

УДК 539.374

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ И РАСТЯЖЕНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва  
E-mail: lyamina@inbox.ru

Получено точное решение задачи о расширении и растяжении полого цилиндра, обобщающее известные решения, основанные на классической и градиентной теориях пластичности в условиях плоской деформации. Численное решение сводится к вычислению нескольких обыкновенных интегралов. Исследовано влияние характерного размера материала на поведение решения вблизи отверстия цилиндра.

Ключевые слова: концентратор напряжения, характерный размер, градиентная теория пластичности.

Для описания ряда эффектов, возникающих вблизи концентраторов напряжения и при деформировании тел малых размеров, используются градиентные теории пластичности (см., например, [1–8]). В частности, в работе [2] проведен подробный аналитический анализ градиентных условий пластичности и дана их физическая интерпретация.

Как и при использовании других теорий, аналитические и полуаналитические решения задач применяются при исследовании общих свойств градиентных моделей. Кроме того, точные решения используются для тестирования численных алгоритмов (см., например, [9]). В рамках градиентных теорий пластичности решения такого класса получены для случаев кручения цилиндрического стержня [1] и расширения полого цилиндра в условиях плоской деформации [8]. В настоящей работе получено еще одно точное решение.

Используем градиентную теорию пластичности, предложенную в [5], в соответствии с которой условие текучести имеет вид

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 [f^2(\varepsilon_{eq}, \xi_{eq}) + l_0 |\nabla \varepsilon_{eq}|]^2. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2} (\tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}$  — эквивалентное напряжение;  $\tau_{ij}$  — девиаторные компоненты тензора напряжения;  $\xi_{eq} = \sqrt{2/3} (\xi_{ij} \xi_{ij})^{1/2}$  — эквивалентная скорость деформации;  $\xi_{ij}$  — компоненты тензора скорости деформации;  $\sigma_0 = \text{const}$ ;  $\varepsilon_{eq}$  — эквивалентная пластическая деформация, определяемая уравнением

$$\frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} = \xi_{eq}, \quad (2)$$

$d/dt$  — полная производная по времени. Зависимость функции  $f$ , входящей в (1), от эквивалентной пластической деформации и эквивалентной скорости деформации обычно принимается в такой же форме, как и в определяющих соотношениях теории пластичности, не

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-91204-ЯФ\_а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-5157.2008.1) и ведущих научных школ (грант № НШ-134.2008.1).

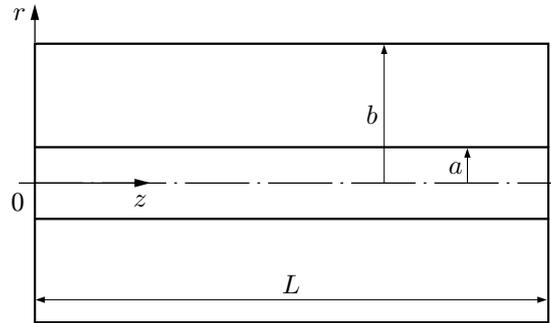


Рис. 1. Геометрия задачи

содержащих градиентный член. В данной работе предполагается, что  $f$  не зависит от  $\xi_{eq}$ , а зависимость  $f$  от  $\varepsilon_{eq}$  принимается в форме закона Свифта [10]

$$f(\varepsilon_{eq}) = (1 + \varepsilon_{eq}/\varepsilon_0)^n, \quad \varepsilon_0 = \text{const}, \quad n = \text{const}. \quad (3)$$

В (1) градиентный член вводится с помощью характерной длины  $l_0$ , являющейся свойством материала, и градиента эквивалентной пластической деформации  $\nabla \varepsilon_{eq}$ . Помимо условия пластичности (1) к определяющим уравнениям относится ассоциированный закон пластического течения, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\xi_{ij} = \lambda \tau_{ij}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4)$$

Рассмотрим полый цилиндр, начальная длина которого равна  $L_0$ , начальный внутренний радиус —  $a_0$  и начальный внешний радиус —  $b_0$ . Текущие значения этих величин обозначаются  $L$ ,  $a$ ,  $b$  соответственно. Введем цилиндрическую систему координат  $r\theta z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии цилиндра, а его торцы определяются уравнениями  $z = 0$  и  $z = L$  (рис. 1). Предполагается, что напряженно-деформированное состояние не зависит от координаты  $z$ . В частности, скорость деформации  $\xi_{zz}$  задается в виде

$$\xi_{zz} = \xi_0 = L^{-1} \frac{dL}{dt}. \quad (5)$$

Внешняя поверхность цилиндра свободна от напряжений:

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при} \quad r = b. \quad (6)$$

На внутренней поверхности цилиндра задана радиальная скорость, не зависящая от времени:

$$u = u_0 > 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (7)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\alpha = \frac{a}{a_0}, \quad q = \frac{a_0}{b_0}, \quad \rho = \frac{r}{b_0}, \quad l = \frac{l_0}{a_0}, \quad s = \frac{\xi_0 b_0}{2u_0}. \quad (8)$$

В безразмерных переменных (8) с учетом осевой симметрии и независимости напряженно-деформированного состояния от  $z$  система уравнений задачи включает уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{\rho} = 0 \quad (9)$$

и уравнения (1)–(4). В частности, из (4) следует уравнение несжимаемости, которое с ис-

пользованием (5) сводится к уравнению  $\partial(\rho u)/\partial\rho = -\rho b_0 \xi_0$ . С учетом (8) общее решение этого уравнения имеет вид

$$u/u_0 = s(\sqrt{3}\beta\rho^{-1} - \rho), \quad (10)$$

где  $\beta$  — произвольная функция времени или  $\alpha$ , определяемая с помощью (7):

$$\beta = (\alpha q/\sqrt{3})(s^{-1} + \alpha q). \quad (11)$$

С учетом (10), (11) и уравнения несжимаемости величины  $L$  и  $b$  можно представить в форме

$$L/L_0 = \exp[2sq(\alpha - 1)], \quad (b/b_0)^2 = \alpha^2 q^2 + (1 - q^2) \exp[2sq(1 - \alpha)]. \quad (12)$$

Радиальная и окружная скорости деформации определяются из (10) в виде

$$\xi_{rr} = -\xi_0(1 + \sqrt{3}\beta\rho^{-2})/2, \quad \xi_{\theta\theta} = \xi_0(\sqrt{3}\beta\rho^{-2} - 1)/2. \quad (13)$$

Подставляя (5), (13) в определение эквивалентной скорости деформации, получаем

$$\xi_{eq} = \xi_0 \sqrt{1 + \beta^2 \rho^{-4}}. \quad (14)$$

Используя (4), (5), (13), (14), можно определить девиаторные компоненты тензора напряжения в форме

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\rho^2 \sigma_{eq}}{(\rho^4 + \beta^2)^{1/2}}, \quad \tau_{\theta\theta} = -\frac{1}{3} \frac{(\rho^2 - \sqrt{3}\beta)\sigma_{eq}}{(\rho^4 + \beta^2)^{1/2}}, \quad \tau_{rr} = -\frac{1}{3} \frac{(\rho^2 + \sqrt{3}\beta)\sigma_{eq}}{(\rho^4 + \beta^2)^{1/2}}. \quad (15)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение равновесия (9), находим

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\rho} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\beta}{\rho} \frac{\sigma_{eq}}{(\rho^4 + \beta^2)^{1/2}} = 0. \quad (16)$$

Для интегрирования уравнения (16) необходимо определить эквивалентную деформацию и ее градиент, входящие в выражение для  $\sigma_{eq}$ .

Из (7) следует, что  $da/dt = u_0$ . Тогда, учитывая, что  $\varepsilon_{eq}$  не зависит от  $z$ , и используя безразмерные величины (8), из (2), (10), (14) получаем

$$\frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial\alpha} + sq(\sqrt{3}\beta\rho^{-1} - \rho) \frac{\partial\varepsilon_{eq}}{\partial\rho} = 2sq(1 + \beta^2\rho^{-4})^{1/2}. \quad (17)$$

Характеристики (17) определяются уравнением

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = sq(\sqrt{3}\beta\rho^{-1} - \rho). \quad (18)$$

С учетом (11) общее решение уравнения (18) можно записать в виде

$$\rho^2 = q^2\alpha^2 + (\rho_0^2 - q^2) \exp[2sq(1 - \alpha)], \quad (19)$$

где  $\rho_0$  — постоянная интегрирования. Очевидно, что в начале процесса деформирования (при  $\alpha = 1$ )  $\rho = \rho_0$ . В частности, при  $\rho_0 = 1$   $\rho = b/b_0$  и из уравнения (19) следует зависимость  $b/b_0$  от  $\alpha$ , совпадающая с (12). Для упрощения записи введем функцию  $\alpha$  и  $\rho_0$  в форме

$$\Lambda(\alpha, \rho_0) = q^2\alpha^2 + (\rho_0^2 - q^2) \exp[2sq(1 - \alpha)]. \quad (20)$$

С учетом (11), (19), (20) из (17) получаем соотношение вдоль характеристик в виде

$$\frac{d\varepsilon_{eq}}{d\alpha} = 2sq \left( 1 + \frac{q^2 \alpha^2 (s^{-1} + \alpha q)^2}{3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

где  $\rho_0$  считается постоянной величиной на каждой характеристике. Так как при  $\alpha = 1$   $\varepsilon_{eq} = 0$ , то решение уравнения (21) имеет форму

$$\varepsilon_{eq} = 2sq \int_1^\alpha \left( 1 + \frac{q^2 \alpha^2 (s^{-1} + \alpha q)^2}{3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2} \right)^{1/2} d\alpha. \quad (22)$$

Вместо  $\alpha$  и  $\rho$  удобно использовать следующие независимые переменные:

$$\alpha' = \alpha, \quad \rho_0 = \{q^2 + (\rho^2 - q^2 \alpha^2) \exp [2sq(\alpha - 1)]\}^{1/2}. \quad (23)$$

Выражение для  $\rho_0$  получено из (19). Учитывая (23), найдем зависимость между производными в новых и прежних переменных:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \rho}. \quad (24)$$

Производная  $\partial \rho_0 / \partial \rho$  определяется из (23) с использованием (19), (20):

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \rho} = \Lambda(\alpha, \rho_0)^{1/2} \exp [2sq(\alpha - 1)] \rho_0^{-1}. \quad (25)$$

В новых независимых переменных производная  $\partial \varepsilon_{eq} / \partial \rho_0$  может быть вычислена из (22) в предположении  $\alpha = \alpha' = \text{const}$ . Тогда имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \rho_0} = -\frac{4sq^3 \rho_0}{\sqrt{3}} \int_1^\alpha \frac{\alpha^2 (s^{-1} + \alpha q)^2 \exp [2sq(1 - \alpha)]}{[\alpha^2 q^2 (s^{-1} + \alpha q)^2 + 3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2]^{1/2} \Lambda(\alpha, \rho_0)^2}. \quad (26)$$

Подставляя (25), (26) в (24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \rho} &= -\frac{4sq^3}{\sqrt{3}} \Lambda(\alpha, \rho_0)^{1/2} \exp [2sq(\alpha - 1)] \times \\ &\quad \times \int_1^\alpha \frac{\alpha^2 (s^{-1} + \alpha q)^2 \exp [2sq(1 - \alpha)]}{[\alpha^2 q^2 (s^{-1} + \alpha q)^2 + 3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2]^{1/2} \Lambda(\alpha, \rho_0)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

В рассматриваемом случае  $|\nabla \varepsilon_{eq}| = |\partial \varepsilon_{eq} / \partial \rho| b_0^{-1}$ , поэтому выражения (22), (27) позволяют с помощью (1), (3) определить величину  $\sigma_{eq}$ , входящую в (16), как функцию  $\alpha$  и  $\rho_0$ . Для интегрирования уравнения (16) удобно перейти к дифференцированию по  $\rho_0$  с помощью (24), (25). В результате получаем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \rho_0} = \frac{2\alpha q (s^{-1} + \alpha q) \rho_0 \sigma_{eq}}{\sqrt{3} \Lambda(\alpha, \rho_0) \exp [2sq(\alpha - 1)] [3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2 + (s^{-1} + \alpha q)^2 \alpha^2 q^2]^{1/2}}.$$

После исключения из последнего уравнения  $\sigma_{eq}$  с помощью (1) и (3) его решение, удовлетворяющее условию (6), записывается в виде

$$\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} = \frac{2\alpha q(s^{-1} + \alpha q)}{\sqrt{3} \exp[2sq(\alpha - 1)]} \int_1^{\rho_0} \frac{\rho_0[(1 + \varepsilon_{eq}/\varepsilon_0)^{2n} + ql|\partial\varepsilon_{eq}/\partial\rho|]^{1/2}}{\Lambda(\alpha, \rho_0)[3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2 + (s^{-1} + \alpha q)^2\alpha^2q^2]^{1/2}} d\rho_0. \quad (28)$$

Напряжение, которое необходимо приложить к поверхности  $r = a$ , определяется из этого соотношения при замене  $\rho_0$  на  $q$  в верхнем пределе интеграла. С использованием (22), (27) интегрирование в (28) можно выполнить численно, после чего окружное напряжение определяется с помощью (15) по формуле

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} + \frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\alpha q(s^{-1} + \alpha q)[(1 + \varepsilon_{eq}/\varepsilon_0)^{2n} + ql|\partial\varepsilon_{eq}/\partial\rho|]^{1/2}}{[3\Lambda(\alpha, \rho_0)^2 + \alpha^2q^2(s^{-1} + \alpha q)^2]^{1/2}}. \quad (29)$$

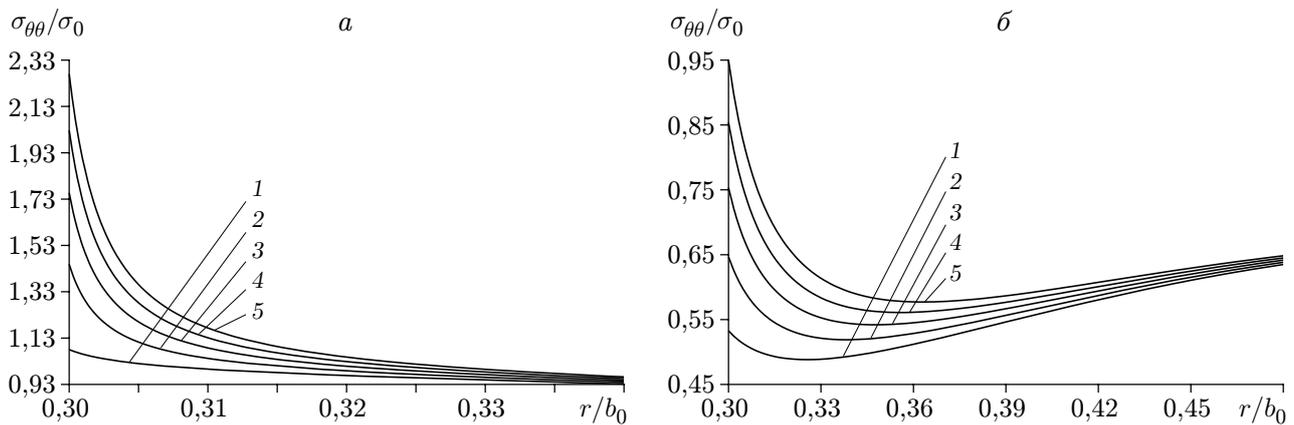


Рис. 2. Зависимость окружного напряжения от радиуса вблизи концентратора напряжения:

$a$  —  $s = 5$ ,  $b$  —  $s = 0,5$ ; 1 —  $l = 0$  (градиентный член отсутствует), 2 —  $l = 0,1$ , 3 —  $l = 0,2$ , 4 —  $l = 0,3$ , 5 —  $l = 0,4$

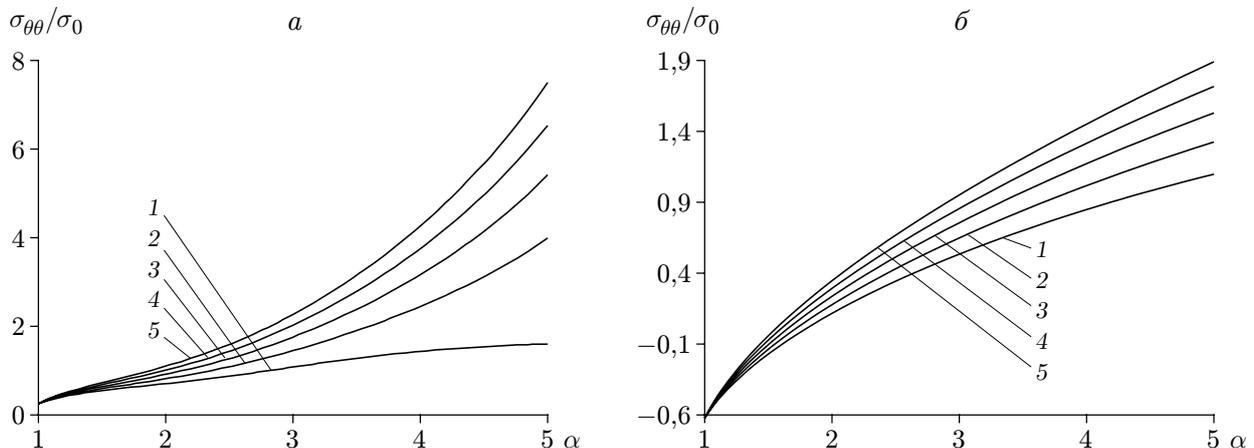


Рис. 3. Зависимость окружного напряжения на внутренней поверхности цилиндра от  $\alpha$  (обозначения те же, что на рис. 2)

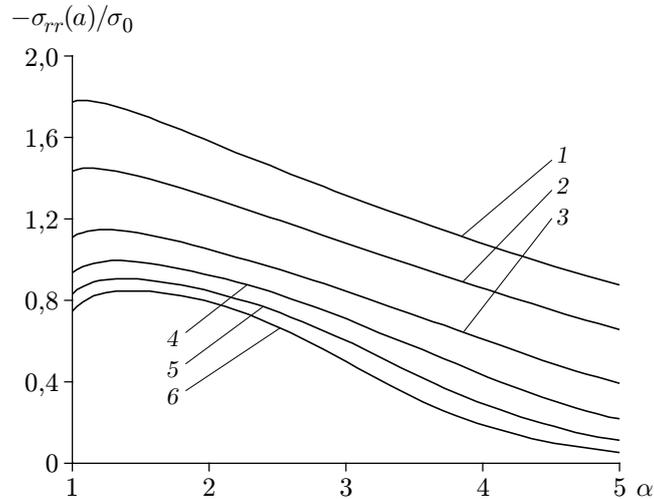


Рис. 4. Зависимость радиального напряжения на внутренней поверхности цилиндра от  $\alpha$ :

1 —  $s = 0,5$ ; 2 —  $s = 1$ ; 3 —  $s = 2$ ; 4 —  $s = 3$ ; 5 —  $s = 4$ ; 6 —  $s = 5$

Для ряда алюминиевых сплавов можно считать  $\varepsilon_0 = 0,222$ ,  $n = 0,25$  [11], поэтому во всех рассмотренных ниже случаях принимаются эти значения, а также значение  $q = 0,1$ . Наибольший интерес представляет зависимость решения вблизи концентратора напряжения от  $l$ . В параметрическом виде зависимость  $\sigma_{\theta\theta}$  от  $r$  определяется из (19) и (29). На рис. 2 показана зависимость  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в окрестности поверхности  $r = a$  при  $\alpha = 3$  и различных значениях  $l$ . Распределение напряжения  $\sigma_{rr}$  вдоль радиуса практически не зависит от  $l$ . Зависимость окружного напряжения от  $\alpha$  при  $r = a$  и различных значениях  $l$  показана на рис. 3. При  $r = a$  и заданной величине  $\alpha$  радиальное напряжение практически не зависит от  $l$ . Для реализации процесса деформирования это давление должно быть приложено к внутренней поверхности. Зависимость  $\sigma_{rr}(a)$  от  $\alpha$  при  $l = 0$  показана на рис. 4. Из результатов, представленных на рис. 2–4, следует, что характерный размер материала оказывает существенное влияние на распределение окружного напряжения в окрестности концентратора напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fleck N. A., Muller G. M., Ashby M. F., Hutchinson J. W. Strain gradient plasticity: theory and experiment // Acta Metall. Mater. 1994. V. 42, N 2. P. 475–487.
2. Новопашин М. Д. Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений / М. Д. Новопашин, С. В. Сукнев, А. М. Иванов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
3. Zhu H. T., Zbib H. M., Aifantis E. C. Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites // Acta Mech. 1997. V. 121. P. 165–176.
4. Zervos A., Papanastasiou P., Vardoulakis I. Modelling of localization and scale effect in thick-walled cylinders with gradient elastoplasticity // Intern. J. Solids Struct. 2001. V. 38. P. 5081–5095.
5. Yuan H., Chen J. Identification of the intrinsic material length in gradient plasticity theory from micro-indentation tests // Intern. J. Solids Struct. 2001. V. 38. P. 8171–8187.
6. Tsagrakis I., Aifantis E. C. Recent development in gradient plasticity. Pt 1. Formulation and size effects // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 2002. V. 124, N 2. P. 352–357.

7. **Konstantinidis A. A., Aifantis E. C.** Recent development in gradient plasticity. Pt 2. Plastic heterogeneity and wavelets // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 2002. V. 124, N 2. P. 358–364.
8. **Gao X.-L.** Analytical solution of a borehole problem using strain gradient plasticity // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 2002. V. 124, N 2. P. 365–370.
9. **Sinclair G. B., Anaya-Dufresne M., Meda G.** Tuned test problems for numerical methods in engineering // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1997. V. 40. P. 4183–4209.
10. **Swift H. W.** Plastic instability under plane stress // J. Mech. Phys. Solids. 1952. V. 1, N 1. P. 1–18.
11. **Rees D. W. A.** Basic engineering plasticity. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2006.

*Поступила в редакцию 14/V 2008 г.,  
в окончательном варианте — 28/XI 2008 г.*

---