

ражаются в элементарных функциях подобно тому, как это сделано в [3,4]. Например

$$v_r = v_1 \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k} \sum_{n=1}^{2k} \sum_{i=1}^k v_{2k, n, 2i}(\xi) P_{2i}^n(\tau) \sin n\varphi + \\ + v_1 \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1} \sum_{n=0}^{2k} \sum_{i=0}^k v_{2k-1, n, 2i}(\xi) P_{2i}^n(\tau) \cos n\varphi$$

Здесь $R = r_1 v_1 / v$, $\xi = r/r_1$, $\tau = \cos\theta$, $P_m^n(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра.

Зная эти решения, можно показать, что главный вектор силы взаимодействия внутренней сферы и жидкости тождественно равен нулю, а проекции вектора момента сопротивления M вращению той же сферы на оси прямоугольной системы координат x, y, z , расположенной так, что ось z совпадает с лучом $\theta = 0$, а ось x лежит в плоскости $\varphi = 0$, будут иметь с точностью до R^2 следующие значения:

$$(2) \quad M_x = 8\pi\mu v_1 r_1^2 b \delta_0 \sin\beta [a^{-1} + R^2 \delta_1 (\delta_7 - b\delta_5 \cos\beta + b^2 \delta_6)], \quad M_y = 0 \\ M_z = -8\pi\mu v_1 r_1^2 \delta_0 \{1 - a^{-1} b \cos\beta + R^2 \delta_1 [\delta_2 + b\delta_3 \cos\beta + b^2 (\delta_4 - \\ - \delta_5 \sin^2\beta) - b^3 \delta_6 \cos\beta]\}$$

$$a = \frac{r_2}{r_1}, \quad b = \frac{v_2}{v_1}, \quad \delta_0 = \frac{a^3}{\delta}, \quad \delta_1 = \frac{a(a-1)^7}{300\Delta\delta^3}, \quad \delta = a^3 - 1$$

$$\Delta = 4a^6 + 16a^5 + 40a^4 + 55a^3 + 40a^2 + 16a + 4, \quad \delta_2 = a^7 + 11a^6 + \\ + 66a^5 + 146a^4 + 136a^3 + 45a^2, \quad \delta_3 = 37a^6 + 182a^5 + 237a^4 + 47a^3 - \\ - 98a^2 - 45a, \quad \delta_4 = 45a^6 + 98a^5 - 47a^4 - 237a^3 - 182a^2 - 37a, \quad \delta_5 = \\ = 0.375(30a^6 + 2a^5 - 353a^4 - 663a^3 - 443a^2 - 88a), \quad \delta_6 = 45a^5 + \\ + 136a^4 + 146a^3 + 66a^2 + 11a + 1, \quad \delta_7 = 0.125(-32a^6 - 127a^5 + 93a^4 + \\ + 683a^3 + 778a^2 + 270a)$$

Предельный переход в (2) при $\omega_2 = 0$, $a \rightarrow \infty$ приводит к известным результатам для сферы, вращающейся в неограниченной вязкой жидкости [3].

Поступила 17 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Odqvist F. K. G. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zähler Flüssigkeiten. Math. Zeitschrift, 1930, Bd. 32, Nr. 3.
3. Овсенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
4. Овсенко Р. И., Овсенко Ю. Г. О лобовом сопротивлении вращающейся сферы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.

УДК 532.593

ПЛОСКАЯ ВЗРЫВНАЯ ВОЛНА В ГРУНТАХ

Р. Г. Якунов

(Уфа)

В работе показано, что для определения скорости фронта плоской ударной волны и параметров движения грунта за фронтом в области от границы заряда ВВ до момента излучения звука можно пользоваться простыми аналитическими выражениями. Приводится сравнение расчетных данных с результатами полевых испытаний. В расчетах использована диаграмма сжатия грунта, построенная с учетом результатов эксперимента.

1. Рассматриваемой задаче посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ [1-5], в которых грунт моделировался «пластическим газом», несжимаемой жидкостью и упругопластическим телом, подчиняющимся законам теории пластичности.

В данной работе принята модель грунта, предложенная в [6]. Предполагается, что плоская волна ударная и распространяется по невозмущенной среде, пластическое течение начинается сразу за фронтом и плотность в частице после прохождения фронта ударной волны остается неизменной.

Для описания среды имеем два условия: условие пластичности и закон объемного сжатия

$$(1.1) \quad J_2 = (kp + b)^2/6$$

$$(1.2) \quad p(\theta) = p^0 \theta^n$$

где J_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений, p — среднее гидростатическое давление, k , b — коэффициенты, характеризующие соответственно внутреннее трение и сцепление грунта, $\theta = 1 - \rho_0/\rho$ — объемная деформация, ρ_0 — начальная плотность, ρ — плотность частиц за фронтом ударной волны.

Из соотношений (1.1) и (1.2) можно получить закон сжатия для одноосного деформированного состояния ($\epsilon_y = \epsilon_z = 0$, $\epsilon_x = \theta$)

$$(1.3) \quad \sigma_x = (1 + \sqrt{2}k/3) p^0 \epsilon_x^n + \sqrt{2}b/3$$

Волна распространяется в направлении оси x и в дальнейшем принимаем $\sigma_x = \sigma$, $\epsilon_x = \epsilon$.

Определим параметры ударной волны, распространяющейся в неводонасыщенном песчаном грунте нарушенной структуры влажностью $w = 15 \div 17\%$. Сжимаемость грунта различна, коэффициенты $k = 1.25$, $b = 0$. Используемые в расчете диаграммы сжатия (1.2) приведены на фиг. 1.

Кривая 1 изображает диаграмму сжатия грунта с объемным весом скелета $\gamma_1 = (1.225 - 1.295) \cdot 10^4 \text{ н/м}^3$, кривая 2 — с объемным весом скелета $\gamma_2 = (1.32 - 1.37) \cdot 10^4 \text{ н/м}^3$. Участки кривых, соответствующие эксперименту [7], проведены сплошной линией и описываются степенным законом (1.2). Показатель степени сжатия n и параметр p^0 соответственно для кривых 1 и 2 равны 2.5, 3.0 и $14.8 \cdot 10^8$, $3.64 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$. Замеры [7, 8] показывают, что при больших давлениях уплотнение достигает предельного значения и остается постоянным. Поэтому диаграмма сжатия должна иметь асимптоту, соответствующую давлению, стремящемуся к бесконечности. Принимаем, что предельные значения деформаций для кривой 1 колеблются в пределах $\epsilon_* = 0.085 - 0.1$, для кривой 2 $\epsilon_* = 0.2$. Последние приняты из анализа опытных данных [5] для неводонасыщенных песчаных грунтов.

В однородном грунте, занимающем все пространство, между плоскостями $x_0 = \pm a$ расположен заряд ВВ, который при взрыве мгновенно без изменения объема превращается в газ высокого давления. Начальное давление в продуктах мгновенной детонации

$$p_1 = \rho_c D^2/2 (1 + \lambda)$$

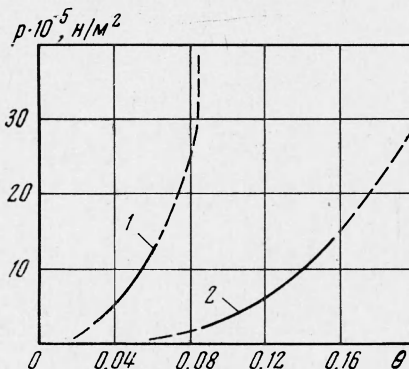
где D — скорость детонации, ρ_c — плотность заряда ВВ, λ — показатель изэнтропии для продуктов детонации. Принимая $D = 7 \cdot 10^3 \text{ м/сек}$, $\rho_c = 1.6 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3$, найдем $p_1 = 10^{10} \text{ н/м}^2$.

Используя соотношение равенства смещений на границе каверны в момент истечения продуктов детонации в среду [9]

$$\frac{2D}{\lambda - 1} \sqrt{\frac{\lambda}{2(\lambda + 1)}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\lambda - 1)/2\lambda} \right] = \sqrt{\frac{p_2 \epsilon_*}{\rho_0 a}}$$

выражение (1.3) и условие равенства напряжений на границе предельного и переменного уплотнений, находим начальное давление в грунте $p_2 \approx 2 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$. Приложение данной динамической нагрузки к поверхности $x_0 = \pm a$ вызывает образование в грунте ударной волны, которая затем распространяется по среде.

В силу симметрии процесс рассматриваем с одной стороны от середины заряда. Начало координат — в точке симметрии.



Фиг. 1

Движение грунта после прохождения ударной волны в переменных Лагранжа описывается уравнениями

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x_0}, \quad u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 - \varepsilon$$

где x_0 и x — координаты частицы по Лагранжу и Эйлера, t — время, u — скорость. Граничными условиями для (1.4) служат выражения законов сохранения на фронте волны, условие непрерывности текущей координаты и равенство давлений на границе расширяющейся каверны

$$(1.5) \quad \sigma_f = \rho_0 \varepsilon_f (dx_f/dt)^2, \quad u_f = \varepsilon_f (dx_f/dt), \quad x_f = x_0, \quad \bar{p}_z = p_2 (a/x)^\gamma$$

Индекс f означает, что величины берутся на фронте волны, \bar{p}_z — давление на границе каверны. Показатель политропы принимаем $\gamma = 1.25$.

Запишем решение (1.4) с учетом (1.5) [2]

$$(1.6) \quad \bar{x} = s + \int_s^{\bar{x}_f} \varepsilon_f [y(s)] ds, \quad \bar{\sigma} = (\bar{x}_f - s) \varphi(y) (dy/d\bar{x}_f) + \varepsilon_f y^2$$

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad s = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{x}_f = \frac{x_f}{a}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{p_2}, \quad \tau = \frac{t}{a} \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{1/2}, \quad y = \frac{dx_f}{d\tau}$$

$$\varphi(y) = \frac{y d(\varepsilon_f y)}{dy}$$

где y — безразмерная скорость фронта волны, зависимость $\varepsilon_f(y)$ известна из условия на фронте волны и (1.3) и имеет вид

$$(1.7) \quad \varepsilon_f = \beta y^m, \quad \beta = [(1 + \sqrt{2}k/3) (p^0/p_2)]^{-m/2}, \quad m = 2/(n-1)$$

Подстановка соотношений (1.6) в последнее выражение (1.5) и последующее дифференцирование дает уравнение для скорости фронта волны

$$(1.8) \quad \frac{d}{d\eta} \left[\varphi(y) \eta \frac{dy}{d\eta} + \varepsilon(y) y^2 \right]^{-1/\gamma} = \varepsilon(y), \quad y^2(0) \varepsilon[y(0)] = 1, \quad \eta = \bar{x}_f - 1$$

После замены переменных

$$(1.9) \quad v = A_0^{-1} y \eta^{-\omega}, \quad d \ln \eta / dv = 1/\Psi(v)$$

(1.8) принимает вид [2]

$$(1.10) \quad \frac{d\Psi}{dv} - \frac{v}{\Psi} \frac{m+2}{m+1} \omega \mu^{-1/\gamma} \left[\mu + (m+1) \frac{\Psi}{v} \right]^\alpha v^{-1/\omega} + \frac{m+2}{m+1} \omega \mu \frac{v}{\Psi} +$$

$$+ (m+1) \frac{\Psi}{v} + \frac{m+2}{m+1} \mu + (m+2) \omega = 0$$

$$A_0^{-1/\omega} = -\beta^{-\alpha} \frac{m+2}{\gamma} \omega \mu^{-1/\gamma}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\gamma}, \quad \omega = -\frac{\gamma}{2+m+m\gamma}$$

$$\mu = \omega(m+1) + 1$$

Граничные условия для (1.10)

$$\Psi = 0, \quad d\Psi/dv = -\omega \quad (v=0), \quad \Psi = 0 \quad (v=1)$$

2. Приведем решение уравнения (1.8) для области постоянного уплотнения ($m=0$, $\varepsilon_* = \beta$) [2]

$$(2.1) \quad y = \frac{1}{\beta \eta} \left\{ \frac{2}{\beta(1-\gamma)(2-\gamma)} [1 + \beta \eta (2-\gamma) (1 + \beta \eta)^{1-\gamma} - (1 + \beta \eta)^{2-\gamma}] \right\}^{1/2}$$

Безразмерные напряжения при постоянном и переменном уплотнении на фронте определяются соответственно выражениями

$$(2.2) \quad \bar{\sigma}_f = \beta y^2, \quad \bar{\sigma}_f = \beta y^{m+2}$$

Из условия равенства напряжений в момент перехода от постоянного уплотнения к переменному следует, что решение (2.1) справедливо в диапазоне $y(0) \geq y \geq 1$.

Для определения движения фронта волны в области переменного уплотнения производим численное интегрирование уравнения (1.10) на ЭЦВМ. График зависимости $\Psi(v)$ показан на фиг. 2. Кривые 1, 2 и 3 на фиг. 2 соответствуют значениям $n = 3, 2.5$ и 1.8 . Используя полученные графики $\Psi(v)$, аппроксимируем правую часть второго соотношения (1.9) выражением

$$(2.3) \quad 1/\Psi = (\xi - v)/\kappa v (1 - v)$$

и после интегрирования находим

$$(2.4) \quad \eta = C [v^\xi / (1 - v)^{\xi-1}]^{1/\kappa}$$

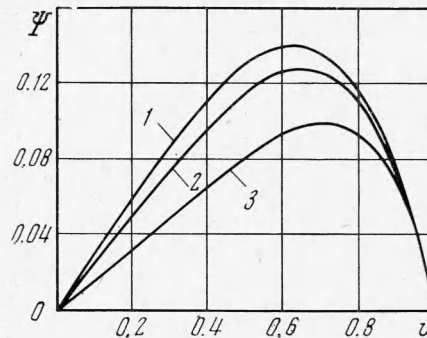
где ξ и κ — параметры. Постоянную интегрирования и начальное значение v в (2.4) и (1.9) определяем из условия сопряжения $y(\eta)$ с решением (2.1).

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что значения безразмерной скорости фронта волны, определенные с помощью соотношений (2.4), (1.9) и по формуле

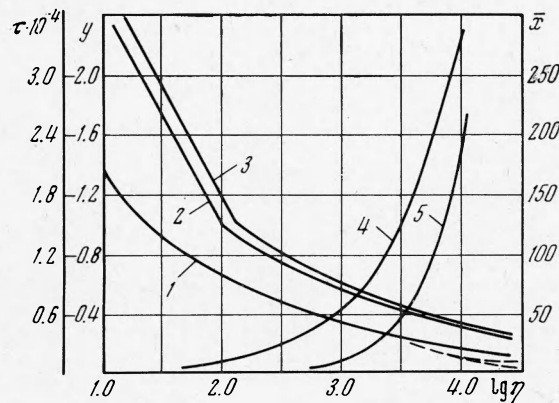
$$(2.5) \quad y = A_0 \eta^\omega$$

совпадают. Выражение (2.5) является асимптотическим решением (1.8). Поэтому в области переменного уплотнения можно пользоваться формулой (2.5). Коэффициент A_0 определяется при этом из условия сопряжения и отличается от прежнего значения незначительно.

Графики зависимости $y(\eta)$, построенные по формулам (2.1), (2.5) и экспериментальные [5] приведены на фиг. 3. Кривые 1, 2, 3 относятся к песчаному грунту с показателем степени сжатия $n = 3, 2.5, 3$ и предельной деформацией $\epsilon_* = 0.2, 0.1, 0.085$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Экспериментальные значения скорости распространения волны определены при значении влажности $w = 10 - 12\%$ и на фиг. 3 представлены пунктирной кривой.

При известной скорости волны можно определить все параметры фронта волны и движения грунта. Для дальнейших вычислений удобно (2.1) аппроксимировать выражением

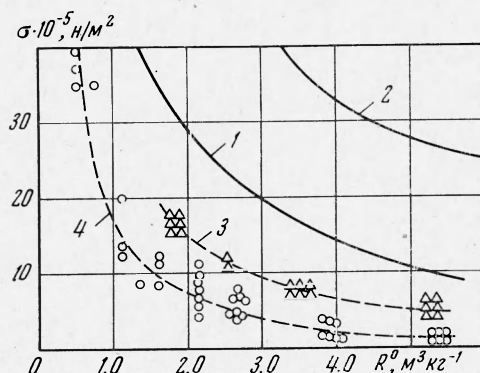
$$y = (a\eta^b + c)^{-1}$$

Кривые 4, 5 на фиг. 3 показывают изменение границы каверны $\bar{x}(\eta)$ и времени распространения ударной волны $\tau(\eta)$ при предельной деформации $\epsilon_* = 0.085$. На фиг. 4 даны расчетные графики изменения зависимости напряжений на фронте от относительного расстояния $\sigma(R^0)$ (кривые 1, 2) и экспериментальные данные измерения напряжений при полевых испытаниях [5] (кривые 3, 4 соответствуют пескам с $w = 10 - 12\%$ и $2 - 4\%$). При построении графиков напряжений 1 и 2 использованы значения скорости волны, приведенные соответственно в виде графиков 1 и 2 на фиг. 3. Координата η и относительное расстояние R^0 связаны зависимостью

$$\eta = 2 \cdot 10^3 \rho_c R^0$$

Зона распространения ударной волны и параметры грунта за фронтом значительно зависят от сжимаемости грунта. Поэтому для более точного количественного анализа необходимы данные о сжимаемости грунта при больших значениях давления.

Аппроксимация диаграммы сжатия графиком, приведенным на фиг. 1, позволяет производить расчеты по простым формулам (2.1) и (2.5).



Фиг. 4

Расчетные и экспериментальные данные согласуются удовлетворительно. Решение (2.5) справедливо до момента излучения звука, после чего начинается область распространения упругопластических деформаций.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианкин Э. И. Распространение плоских одномерных волн при ударе по пластической среде. Тр. МФТИ, 1960, № 5.
2. Андрианкин Э. И. Плоская ударная волна в пластической среде. Тр. МФТИ, 1959, № 4.
3. Сагомонян А. Я. Одномерные движения грунта со сферическими, цилиндрическими и плоскими волнами. Сб. «Динамика грунтов», № 44. М., Госстройиздат, 1961.
4. Зволлинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение пластической волны от преграды. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
5. Лязов Г. М., Полякова Н. И. Волны в сплошных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.
6. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
7. Рыков Г. В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте. ПМТФ, 1964, № 1.
8. Ромашов А. Н., Родионов В. Н., Сухотин А. Н. Взрыв в уплотняющейся неограниченной среде. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 4.
9. Станюкович К. Н. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 2/IV-1974 г. Т-07871 Подписано к печати 27/V-1974 г. Тираж 2010 экз.
Зак. 352 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,1 Бум. л. 5³/₄ Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10