 2009. V. 65, N 2. P. 143–156.
7. Alexandrov S. Comparison of double-shearing and coaxial models of pressure-dependent plastic flow at frictional boundaries // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2003. V. 70, N 2. P. 212–219.
8. Alexandrov S., Harris D. Comparison of solution behaviour for three models of pressure-dependent plasticity: a simple analytical example // Intern. J. Mech. Sci. 2006. V. 48, N 7. P. 750–762.
9. Collins I. F., Meguid S. A. On the influence of hardening and anisotropy on the plane-strain compression of thin metal strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 2. P. 271–278.

10. **Александров С. Е.** Особенности решения задачи о сжатии ортотропного пластического материала между вращающимися плитами // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 186–192.
11. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
12. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Нелокальный критерий разрушения вблизи поверхностей трения и его приложение к анализу процесса вытяжки и выдавливания // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2007. № 3. С. 62–68.
13. **Александров С. Е., Грабко Д. З., Шикимака О. А.** К определению толщины слоя интенсивных деформаций в окрестности поверхности трения в процессах обработки металлов давлением // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 72–78.

*Поступила в редакцию 30/XII 2009 г.,
в окончательном варианте — 15/IV 2010 г.*
