

УДК 532.542:539.215

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТРУБЧАТОГО СЛОЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Ю. В. Науменко

Ровенский государственный педагогический институт, 266000 Ровно (Украина)

Аналитически определены условия устойчивости установившегося движения трубчатого слоя деформируемого обрабатываемого материала в горизонтальном вращающемся цилиндре. На основе экспериментальных данных с учетом принятых критериев подобия получены универсальные диаграммы границ перехода режимов движения в цилиндре жидкого и сыпучего материалов. При анализе диаграмм показана идентичность условий устойчивости слоя жидкости и сыпучей среды, которую при быстрых относительных движениях можно рассматривать как ньютоновскую жидкость. Показано также, что аналитические условия устойчивости слоя жидкости отвечают экспериментальным данным для случая больших чисел Рейнольдса при возникновении режимного гистерезиса и не отвечают для малых при образовании вторичных циркуляционных течений.

Задача определения режимов движения деформируемого материала, частично заполняющего цилиндр, вращающийся вокруг горизонтальной оси, представляет большой практический интерес для специалистов в области динамики горизонтальных барабанных машин. Особое значение имеют условия взаимного перехода нетрубчатой циркуляционной и квазитрубчатой твердотельной форм движения, соответствующих низким и высоким скоростям вращения. На основе анализа рабочих процессов этих систем все виды движения обрабатываемого материала могут быть сведены к двум наиболее характерным — движениям вязкой ньютоновской жидкости и сыпучего тела.

В режиме быстрого движения сыпучего материала, который можно считать зернистой гранулированной средой, его частицы перемещаются хаотически, подобно молекулам в жидкости, и при движении потока в продольном направлении возникают перемещения частиц в поперечном направлении, которые передают из слоя в слой дополнительные количества движения и вызывают появление вязкостных касательных напряжений. Внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса и существенно зависят от скорости сдвига, как это происходит в жидкости [1, 2]. Экспериментальные данные показывают, что течение сыпучего материала в горизонтальном вращающемся цилиндре относится к быстрым движениям, а поведение материала при этом имеет сходство с поведением вязкой жидкости [3–6]. Поэтому для описания движения сыпучего материала в цилиндре может быть принята механическая модель, основанная на уравнениях Навье — Стокса.

Экспериментальный анализ режимов движения жидкости при малой степени заполнения полости цилиндра приведен в [3, 4]. Экспериментальные и теоретические исследования положения свободной поверхности при нетрубчатой форме движения жидкости для высокой вязкости представлены в [5] и для большой степени заполнения в [6]. Задача определения скоростных режимов движения трубчатого слоя идеальной жидкости решалась в [7]. Потеря устойчивости движения поверхности вязкой жидкости, в значительной степени заполняющей полость вращающегося цилиндра, с учетом гравитационных сил ис-

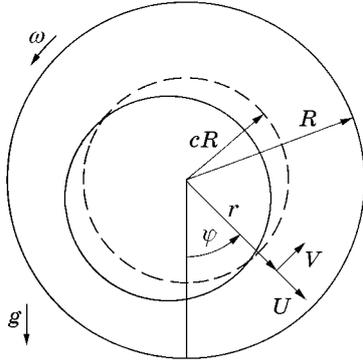


Рис. 1. Расчетная схема течения трубчатого слоя деформируемого материала

следовалась в [8]. Задача определения положения свободной поверхности трубчатого слоя вязкой жидкости с использованием теории пограничного слоя аналитически решалась в [9] и численно с экспериментальной проверкой для тонкого слоя в [10]. В [11] получены условия существования плоских режимов течения трубчатого слоя вязкой жидкости. Несуществование этих режимов может являться причиной вторичных трехмерных течений [12]. В [13] описаны характерные режимы движения жидкости с учетом возмущений и предпринята попытка обобщения и экстраполяции результатов в виде двухпараметрической диаграммы.

В настоящей работе аналитически определяются условия устойчивости движения в цилиндре трубчатого слоя деформируемого материала, рассматриваемого как вязкая жидкость. При этом сохраняется постановка задачи [7], но жидкость считается вязкой. Найдены критерии подобия движения, на основе экспериментальных данных получены универсальные диаграммы, определяющие границы перехода характерных режимов движения жидкого и сыпучего материалов.

Рассмотрим цилиндр радиуса  $R$  с гладкими торцевыми стенками, частично заполненный жидкостью и равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной гравитационному ускорению  $g$ . При достаточно большой угловой скорости цилиндра жидкость в полости принимает форму трубчатого слоя с внешним радиусом  $R$  и радиусом свободной поверхности  $cR$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) (рис. 1).

Движение жидкости рассматривается в плоскости, перпендикулярной оси вращения цилиндра. Вводится полярная система координат  $(r, \varphi)$ ;  $U, V$  — составляющие скорости жидкости. Тогда уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{V^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g \cos \varphi + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{U}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{UV}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - g \sin \varphi + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{V}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $t$  — время.

За невозмущенное движение жидкости принимается равномерное твердотельное вращение в виде трубчатого слоя в отсутствие гравитационных сил. При этом компоненты скорости и давления принимают значения  $U = 0$ ,  $V = \omega r$ ,  $p = (1/2)\rho\omega^2(r^2 - c^2R^2)$ .

Силы тяжести вызывают стационарные возмущения скорости и давления в этом установившемся движении. Возмущения скорости считаются малыми по сравнению с  $\omega R$ , а перемещения свободной поверхности — по сравнению с  $cR$ . Решение задачи ищется в области вблизи свободной поверхности и вдали от твердой стенки. Поэтому касательные

напряжения не учитываются и считается, что давление определяется только гравитационными и инерционными силами. После замены  $\eta = r/R$  ( $c \leq \eta \leq 1$ ) приближенно можно записать

$$U = \omega R U_0, \quad V = \omega R(\eta + V_0), \quad p = (1/2)\rho\omega^2 R^2[(\eta^2 - c^2) + p_0] - \rho g R \eta \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $U_0, V_0, p_0$  — стационарные независимые от времени возмущения.

Граничные условия на твердой стенке имеют вид

$$U_0 = V_0 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1. \quad (3)$$

Пусть на свободной поверхности с постоянным давлением  $\eta = c + \delta_0(\varphi)$ , где  $\delta_0$  — безразмерное перемещение, малое по сравнению с  $c$ . С учетом (3) после преобразований и приравнивания поверхностного давления к нулю динамическое граничное условие на свободной поверхности принимает вид

$$p_0 + 2c\delta_0 = -2cg/(\omega^2 R) \cos \varphi \quad \text{при} \quad \eta = c. \quad (4)$$

Кинематическое граничное условие на свободной поверхности

$$U_0 = \frac{\partial \delta_0}{\partial \varphi} \quad \text{при} \quad \eta = c. \quad (5)$$

Считается, что возмущения  $U_0$  и  $V_0$  малы. Вблизи свободной поверхности и вдали от твердой стенки можно пренебречь членом  $\partial^2 V / \partial r^2$ . Тогда уравнения возмущенного движения на основе (1) с учетом (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} - 2V_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}_c} \left( \eta^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varphi^2} + \eta \frac{\partial U_0}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} - U_0 \right), \\ \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} + 2U_0 &= -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}_c} \left( \frac{\partial^2 V_0}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta U_0) + \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\text{Re}_c = \omega c^2 R^2 / \nu$  — число Рейнольдса на свободной поверхности.

Граничные условия на твердой стенке и свободной поверхности сформулированы выше (см. (3)–(5)).

Решение будем искать в виде

$$\delta_0 = \Delta(\varphi) \cos \varphi, \quad p_0 = P(\eta, \varphi) \cos \varphi, \quad U_0 = \chi(\eta, \varphi) \sin \varphi, \quad V_0 = \xi(\eta, \varphi) \cos \varphi.$$

Исследуем приближенное решение при  $\varphi = \varphi^*$ , где  $\varphi^*$  — угол, соответствующий месту возникновения разрушения трубчатого слоя вязкой жидкости на свободной поверхности.

В верхней утолщенной части трубчатого слоя гравитационные и центробежные силы направлены противоположно, и необходимым условием устойчивости стационарно возмущенного движения слоя жидкости является положительное значение радиального градиента давления [7]. Согласно численным и экспериментальным данным [9, 10] вследствие некоторого отставания свободной поверхности от твердой стенки вращающегося цилиндра разрушение слоя вязкой жидкости возникает в верхней правой части его сечения при  $\pi/2 < \varphi^* < \pi$ . На основании данных [10] и результатов наших исследований зависимость для угла  $\varphi^*$  с наибольшим утолщением трубчатого слоя, соответствующего минимальному значению радиального градиента давления на свободной поверхности жидкости, приближенно можно представить в виде  $\text{tg } \varphi^* = -0,009c^{-1,5}$ , причем  $\varphi^* = \text{arctg}(-0,009c^{-1,5}) + \pi$ .

Уравнения (6) в окрестности  $\varphi^*$  можно записать в виде

$$\chi - 2\xi = -\frac{1}{2} p' + \frac{\text{tg } \varphi^*}{\text{Re}_c} (\eta^2 \chi'' - 2\chi + \eta \chi' + 2\xi), \quad (7)$$

$$-\xi + 2\chi = \frac{1}{2\eta} P + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi^* \operatorname{Re}_c} (2\chi - \xi), \quad \chi + \eta\chi' - \xi = 0$$

(штрихами обозначены производные по  $\eta$ ), а граничные условия — в виде  $\chi = 0$  при  $\eta = 1$ ;  $P + 2c\Delta = -2c/\operatorname{Fr}$  и  $\chi + \Delta = 0$  при  $\eta = c$ , где  $\operatorname{Fr} = \omega^2 R/g$  — число Фруда на поверхности цилиндра.

После преобразования (7) и исключения  $P$  получаем уравнение для определения  $\chi$

$$\eta^2 \chi'' + a\eta\chi' + b\chi = 0, \quad (8)$$

где  $a = (3\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^* + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi^* - 1)/(\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^* + \operatorname{tg}^2 \varphi^* - 1)$ ;  $b = 1/(\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^* + \operatorname{tg}^2 \varphi^* - 1)$ . Решение (8) имеет вид

$$\chi = A(\eta^\alpha - \eta^\beta),$$

где  $\alpha = -d - \sqrt{d^2 - b}$ ;  $\beta = -d + \sqrt{d^2 - b}$ ;  $d = (\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^* + \operatorname{tg}^2 \varphi^*)/(\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^* + \operatorname{tg}^2 \varphi^* - 1)$ ;  $A = -(1/\operatorname{Fr})\{[(\alpha - 1)c^\alpha - (\beta - 1)c^\beta][1/(\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^*) - 1] - (c^\alpha - c^\beta)\}^{-1}$ . Следовательно,  $\xi(\eta, \varphi^*) = A[(\alpha + 1)\eta^\alpha - (\beta - 1)\eta^\beta]$ ,  $P(\eta, \varphi^*) = 2A\eta[(\alpha - 1)\eta^\alpha - (\beta - 1)\eta^\beta][1/(\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^*) - 1]$ ,  $\Delta(\varphi^*) = -A(c^\alpha - c^\beta)$ .

Условие устойчивости стационарного движения трубчатого слоя жидкости приближенно можно представить в виде

$$\operatorname{Fr} > \frac{\cos \varphi^*}{c} [(\alpha - 1)\alpha c^\alpha - (\beta - 1)\beta c^\beta] \left( \frac{1}{\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^*} - 1 \right) / \left\{ [(\alpha - 1)c^\alpha - (\beta - 1)\beta c^\beta] \left( \frac{1}{\operatorname{Re}_c \operatorname{tg} \varphi^*} - 1 \right) - (c^\alpha - c^\beta) \right\}. \quad (9)$$

При  $\nu \rightarrow 0$  (идеальная жидкость)  $\operatorname{Re}_c \rightarrow \infty$ , а условие (9) вырождается в условие, полученное в [7]:

$$\operatorname{Fr} > 3/c. \quad (10)$$

Если же  $\nu \rightarrow \infty$  (абсолютно вязкая жидкость), то  $\operatorname{Re}_c \rightarrow 0$ , а (9) принимает вид

$$\operatorname{Fr} > 1/c. \quad (11)$$

Экспериментальная проверка условий устойчивости (9) показана на рис. 2 для воды (кружки) и касторового масла (треугольники). Установившиеся режимы, расположенные выше кривых, соответствуют трубчатой форме движения, ниже кривых — нетрубчатой. Из рис. 2 следует хорошее согласование результатов решения уравнения (9) с полученными экспериментальными данными.

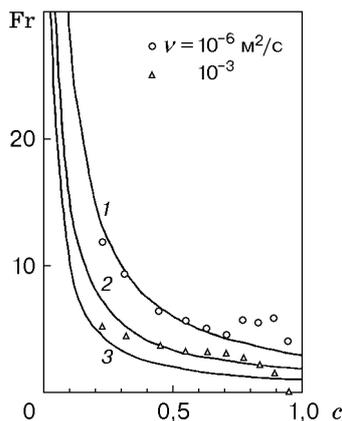


Рис. 2. Экспериментальная проверка условий устойчивости движения трубчатого слоя жидкости при  $R = 0,075$  м (точки — эксперимент, кривые — расчет):

1 —  $\nu \rightarrow 0$  ( $\operatorname{Fr} = 3/c$ ); 2 —  $\nu = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с; 3 —  $\nu \rightarrow \infty$  ( $\operatorname{Fr} = 1/c$ )

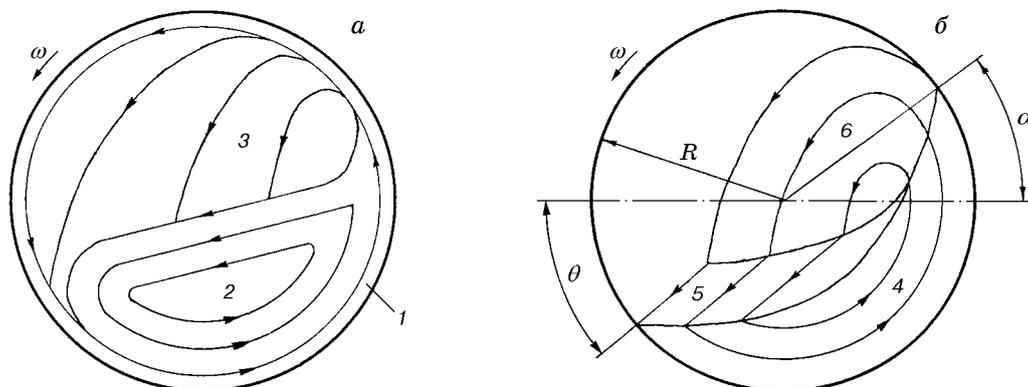


Рис. 3. Схема характерных зон движения в цилиндре:

*a* — для жидкости (1 — трубчатый слой, 2 — зона циркуляции, 3 — зона отрыва с падением); *б* — для сыпучего материала (4 — твердотельная зона, 5 — зона осыпания, 6 — зона подбрасывания с падением)

Движение жидкости (рис. 3, *a*) и сыпучего материала (рис. 3, *б*) можно условно разделить на ряд характерных зон в поперечном сечении цилиндра с качественно различными течениями. Комбинации зон определяют режимы движения деформируемого материала. Для сыпучего материала выделяются следующие характерные режимы, связанные с реализацией технологических процессов [14], в порядке возрастания скорости вращения: режим без подбрасывания (включает только зоны твердотельную и осыпания), с частичным подбрасыванием (возникают все три зоны), с полным подбрасыванием (осыпание отсутствует), неполного центрифугирования (на поверхности цилиндра возникает твердотельный трубчатый слой из части материала с подбрасыванием остальной части), трубчатый режим (весь материал образует равномерный твердотельный трубчатый слой).

При достаточно близком подобии движения жидкого и сыпучего деформируемого материала в цилиндре в целом (рис. 3) отличительной особенностью движения жидкости является эффект прилипания к твердой стенке и слипания слоев с относительным проскальзыванием, а сыпучего тела — эффект откосообразования при осыпании и твердотельного движения вблизи стенки.

Экспериментальные исследования проводились на установке, оборудованной девятью сменными барабанами ( $R = 0,01325 \div 0,21200$  м) для жидкости и двенадцатью ( $R = 0,0047 \div 0,2120$  м) для сыпучего материала. Для визуализации движения одна торцевая стенка барабанов была прозрачной. В качестве рабочих жидкостей использовались вода, веретенное и касторовое масло с  $\nu = 10^{-6}$ ;  $49 \cdot 10^{-6}$ ;  $10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с соответственно. В качестве рабочих использовались три вида сыпучего материала со средним размером частиц 0,5; 2; 10 мм соответственно. Степень заполнения полости барабана материалом  $\alpha$  изменялась в пределах 0,10–0,95 ( $\alpha = \tau / (\pi R^2 L)$ ), где  $\tau$  — объем материала в полости цилиндра;  $L$  — длина полости.

Измерялись угловые скорости стационарного вращения барабана при образовании и разрушении трубчатого слоя в установившемся движении при плавном разгоне и торможении. Для сыпучего материала определялись скорости вращения, отвечающие переходам характерных режимов движения. Экспериментальные данные для жидкости при  $\alpha = 0,1$  близки к результатам [3, 4, 10].

Анализ экспериментальных результатов показал, что в данном случае критериями подобия установившегося движения деформируемого материала будут числа Рейнольдса  $Re$  и Фруда  $Fr$  на радиальной поверхности цилиндра, а также степень заполнения его

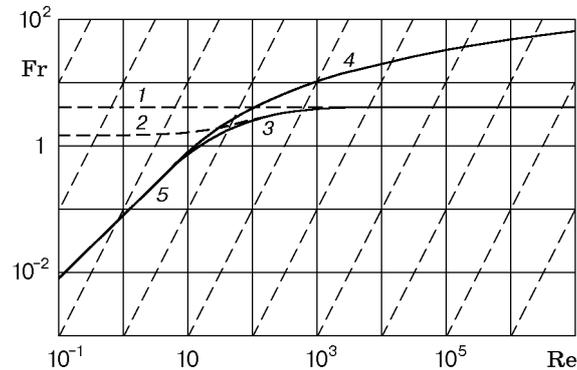


Рис. 4. Диаграмма перехода трубчатого режима в нетрубчатый режим движения жидкости и обратно при  $\alpha = 0,5$ :

1, 2 — расчет по [7] и (9) соответственно; 3–5 — экспериментальные кривые, соответствующие переходу трубчатого режима в нетрубчатый при торможении цилиндра, нетрубчатого в трубчатый при разгоне, трубчатого в нетрубчатый и обратно при торможении или разгоне

материалом  $\alpha$ . Первый критерий характеризует силы трения, второй — силы инерции, а третий — геометрические параметры движения. Эксперимент показал, что фрикционные свойства при движении всех исследованных сыпучих материалов (угол естественного откоса в движении  $\theta \approx 30^\circ$  (рис. 3,б) и угловые скорости цилиндра, соответствующие переходам режимов) были практически одинаковыми. Поскольку все сыпучие материалы в рассматриваемом движении можно считать жидкостями с весьма близкими значениями вязкости, для простоты принято  $\nu \approx 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , что, как показывает эксперимент, близко к величине  $\nu$  для жидкости с подобным поведением в аналогичных условиях.

На рис. 4 представлен сравнительный графический анализ условий устойчивости движения слоя жидкости по [7], аналитических результатов (9) работы и полученных экспериментальных данных. В координатах  $Re$  и  $Fr$  для  $\alpha = 0,5$  построены кривые, соответствующие переходу трубчатого режима в нетрубчатый и обратно. Зона выше границы соответствует трубчатой форме движения. Наклонные штриховые прямые отвечают режимам движения жидкости во вращающемся с различными скоростями цилиндре неизменного радиуса. При больших значениях  $Re$  наблюдается явление режимного гистерезиса — превышения скорости вращения цилиндра при образовании трубчатого слоя во время его разгона над скоростью разрушения слоя при торможении [3, 4, 10]. При малых  $Re$  скорости образования слоя во время разгона и разрушения во время торможения одинаковы, что обусловлено возникновением вторичных циркуляционных течений в виде валика на внутренней поверхности слоя [10]. Полученное условие (9) хорошо соответствует экспериментальным данным для угловой скорости разрушения слоя при торможении цилиндра, однако становится некорректным при возникновении вторичных течений.

На рис. 5 приведена диаграмма перехода режимов движения сыпучего материала в цилиндре для  $\alpha = 0,5$ , построенная на основании полученных экспериментальных данных в координатах  $Re$  и  $Fr$ . Явление гистерезиса для сыпучей среды не наблюдалось. При  $Re \rightarrow \infty$  ордината границы режимов IV и V отвечает условию  $Fr \rightarrow 3/c$  на свободной поверхности слоя, соответствующему (10), а ордината границы режимов III и IV — аналогичному условию  $Fr \rightarrow 3$  на поверхности цилиндра. При  $Re \rightarrow 0$  ордината границы режимов IV и V отвечает условию  $Fr \rightarrow 1/c$  на свободной поверхности, соответствующему (11), а ордината границы режимов III и IV — подобному условию  $Fr \rightarrow 1$  на поверхности цилиндра. Кроме того, при  $Re \rightarrow \infty$  граница режимов III и IV сливается с границей режимов IV и V, а ордината границы режимов I и II отвечает условию  $Fr \rightarrow \sin \alpha$  (рис. 3,б),

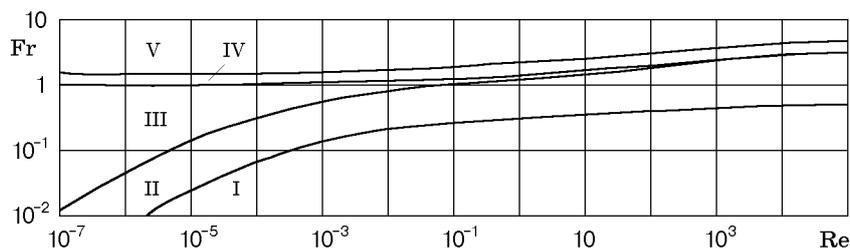


Рис. 5. Диаграмма перехода режимов движения сыпучего материала при  $\varepsilon = 0,5$ :

I — режим без подбрасывания, II — с частичным подбрасыванием, III — с полным подбрасыванием, IV — неполного центрифугирования, V — трубчатый

соответствующему отрыву частицы от поверхности цилиндра [14]. При  $Re \rightarrow 0$  ординаты границ режимов I–III стремятся к нулю.

Для определения с помощью предложенных диаграмм угловой скорости вращения цилиндра  $\omega$ , отвечающей переходу режимов движения деформируемого материала, по двум известным параметрам  $R$  и  $\nu$  для текущего значения скорости строится наклонная прямая аналогично тому, как это сделано на рис. 4. По координатам точки пересечения этой прямой с графиком для соответствующей степени заполнения рассчитывается  $\omega$ .

Сравнительный анализ построенных диаграмм показывает, что условие устойчивости движения в горизонтальном вращающемся цилиндре трубчатого слоя жидкости и сыпучей среды как разновидностей деформируемого материала идентичны. Аналогичным также является условие начала образования слоя сыпучего материала на поверхности цилиндра. Эти условия существенно зависят от значений  $Re$  и  $\varepsilon$ , поэтому используемая в настоящее время для расчета технологических режимов «критическая» скорость вращения цилиндра [14], отвечающая условию  $Fr \rightarrow 1$  на свободной поверхности, неадекватно определяет границы перехода трубчатой и нетрубчатой форм движения материала. Для более точных расчетов могут быть использованы полученные диаграммы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов Ю. В., Ширко И. В. Обзор современного состояния механики быстрых движений гранулированных материалов // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений: Сб. ст. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. С. 271–279.
2. Goodman M. A., Cowin S. C. Two problems in the gravity flow of granular materials // J. Fluid Mech. 1971. V. 45, N 2. P. 321–339.
3. White R. E. Residual condensate, condensate behavior, and siphoning in paper driers // Tappi. 1956. V. 39, N 4. P. 228–233.
4. White R. E., Higgins T. W. Effect of fluid properties on condensate behavior // Tappi. 1958. V. 41, N 2. P. 71–76.
5. Haji-Sheikh A., Lakshimanarayanan R., Lou D. Y. S., Ryan P. J. Confined flow in a partially-filled rotating horizontal cylinder // Trans. ASME. Ser. 1. J. Fluids Engng. 1984. V. 106, N 3. P. 270–278.
6. Gavish J., Chadwick R. S., Gutfinger C. Viscous flow in a partially filled rotating horizontal cylinder // Israel J. Technol. 1978. V. 16, N 5/6. P. 264–272.
7. Phillips O. M. Centrifugal waves // J. Fluid Mech. 1960. V. 7, N 3. P. 340–352.
8. Greenspan H. P. On a rotational flow disturbed by gravity // J. Fluid Mech. 1976. V. 74, N 2. P. 335–351.

9. **Ждан Л. А.** Задача о движении вязкой жидкости во вращающемся круге в поле силы тяжести // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1987. № 1. С. 86–89.
10. **Deiber J. A., Cerro R. L.** Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum. 1. Hydrodynamics // Ind. Engng Chem. Fundam. 1976. V. 15, N 2. P. 102–110.
11. **Бадрафинова Л. Г.** О движении жидкого слоя на внутренней поверхности горизонтально вращающегося цилиндра // Вычислительные методы прикладной гидродинамики. 1993. Вып. 106. С. 179–184.
12. **Balmer R. T., Wang T. G.** An experimental study of internal hydrocysts // Trans. ASME. Ser. 1. J. Fluids Engng. 1976. V. 98, N 4. P. 688–694.
13. **Gans R. F., Yalisove S. M.** Observations and measurements of flow in a partially-filled horizontally rotating cylinder // Trans. ASME. Ser. 1. J. Fluids Engng. 1982. V. 104, N 3. P. 363–366.
14. **Андреев С. Е., Перов В. А., Зверевич В. В.** Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. М.: Недра, 1980.

*Поступила в редакцию 12/VIII 1998 г.*

---