

СТРУКТУРА ГРАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

На основе разработанной автором модели двухслойной мелкой воды при учете перемешивания между слоями исследованы стационарные плотностные течения в горизонтальном канале. Показано, что структура гравитационного течения и интенсивность перемешивания в его головной части существенно зависят от глубины канала. Найдены условия за фронтом, определяющие основные характеристики гравитационного течения.

Гравитационное или «плотностное» течение представляет собой течение одной жидкости внутри другой под действием гравитационных сил. Как правило, это течение реализуется вдоль верхней или нижней границы, но может встречаться и в виде интрузий вдоль границы раздела жидкостей различной плотности. Одним из важных аспектов гравитационного течения, определяющих его структуру, является интенсивное перемешивание непосредственно за фронтом.

В длинноволновом приближении наиболее подходящей моделью рассматриваемого класса течений является трехслойная схема течения, в которую, наряду с однородными слоями различной плотности, включена область, занятая перемешанной жидкостью. Уравнения трехслойного течения, описывающие процессы перемешивания и генерации коротких волн на внутренних границах раздела, выведены и проанализированы в [1, 2]. Введение в математическую модель прослойки между однородными слоями как области с собственным набором осредненных величин, ее характеризующих (скоростью, толщиной, плотностью и др.), основано на использовании полных законов сохранения массы, импульса и энергии и позволяет учесть влияние второй моды (прослоечных волн) на структуру гравитационного течения. Это влияние мало изучено и должно учитываться при интерпретации лабораторных и натуральных наблюдений.

Другая отличительная черта гравитационного течения — формирование характерного «носика» на переднем фронте — связана с влиянием пограничного слоя [3] и в данной работе не рассматривается. Основное внимание при сопоставлении полученных результатов с экспериментальными данными уделено схеме течения с «подвижным дном», реализованной в [4, 5], где эффективно моделируются условия «проскальзывания» и стационарный фронт гравитационного течения взаимодействует с равномерным набегающим потоком.

В работе показано, что при отсутствии дополнительного контроля вниз по потоку за фронтом гравитационного течения реализуется режим максимального вовлечения и основные характеристики потока, включая внутреннее число Ричардсона в области перемешивания, количество перемешанной жидкости и т. д., могут быть найдены как функции только двух безразмерных параметров: числа Фруда набегающего потока и разности напоров во встречных потоках.

1. Пусть канал с горизонтальным дном заполнен двухслойной жидкостью глубиной H , причем верхний однородный слой толщиной h^+ , плотностью ρ^+ отделен от нижнего однородного слоя глубиной h и плотностью ρ^- ($\rho^+ < \rho^-$) прослойкой толщиной

$\eta(h + \eta + h^+ = H)$. В прослойке за счет сдвига скоростей в слоях развивается интенсивное мелкомасштабное движение со среднеквадратичной скоростью q , в результате которого средняя плотность $\bar{\rho}$ в прослойке отличается от плотности однородных слоев. В приближении Буссинеска ($(\rho^- - \rho^+)/\rho^+ \ll 1$) уравнения плоскопараллельного течения с учетом перемешивания имеют вид [2]

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= -\sigma q, & h_t^+ + (h^+w)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (\eta v)_x &= 2\sigma q, \\ w_t + (w^2/2 + p)_x &= 0, & u_t + (u^2/2 + bh + b\eta + p)_x &= 0, \\ (hu + \eta v + h^+w)_t + (hu^2 + \eta v^2 + h^+w^2 + Hp + \bar{b}\eta^2/2 + \bar{b}\eta h + bh^2/2)_x &= 0, \\ (bh + b\eta)_t + (bhu + b\eta v)_x &= 0, \\ (hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + h^+w^2 + b\eta^2 + 2b\eta h + bh^2)_t + \\ + (hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + h^+w^3 + 2p\bar{Q} + 2\bar{b}\eta hu + 2\bar{b}(h + \eta)\eta v + 2bh^2u)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $b = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+$, $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+$ — плавучесть в прослойке и нижнем слое; g — ускорение силы тяжести; u, w, v — средние горизонтальные скорости в верхнем, нижнем слоях и прослойке соответственно; ρ^+p — давление на верхней границе течения ($H \equiv \text{const}$ в приближении Буссинеска). В силу уравнений (1.1) полный расход $Q = hu + \eta v + h^+w$ является только функцией времени и считается заданным из граничных условий.

Система (1.1) получается добавлением к известным уравнениям «мелкой воды» для верхнего и нижнего однородных слоев полных законов сохранения импульса, массы и энергии, необходимых для нахождения величин v, b, q в прослойке [2].

Закон сохранения энергии используется для определения скорости вовлечения в прослойку жидкости из однородных слоев. При этом скорость вовлечения полагается пропорциональной скорости q мелкомасштабного движения в прослойке [6].

Численное значение коэффициента $\sigma = 0,15$ определяет соотношение между вертикальным и горизонтальным масштабами течения и не является существенным для модели, так как растяжением переменных параметр σ может быть исключен из уравнений (1.1).

Уравнения (1.1) наиболее пригодны для описания процессов вовлечения в прослойку, обусловленных развитием неустойчивости Кельвина — Гельмгольца на границе раздела однородных слоев в течениях со сдвигом скорости. Эта модель и различные ее модификации использованы в задачах об эволюции слоя смешения [1, 2], перехода его в затопленную струю, а также в задаче о блокировке потока при сверхкритическом обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью.

Система (1.1) записана в виде законов сохранения, так что трехслойная схема течения решает известную проблему выбора соотношений на внутренних гидравлических прыжках. Как показано в [1, 2], структура уравнений такова, что для слоя смешения и затопленной струи режим максимального вовлечения [7] реализуется в силу уравнений без дополнительных предположений о внутренней устойчивости потока.

В (1.1) искомыми функциями являются $h, \eta, u, v, w, \bar{b}, q, p$. Характеристики системы состоят из характеристик хорошо известной системы уравнений трехслойной мелкой воды и кратной контактной характеристики $dx/dt = v$. Поэтому при небольшом сдвиге скоростей в слоях система (1.1) гиперболична. В рассматриваемой модели учтен также механизм вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку за счет преобразования кинетической энергии потока в энергию вихревого движения. Поэтому при увеличении сдвига скоростей в слоях возрастает и толщина прослойки, что препятствует выходу решения системы (1.1) из области гиперболичности. Во внутренних гидравлических прыжках деформация потока происходит настолько быстро, что вовлечением можно пренебречь, за

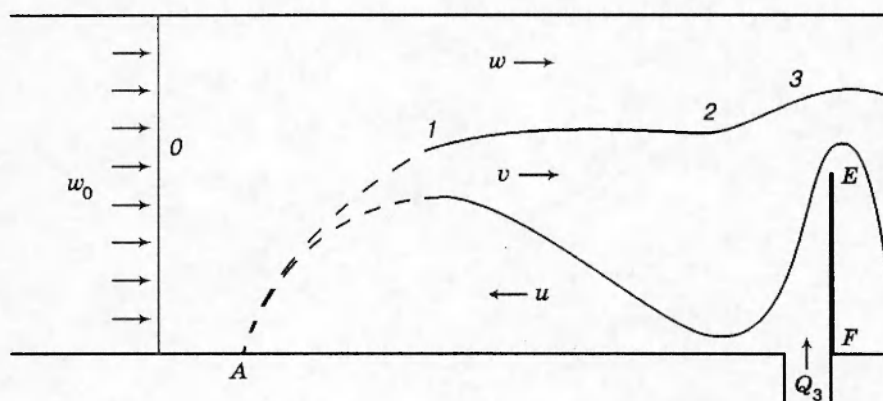


Рис. 1

фронтом течение может стать неустойчивым. Поэтому дополнительным условием устойчивости прыжка является гиперболичность системы уравнений непосредственно за фронтом волны.

Для гравитационных течений, рассмотренных ниже, анализ соотношений на прыжках осложняется тем, что в стационарном течении частицы из однородных слоев поступают в область смешения с различных сторон. Это означает, что на фронте гравитационного течения разрывы, соответствующие первой и второй модам, сливаются. Проблема устойчивости таких образований изучена еще недостаточно. Тем не менее многие характерные свойства гравитационного течения могут быть получены из анализа стационарных решений системы (1.1), приведенного ниже.

2. Рассмотрим схему гравитационного течения, реализованную в [4, 5] (рис. 1). В горизонтальном канале создавался равномерный поток жидкости плотностью ρ^+ , движущейся в положительном направлении с горизонтальной скоростью $w_0 > 0$. Затем в канал снизу подавалась жидкость плотностью ρ^- ($\rho^+ < \rho^-$), которая, распространяясь навстречу однородному потоку, формировала стационарный фронт гравитационного течения. Для устранения влияния трения и создания равномерного набегающего потока слева от фронта (точка A) в экспериментах [4, 5] использовано «дно», движущееся со скоростью w_0 .

Структура головной части гравитационного течения показана на рис. 1. В ней можно выделить переднюю часть (изображена штриховой линией) с гладкой резко выделенной границей раздела между жидкостями различной плотности. Перемешивание на этом участке практически отсутствует, и вследствие больших вертикальных градиентов гипотеза о гидростатичности распределения давления в окрестности границы раздела не выполняется. Поэтому передняя часть гравитационного течения в приближении мелкой воды моделируется внутренним гидравлическим прыжком, переводящим состояние 0 в равновесное состояние 1 за фронтом течения. На участке 1–2 наблюдается бурное развитие сдвиговой неустойчивости, приводящее к формированию вихрей и вовлечению жидкости из однородных слоев в прослойку. Именно на этом участке определяется расход жидкости Q_3 в нижнем слое, необходимый для поддержания стационарного течения.

Внутренний гидравлический прыжок (переход 2–3), соответствующий второй моде, в экспериментах выражен не очень четко. Его возникновение прежде всего связано с дополнительными условиями контроля течения на выходе из канала, в частности, с высотой барьера EF, ограничивающего истечение жидкости из нижнего слоя вниз по потоку. Как показывает дальнейший анализ стационарных решений системы (1.1), скачок может отсутствовать вовсе. В этом случае реализуется режим максимального вовлечения, при

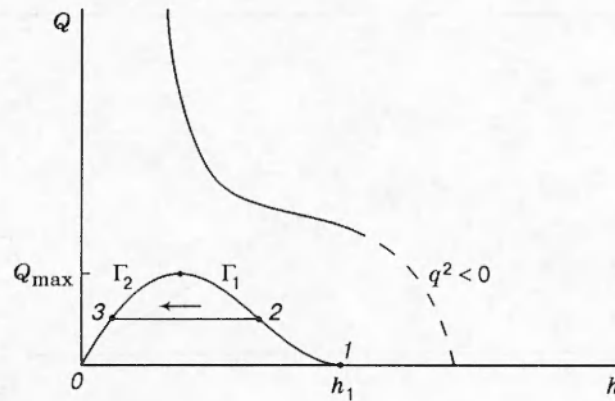


Рис. 2

котором изменение условий на выходе уже не влияет на структуру течения.

Для определения основных параметров течения на участке 0–3 используем стационарные решения системы (1.1). Однородные законы сохранения дают следующие интегралы:

$$\begin{aligned} hu + \eta v/2 = 0, \quad h^+ w + \eta v/2 = Hw_0, \quad bhu + \bar{b}\eta v = 0, \\ w^2/2 + p = w_0^2/2 + p_0 = J^+, \quad u^2/2 + bh + \bar{b}\eta + p = J^-, \\ hu^2 + \eta v^2 + h^+ w^2 + b\eta^2/2 + \bar{b}h\eta + bh^2/2 + pH = Hw_0^2 + p_0H, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + h^+ w^3 + 2pHw_0 + 2b\eta hu + 2b(h + \eta)\eta v + 2bh^2u = Hw_0^3 + 2p_0Hw_0.$$

Соотношения (2.1) справедливы как в области непрерывного изменения параметров потока на участке 1–2, так и на внутренних гидравлических прыжках (переходы 0–1 и 2–3). Будем считать, что заданными безразмерными величинами являются число Фруда набегающего потока $Fr = w_0/\sqrt{bH}$ и разность напоров $\Delta J = (J^- - J^+)/bH$. В системе (2.1) неизвестны величины $h, \eta, u, v, w, q^2, p - p_0$ и b , т. е. решения (2.1) образуют однопараметрическое семейство. На внутренних гидравлических прыжках процессом вовлечения можно пренебречь, что дает дополнительные соотношения $\eta_1 v_1 = 0, \eta_2 v_2 = \eta_3 v_3$. За независимый параметр, характеризующий состояние потока на участке 1–2, можно выбрать расход жидкости в нижнем слое $Q = -hu = \eta v/2$. В силу (2.1) $(b - 2\bar{b})Q = 0$, поэтому при $Q > 0$ имеем $\bar{b} = b/2$.

Для чисел Фруда из интервала $0 < Fr < 0,5$ и положительных значений параметра ΔJ , достаточно близких к нулю, зависимость $h = h(Q)$ представлена на рис. 2*. Штриховой линией изображена физически недопустимая ветвь решения (2.1) с $q^2 < 0$. При $Q < Q_{\max}$ имеются две ветви Γ_1 и Γ_2 , сливающиеся при $Q = Q_{\max}$. Из состояния 0 решение гидравлическим прыжком переводится в состояние 1 с $Q_1 = 0, h_1 > 0$, т. е. $u_1 = v_1 = 0, \eta_1 > 0$. Часть кривой Γ_1 между точками 1 и 2 соответствует возможным состояниям на участке течения 1–2 (рис. 1), где в результате вовлечения величина Q монотонно нарастает. Толщина нижнего слоя h уменьшается, а суммарная толщина однородного и перемешанного слоев $h + \eta$ остается почти постоянной, что и отмечается в экспериментах [4, 5]. Далее из состояния 2 возможен переход (показан стрелкой) в состояние 3 на кривой Γ_2 при помощи гидравлического прыжка с $Q_3 = Q_2$. Этот переход является внутренним гидравлическим прыжком второй моды, так как в состоянии 3 система (1.1) гиперболична, т. е. имеются четыре различных корня характеристического полинома, причем два из них положительны, а два других — отрицательны.

*Точки на рис. 2 соответствуют состояниям течения в канале, указанным на рис. 1.

Скорость распространения характеристик $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ определяется корнями характеристического полинома $\Delta(\lambda)$ на решении (1.1), где

$$\Delta(\lambda) = \left(\frac{(u - \lambda)^2}{bh} + \frac{(v - \lambda)^2}{b\eta} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{(w - \lambda)^2}{bh} + \frac{(v - \lambda)^2}{b\eta} - \frac{1}{2} \right) \frac{(v - \lambda)^4}{b^2\eta^2}.$$

На кривой Γ_1 $\Delta(0) < 0$, на кривой Γ_2 $\Delta(0) > 0$, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < \lambda_4$. Поэтому $\Delta(0) = 0$ при $Q = Q_{\max}$, т. е. реализуется критическое течение, соответствующее режиму максимального вовлечения. Такой режим достигается при отсутствии перехода 2–3, обусловленного дополнительным контролем на выходе из канала, в частности, влиянием препятствия EF .

В экспериментах [4] достигается именно критический режим максимального вовлечения, так как авторами отмечается независимость структуры течения от граничных условий. В этом случае расход жидкости Q_3 в нижнем слое совпадает с Q_{\max} и может быть определен для известных значений Fg и ΔJ .

Теоретический анализ структуры гравитационного течения, проведенный в [4], аналогично [8] основан на использовании полных законов сохранения массы и импульса, а также интеграла Бернулли в верхнем слое для определения перехода непосредственно из 0 в 3. Наличие слоя смешения учитывается «универсальным» профилем скорости в состоянии 3, найденным из экспериментов. Определяющими параметрами выбраны число Фруда Fg и безразмерный расход жидкости $q = bQ_3/w_0^3$.

Величина q фактически является функционалом от стационарного течения, и задать ее априори не представляется возможным. Поэтому в [4] в качестве замыкающего соотношения также использовалась основанная на экспериментальных наблюдениях гипотеза о постоянстве внутреннего числа Ричардсона Ri_L в прослойке между однородными слоями:

$$Ri_L = \frac{b\eta_3}{(w_3 - u_3)^2} = 0,35 \pm 0,1.$$

Для заданных чисел Fg и Ri_L основные параметры потока за фронтом гравитационного течения, в том числе и q , могут быть определены однозначно.

Следует отметить, что рассмотренная в [4] модель фактически является моделью двухслойного течения с учетом реального профиля скорости в нижнем слое. Поэтому влияние второй моды на структуру течения в ней отражено быть не может, а оно может оказаться очень существенным. Появление гидравлического прыжка второй моды (переход 2–3 на рис. 1 и 2) приводит к уменьшению расхода жидкости q за фронтом волны и резкому уменьшению толщины h нижнего слоя. Аналогичный механизм воздействия условий вниз по потоку на процесс формирования слоя смешения исследован экспериментально и теоретически в [9], а с применением трехслойной модели течения (1.1) — в [10].

К сожалению, в [4, 5] величина ΔJ не измерялась, но можно провести косвенное сравнение с экспериментальными данными, выбрав для заданного значения Fg величину ΔJ так, чтобы безразмерный расход жидкости q в нижнем слое был близок к экспериментальным данным, а затем сравнить рассчитанные параметры течения с наблюдаемыми. Это возможно лишь в предположении о том, что реализуется режим максимального вовлечения, т. е. $Q_3 = Q_{\max}$ (см. рис. 2).

В табл. 1 для различных значений Fg приведены основные безразмерные характеристики гравитационного течения непосредственно за фронтом (величины с индексом 1) и после прекращения процесса вовлечения (величины с индексом 2; состояния 2 и 3 совпадают). Величины Fg и ΔJ задаются, а остальные величины вычисляются из соотношений (2.1).

Из табл. 1 видно, что в диапазоне экспериментально наблюдаемых значений $q = 0,1 - 0,3$ число Ричардсона в прослойке Ri_L меняется относительно слабо в окрестности

Таблица 1

Fr	ΔJ	q	Ri _L	h_1/H	$(h_1 + \eta_1)/H$	h_2/H	$(h_2 + \eta_2)/H$	u_2/\sqrt{bH}	v_2/\sqrt{bH}
0,35	0,05	0,2	0,61	0,1	0,52	0,055	0,52	-0,16	0,039
	0,03	0,09	0,7	0,058	0,51	0,033	0,51	-0,12	0,017
0,40	0,03	0,21	0,48	0,15	0,46	0,074	0,46	-0,18	0,072
	0,02	0,16	0,5	0,12	0,45	0,061	0,48	-0,17	0,054
	0,01	0,12	0,53	0,094	0,45	0,049	0,44	-0,15	0,038
	0	0,078	0,57	0,068	0,44	0,037	0,44	-0,13	0,025
0,45	0,03	0,41	0,3	0,3	0,47	0,16	0,49	-0,24	0,23
	0,02	0,3	0,33	0,25	0,48	0,12	0,44	-0,22	0,17
	0,01	0,23	0,36	0,21	0,43	0,1	0,41	-0,2	0,13
	0	0,17	0,38	0,17	0,41	0,081	0,39	-0,19	0,1
0,48	0,005	0,35	0,27	0,31	0,44	0,17	0,46	-0,23	0,26
	0	0,28	0,28	0,28	0,43	0,14	0,43	-0,22	0,26

значения $Ri_L = 0,35$, хотя и в более широких пределах, чем постулировано в [4]. Диапазон чисел Фруда $0,35 < Fr < 0,5$ соответствует экспериментам [4, 5]. При $Fr > 0,5$ и положительных значениях ΔJ решений уравнений (2.1) с указанными выше свойствами не существует. Следует отметить, что случай $Fr = 0,5$, $\Delta J = 0$ особый, при таких значениях параметров переход $0-1$ описывается решением Бенджамина ($\eta_1 = 0$, $h_1 = 0,5H$) [8], которое одновременно является и решением системы (2.1).

В табл. 2 проведено сравнение решений системы уравнений (2.1) с экспериментальными данными [5, табл. 1а]. Величины q_{exp} и h_{exp} являются экспериментально измеренными значениями расхода q и глубины нижнего слоя h_3 . Поскольку величина ΔJ в экспериментах [5] не определялась, то ее значение подбиралось так, чтобы значения q и q_{exp} были близки для заданного числа Фруда. При этом вычисленное из (2.1) значение h_3 можно сравнить с h_{exp} . Последние две графы показывают, что эти значения согласуются удовлетворительно.

Заключительные замечания. 1. Гипотеза об отсутствии перемешивания во внутренних гидравлических прыжках (переходы $0-1$ и $2-3$) упрощает представленную в работе модель. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца на границе раздела жидкостей различной плотности начинает развиваться в головной части гравитационного течения

Таблица 2

Номер эксперимента [5]	Fr	q_{exp}	q	ΔJ	h_{exp}/H	h_3/H
1	0,421	0,313	0,315	0,036	0,1	0,11
2	0,358	0,215	0,218	0,048	0,092	0,06
3	0,358	0,165	0,168	0,04	0,077	0,051
4	0,425	0,233	0,23	0,022	0,089	0,088
5	0,368	0,108	0,112	0,025	0,051	0,041
6	0,327	0,132	0,134	0,049	0,053	0,036
7	0,388	0,169	0,165	0,026	0,07	0,057
8	0,448	0,258	0,252	0,015	0,096	0,1

до достижения гидростатического равновесия в потоке. Но включение в математическую модель эффектов негидростатичности приводит к ее существенному усложнению.

2. При рассмотрении нестационарных течений, например, в задаче о водообмене в шлюзе, влияние второй моды на структуру гравитационного течения проявляется только в случае, когда скорость распространения прослоечных волн превышает скорость головной части течения. В противном случае за фронтом реализуется режим максимального вовлечения, при котором скорость прослоечных волн совпадает со скоростью головной части гравитационного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01641).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпидевский В. Ю.** Блокировка потока при обтекании препятствия двухслойной смешиваемой жидкостью // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 108–112.
2. **Ляпидевский В. Ю.** Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // Лабораторное моделирование динамических процессов в океане. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1991. С. 87–97.
3. **Simpson J. E., Britter R. E.** The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface // J. Fluid Mech. 1979. V. 94. P. 477–495.
4. **Simpson J. E., Britter R. E.** Experiments on the dynamics of a gravity current head // J. Fluid Mech. 1978. V. 88. P. 223–240.
5. **Garcia M. H., Parsons J. D.** Mixing at the front of a gravity current // Proc. 4th Intern. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, June 29–July 2, 1994. V. 3.
6. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
7. **Chu V. H., Baddour R. E.** Turbulent gravity-stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 138. P. 353–378.
8. **Benjamin T. B.** Gravity currents and related phenomena // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 209–248.
9. **Wilkinson D. L., Wood J. R.** A rapidly varied flow phenomenon in a two-layer flow // J. Fluid Mech. 1971. V. 47. P. 241–256.
10. **Liapidevskii V. Yu.** Mixing and blocking effects in two-layer flow over an obstacle // Proc. 4th Intern. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, June 29–July 2, 1994. V. 4.

*Поступила в редакцию 23/IX 1996 г.,
в окончательном варианте — 30/I 1997 г.*
