ПМТФ, № 6, 1965

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Е. Я. Коган, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский

(Новосибирск)

В настоящей работе для исследования устойчивости неоднородной замагниченной плазмы по отношению к возмущениям, в которых электрическое поле можно считать потенциальным ($\mathrm{rot}\, E \approx 0$), используются магнитогидродинамические модели.

В бесстолкновительной плазме для изучения движений поперек сильного магнитного поля используется гидродинамическая модель, являющаяся по существу расширением известной модели Чу — Гольдбергера — Лоу [1]. Приведен полный тензор вязких напряжений, включающий, наряду с «магнитной вязкостью», так называемую «инерционную вязкость».

В случае сильных столкновений ($\nu \gg \omega$) используется обычная двухжидкостная гидродинамика. Показано, что столкновительная вязкость приводит к неустойчивости «желобкового» типа в том случае, когда без учета столкновений «желобковая» мода застабилизирована конечным ларморовским радиусом. Рассмотрен также случай, когда надтепловые высокочастотные колебания (не приводящие непосредственно к аномальной диффузии) вызывают, аналогично «столкновительной» электронной вязкости, неустойчивость на низкочастотных (дрейфовых) колебаниях, приводящую к аномальной диффузии.

Обозначения

f — функция распределения частиц;
E_α — компонента электрического поля;
H_0 — магнитное поле;
ρ — плотность;
V — скорость частиц;
e — заряд;
m, M — масса электрона и иона;
Ω_i, Ω_e — ионная и электронная циклотронные частоты;
$\pi_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений;
P — давление;
$p_{\alpha\beta}$ — тензор давления;
t — время;
ω — частота;
T — температура;
ν — частота столкновений;
τ — время столкновений;
j — плотность тока;
ω_i, ω_e — дрейфовые ионная и электронная частоты;
k_x, k_y, k_z — компоненты волнового вектора;
n_0 — плотность частиц;
r_i — ларморовский радиус;
g — ускорение силы тяжести;

Известно, что магнитогидродинамическая модель описания плазмы корректна при условии, что длина свободного пробега частицы много меньше размера, на котором существенно меняются макровеличины, а также $\nu \gg \omega$, где ν — частота столкновений, ω — «частота» процесса ($\omega \sim 1/t_0$, а t_0 — характерное время процесса). В случае $\nu \ll \omega$ при наличии сильных магнитных полей магнитогидродинамическая модель пригодна для описания движения поперек магнитного поля.

§ 1. Рассмотрим получение системы гидродинамических уравнений для движения плазмы при полном пренебрежении столкновениями.

При получении системы магнитогидродинамических уравнений удобно воспользоваться методом моментов Грэда [2]. Кинетическое уравнение, проинтегрированное по продольным (параллельным магнитному полю) хаотическим скоростям v_z, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{M} E_\beta^* \frac{\partial f}{\partial v_\beta} - \frac{dV_\alpha}{dt}\frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} v_\beta \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \Omega_i [\mathbf{v}\times\mathbf{h}]_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\left(E_\beta^* = E_\beta + [\mathbf{V}\times\mathbf{h}]_\beta, \qquad \frac{dV_\alpha}{dt} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$$

Здесь M — масса ионов, Ω_i — ионная циклотронная частота, $\mathbf{v}$ — хаотическая часть скорости частицы, V — массовая скорость частиц (так что $\mathbf{u} = \mathbf{v} + V$ — полная скорость частицы); $\mathbf{h}$ — орт в направлении магнитного поля $\mathbf{H}_0$; остальные обозначения общеприняты; α — индекс, пробегающий значения x, y. Из (1.1) обычным путем получаем систему уравнений для моментов до третьего момента включительно:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + V_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{e}{M}\rho E_\alpha + \Omega_i\,[\mathbf{V}\times\mathbf{h}]_\alpha \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{dP_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}(S_{\alpha\beta\gamma}) + \frac{dV_\varepsilon}{\partial x_\gamma}(\delta_{\gamma\varepsilon}P_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\varepsilon}P_{\alpha\gamma}) - \\ -\Omega_i\,(P_{\alpha\varepsilon}\,[e_\varepsilon\times\mathbf{h}]_\beta + P_{\beta\varepsilon}\,[\mathbf{e}_\varepsilon\times\mathbf{h}]_\alpha) = 0 \qquad (\boldsymbol{P}_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta})\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\frac{dp}{dt} + 2p\operatorname{div}\mathbf{V} = -\pi_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathrm{S} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{dS_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}\{\delta_{\mu\alpha}P_{\beta\gamma} + \delta_{\mu\beta}P_{\alpha\gamma} + \delta_{\mu\gamma}P_{\alpha\beta}\} + \\ + \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\mu}(\delta_{\mu\lambda}S_{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha\lambda}S_{\mu\beta\gamma} + \delta_{\beta\lambda}S_{\alpha\mu\gamma} + \delta_{\gamma\lambda}S_{\alpha\beta\mu}) + \\ + \Omega_i\varepsilon_{\eta\lambda\mu}h_\lambda\,\{\delta_{\alpha\mu}S_{\eta\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}S_{\alpha\eta\gamma} + \delta_{\gamma\mu}S_{\alpha\beta\eta}\} = 0\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{e}_1^2 = 1, \quad (\mathbf{e}_1\mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_1\times\mathbf{h}]$$

$$P_{\alpha\beta} \equiv \int v_\alpha v_\beta f dv, \qquad S_{\alpha\beta\gamma} = \int v_\beta v_\beta v_\gamma f dv, \qquad Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \equiv \int v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\varepsilon f dv$$

Здесь p — давление; $P_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера; $\pi_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений. Отметим, что

$$S_p\pi_{\alpha\beta} \equiv \pi_{xx} + \pi_{yy} = 0, \qquad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}$$

При помощи приведенных уравнений нетрудно убедиться, что показатель адиабаты для данного движения $\gamma = 2$ (см. также [1]).

Для случая $\tau^\circ/t_0 \ll 1$, $r^\circ/L \ll 1$ (τ° — время обращения по ларморовой окружности, r° — ее радиус, L и t_0 — характерные пространственный и временной параметры задачи), $S_{\alpha\beta\gamma}$ и $Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ можно представить в виде

$$S_{\alpha\beta\gamma} = {}^1/_4\,(\delta_{\alpha\beta}S_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}S_\beta + \delta_{\beta\gamma}S_\alpha)$$

$$\begin{gathered}Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = \frac{pT}{M}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\varepsilon} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\varepsilon} + \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\beta\gamma}) + \\ + \frac{T}{M}(\delta_{\alpha\beta}\pi_{\gamma\varepsilon} + \delta_{\alpha\gamma}\pi_{\beta\varepsilon} + \delta_{\alpha\varepsilon}\pi_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma}\pi_{\alpha\varepsilon} + \delta_{\beta\varepsilon}\pi_{\alpha\gamma} + \delta_{\gamma\varepsilon}\pi_{\alpha\beta})\end{gathered} \tag{1.7}$$

Используя (1.7), уравнения (1.4) и (1.6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\pi_{\alpha\beta}}{\partial t} + \pi_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V} - \pi_{\gamma\varepsilon}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\varepsilon}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathrm{S}\right) + \\ + \pi_{\alpha\mu}\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\mu} + \pi_{\beta\mu}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\mu} + p\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) - \\ -\Omega_i\,\{\pi_{\alpha\mu}\,[\mathbf{e}_\mu\times\mathbf{h}]_\beta + \pi_{\beta\mu}\,[\mathbf{e}_\mu\times\mathbf{h}]_\alpha\} = 0\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{dS_\alpha}{dt} + 4\frac{P_{\alpha\beta}}{M}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + 2p\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\left\{S_\alpha\operatorname{div}\mathbf{V} + \right. \\ \left. + S_\beta\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{3}S_\beta\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right\} - \Omega_i\,[S\times\mathbf{h}]_\alpha = 0\end{gathered}$$

Удерживая в (1.8) линейные члены для возмущений величин вида $\exp(i\omega t)$, получим разложением по $\omega / \Omega_i \ll 1$ выражение для тензора вязких напряжений

$$\pi_{yy} = -\pi_{xx} = \frac{p}{2\Omega_i}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{i\omega p}{4\Omega_i^2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) -$$

$$- \frac{1}{2\Omega_i^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} T \qquad (1.9)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{p}{2\Omega_i}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \frac{i\omega p}{4\Omega_i^2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) -$$

$$- \frac{1}{2\Omega_i^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} T$$

$$S_x = -\frac{1}{\Omega_i}\left\{\frac{4p}{M}\frac{\partial T}{\partial y} + 2p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_{xy}}{\rho}\right) + 2p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi_{yy}}{\rho}\right)\right\}$$

$$S_y = \frac{1}{\Omega_i}\left\{\frac{4\rho}{M}\frac{\partial T}{\partial x} + 2p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_{xx}}{\rho}\right) + 2p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi_{xy}}{\rho}\right)\right\} \qquad (1.10)$$

Здесь T — температура, ρ — плотность.

В (1.9) члены первого порядка по ω / Ω_i соответствуют выражениям для «магнитной» вязкости, полученным в [3].

Следующий член описывает так называемую «инерционную» вязкость. Заметим, что выражение для тензора вязких напряжений в [3] не имеет предельного перехода к случаю $\nu_i \to 0$ (ν_i — частота ион-ионных столкновений). Для дальнейшего выпишем эти выражения в «столкновительном» случае при $\Omega_i\tau \gg 1$ в системе координат с осью z, параллельной магнитному полю H_0 [3]

$$\pi_{xx} = -\frac{p}{2\nu_i}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{0.3p\nu_i}{2\Omega_i^2}(W_{xx} - W_{yy}) - \frac{p}{2\Omega_i}W_{xy}$$

$$\pi_{yy} = -\frac{p}{2\nu_i}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{0.3p\nu_i}{2\Omega_i^2}(W_{yy} - W_{xx}) + \frac{p}{2\Omega_i}W_{xy} \qquad (1.11)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -\frac{0.3p\nu_i}{\Omega_i^2}W_{xy} + \frac{p}{2\Omega_i}(W_{xx} - W_{yy})$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}$$

§ 2. Исследуем «желобковую» неустойчивость в двух предельных случаях: для плазм — бесстолкновительной и с большой частотой столкновений. В первом случае, используя уравнения (1.2), (1.3) (1.5), (1.9), (1.10) с учетом гравитационного потенциала, квазинейтральности плазмы и потенциальности возмущений соответственно

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad (2.1)$$

удерживая члены по $(\omega / \Omega_i)^2$ включительно, можно, с точностью до некоторых несущественных членов, получить следующее уравнение для возмущений вида $\varphi(x)\exp(i\omega t + ikr)$ (плазма предполагается неоднородной вдоль x):

$$\frac{3}{4}\frac{\omega}{\omega - \omega_i}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - k_y^2\left(\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega - \omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega - \omega_i)^2} - \alpha\frac{\omega}{\omega - \omega_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} +$$

$$+ k_y^4\left\{\frac{3}{4}\frac{\omega}{\omega - \omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega - \omega_i)^2} - \alpha\left[\frac{\omega}{\omega - \omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega - \omega_i)^2}\right]\right\}\varphi = 0 \qquad (2.2)$$

$$\omega_i = k_y k_0\frac{cT}{eH}, \qquad k_0 \equiv \frac{h_0'}{n_0}, \qquad \alpha = \frac{1}{k_y^2 r_i^{\circ 2}}$$

Уравнение (2.2) записано в лабораторной системе отсчета с осью z, параллельной магнитному полю. Здесь g — ускорение силы тяжести, ω_i — ионная дрейфовая частота, n_0 — невозмущенная плотность, r° — ионный ларморовский радиус, штрих означает дифференцирование по x.

Исследуем решения (2.2) в предположении $\omega_i^2 > g n_0' / n_0$, т. е. когда решения дифференциального уравнения второго порядка не приводят к неустойчивости. Наличие нулей U_2 (U_2 — коэффициент при второй производной), как известно [4], может привести к запутыванию всех четырех решений и проявлению новых дисперсионных свойств плазмы. Как видно из (2.2), для достаточно коротких волн ($\lambda_2 \gtrsim r^\circ$) качественно правильный результат получим, пренебрегая членом $\sim \varphi$ и анализируя решения $U_2 = 0$. При этом видим, что в отличие от [4] для двумерного движения в чисто «бесстолкновительном» режиме неустойчивые решения отсутствуют. Отметим, что если $\omega_i^2 \lesssim g k_0$, т. е. инкременты неустойчивого решения малы, то точки $U_2 \approx 0$ лежат в окрестности вещественной оси. В этом случае решения запутываются и интегральный вклад от моды $k_2 \sim \sqrt{\alpha U_2}$ для финитных решений может оказаться самым существенным, что приводит к улучшению критерия устойчивости

$$\omega_i^2 > g k_0 / \alpha$$

Для получения уравнения в случае сильных столкновений воспользуемся соотношениями (1.2), (1.3) (1.11) в гравитационном поле. При возмущениях $\varphi(x) \exp(i\omega t + i k_y y)$ для $\Omega_i \tau \gg 1$ получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{1}{r_i^2}\left(\frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} - 2\beta\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{k_y^2}{r_i^2}\varphi\left(-\frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} + \frac{g k_0}{i\nu_i\omega} + \beta\right) = 0 \qquad (2.3)$$

$$\beta = 1/\alpha = k_y^2 r^{\circ 2}{}_i$$

Здесь ν_i — частота ион-ионных столкновений.

В случае, когда влияние четвертой производной несущественно, для финитных решений качественно правильный результат, как известно [4], получим из условия $U_1 \approx 0$ (U_1 — коэффициент при φ), что дает

$$\omega^2 - \omega(\omega_i + i\beta\nu_i) - g k_0 = 0 \qquad (2.4)$$

Видим, что (2.4) содержит неустойчивые решения также и в случае $\omega_i^2 > g n_0' / n_0$, когда в отсутствие столкновений желобковые возмущения застабилизированы. Причем в случае $\omega_i^2 \gg g k_0$ имеем

$$\operatorname{Re}\omega \approx -\frac{g k_0}{\omega_i}, \qquad \operatorname{Im}\omega \sim -\frac{|g k_0|\,\nu_i\beta}{\omega_i^2} \qquad (2.5)$$

Важно отметить, что уравнение (2.3) будет содержать неустойчивые решения, если вместо обычных столкновений к вязкой диссипации будет приводить другая неустойчивость, что формально приведет лишь к другому выражению для коэффициента «вязкости». (Как стало известно, А. В. Тимофеев и Д. И. Рютов также обратили внимание в случае желобковых возмущений на влияние коллективной вязкости.) Наличие нулей U_2 приводит к необходимости учета четвертой производной, что, как нетрудно видеть, уменьшает инкремент данной неустойчивости.

§ 3. В предыдущем разделе было, в частности, показано, что учет ион-ионных столкновений может привести к развитию желобковой неустойчивости даже в условиях, когда ларморовский радиус ионов велик ($\omega_i^2 > g k_0$). Хорошо известно, что и в ряде других случаев (см., например, [5-17]) учет диссипативных эффектов может приводить к появлению новых неустойчивостей. Так, электрон-ионное трение приводит к развитию дрейфово-диссипативной неустойчивости, вызывающей диффузию

Бома [5]. Все эти неустойчивости, обязанные учету столкновений, представляются мало опасными в высокотемпературном режиме, когда частота соударений падает. Однако необходимо иметь в виду, что диссипативные эффекты могут возникать за счет некоторых других «затравочных» неустойчивостей, и тогда даже при отсутствии обычных соударений, вообще говоря, создаются условия для раскачки диссипативных неустойчивостей. Возможность такого эффекта была ранее отмечена авторами [1].

Здесь рассмотрим влияние высокочастотных колебаний на развитие дрейфово-диссипативной неустойчивости.

Предварительно обратим внимание, что «продольная» вязкость электронов приводит к дестабилизации плазмы на дрейфовых волнах подобно электрон-ионному трению. В самом деле, из уравнения для продольного движения электронов

$$-ik_z n_0 T_0 - en_{0e}E_z + \eta\Delta_{11}v - mn_{0e}v_{0z}\nu_{ei} = 0 \qquad (3.1)$$

где k_z — волновой вектор вдоль z, e — заряд, n_{0e} — невозмущенная плотность электронов, ν_{ei} — эффективная частота электрон-ионных соударений. Видно, что член $\eta\Delta_{11}v$ аналогичен члену, характеризующему ион-электронное трение и, следовательно, также оказывает дестабилизирующее действие. Однако в условиях применимости обычной гидродинамики за счет парных столкновений вязкий член в $(\lambda_e / \lambda_{11})^2$ меньше электрон-ионного трения и поэтому несуществен. Пусть теперь столкновения отсутствуют, но в плазме развились высокочастотные электронные колебания, вызванные пучковой неустойчивостью, которые приводят к некоторой эффективной «вязкости» электронного газа (взаимодействие с такими колебаниями, как известно, эквивалентно электрон-электронным столкновениям [8]). В качестве примера рассмотрим пучковую неустойчивость, исследованную в [9]. Квазилинейное уравнение для пучка имеет вид

$$v\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^2}{m^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{|E_k|^2}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) \qquad (3.2)$$

где f — функция распределения частиц пучка, $|E_k|$ — амплитуда пульсаций поля, согласно [9], по порядку величины составляет

$$|E_k| \sim n_0 m\frac{v^3}{\omega_0}\exp\left(\frac{t}{\tau_p}\right) \qquad \left(\omega_0 = \left(\frac{4\pi N_{0e}e^2}{m}\right)^{1/2}\right) \qquad (3.3)$$

Здесь n_0 — невозмущенная плотность пучка, ω_0 — частота плазменных колебаний, N_{0e} — невозмущенная плотность электронов плазмы, τ_p — время установления «плато» на функции f.

В случае $n_0 \ll N_{0e}$ еще несущественно нелинейное взаимодействие волн, а для электронов плазмы можно воспользоваться системой гидродинамических уравнений (см. [9]).

Чтобы оценить влияние высокочастотных колебаний на интересующую нас дрейфово-диссипативную неустойчивость, необходимо фактически вычислить эффективное τ (время) электронных соударений в пучке. Из (3.2) и (3.3) для $t \sim \tau_p$ получим

$$\tau \sim \frac{\sqrt{N_{0e}}}{n_0}\frac{1}{\omega_0^*} \qquad (3.4)$$

Здесь ω_0^* — плазменная частота для плотности пучка. Выражение (3.4) справедливо, когда резонансные электроны имеют скорости порядка средних тепловых.

[1] Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Доклад на II Всесоюзном съезде механиков. М., январь 1964 г.