

УДК 539.215

## НЕОБРАТИМЫЕ БОЛЬШИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СКОЛЬЖЕНИЯ НЕСВЯЗНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ЖЕСТКОМ КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. П. Стоян

Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар

Рассматривается теория скольжения для случая больших деформаций. Необратимое искажение скольжением представляется как преобразование простого сдвига по Трусделлу и задается относительно ненапряженной конфигурации. Доказывается, что малое локальное скольжение приводит к уменьшению касательных напряжений по площадке скольжения и изменению напряженного состояния во всей области. Рассчитанные ориентации систем локальных скольжений сравниваются с результатами классических экспериментов по знакопеременному квазистационарному деформированию несвязных сыпучих материалов.

Классическая теория скольжения предложена С. Б. Батдорфом и В. А. Будянским [1] для случая малых деформаций. В [2, 3] она распространена на случай больших деформаций. При этом основной проблемой остается учет взаимного влияния локальных скольжений (см. [4]). Для решения этой проблемы в [5] предложено суммировать скольжения по всем плоскостям скольжения и всем направлениям в каждой из них, а связь между тензором напряжений и малыми скольжениями задавать законом деформирования. В работе [6] предложена зависимость трения скольжения в каждой системе скольжения от действия других таких систем. В [7] введена функция взаимного влияния скольжений.

В настоящей работе предлагается описывать взаимное влияние скольжений с учетом конечности деформаций в рамках кинематического подхода, без привлечения каких-либо дополнительных уравнений состояния или параметров. При этом скольжения, как и в эксперименте, приобретают свойства локализации и самоорганизации ориентаций. Результаты численных расчетов сопоставляются с результатами экспериментов [8] по квазистационарному знакопеременному нагружению сыпучих сред.

**1. Кинематика, напряжения в различных конфигурациях, упругость.** Пусть в рассматриваемой малой окрестности, деформируемой градиентом деформации  $A_{ij}$ , содержится поверхность раздела, заданная ортогональной системой координат  $e_k^{(0)}$  ( $k = \alpha, \beta, \gamma$ ) с нормалью  $e_\alpha^{(0)}$ . В предположении отсутствия каких-либо скольжений по поверхности раздела деформированное состояние может быть определено как для сплошной окрестности:

$$A_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial r_j}. \quad (1)$$

Принятое соотношение (см. [9]) определяет искажение  $C_{kj}^{(0)}$  и поворот  $B_{ik}$ :

$$A_{ij} = B_{ik} C_{kj}^{(0)}, \quad (2)$$

так что

$$C_{ij}^{(0)} C_{jk}^{(0)} = A_{ik} A_{jk}. \quad (3)$$

Здесь и далее индекс (0) соответствует состоянию объекта в ненапряженной конфигурации области, (1) — в деформированной, но не повернутой конфигурации, (2) — в окончательной (актуальной) конфигурации.

Для симметричного тензора искажения  $C_{kj}^{(0)}$  могут быть найдены ортогональные главные направления  $e_\alpha^{(0)}$  с кратностями удлинений  $c_\alpha^{(0)}$ :

$$c_\alpha^{(0)} e_\alpha^{(0)} = \mathbf{C}^{(0)} e_\alpha^{(0)} \quad (4)$$

(по греческим индексам суммирование не проводится).

В качестве меры общих деформаций области примем относительные удлинения. Следует отметить, что использование такой меры не приводит к каким-либо ограничениям на величины описываемых деформаций и поворотов:

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = C_{ij}^{(0)} - \delta_{ij}. \quad (5)$$

Связь деформаций и напряжений зададим для объектов одной конфигурации. Для этого введем так называемые условные напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}$  ( $\alpha = 1 \div 3$ ), отнесенные к главным площадкам ненапряженного состояния. Поскольку в данной работе эффекты анизотропии вводятся исключительно через эффекты необратимых скольжений, само упругое соотношение представим в виде классических изотропных соотношений закона Гука. При этом для главных значений

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(0)} + 2G \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)}. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $G$  — параметры Ламе.

Истинные напряжения, отнесенные к деформированной конфигурации в ортогональной системе главных направлений деформирования  $e_\alpha^{(1)} \equiv e_\alpha^{(0)}$ , составляют

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} / (c_\beta^{(0)} c_\gamma^{(0)}) \quad (\alpha \neq \beta, \quad \alpha \neq \gamma, \quad \beta \neq \gamma). \quad (7)$$

Истинные напряжения в деформированной, но не повернутой конфигурации определяются соотношениями

$$\sigma_{ij}^{(1)} = e_{ik}^{(1)} \sigma_{kl}^{(1)} e_{jl}^{(1)}. \quad (8)$$

Наконец, в актуальной конфигурации

$$\sigma_{kl}^{(2)} = B_{ki}^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)} B_{lj}^{(1)}. \quad (9)$$

**2. Локальная площадка раздела. Напряжения, условие скольжения, описание единичного скольжения.** Пусть в рассматриваемой области имеется некоторая площадка раздела. Будем полагать, что квазиравновесное состояние области при ее деформировании может быть достигнуто за счет возникновения напряжений при деформировании ненапряженной конфигурации области из-за упругого взаимодействия структурных элементов среды и уменьшения возникших перенапряжений из-за необратимого искажения структуры скольжениями.

Выберем новую ортогональную систему координат  $e_i^{(0)}$  ( $i = \alpha, \beta, \gamma$ ), связанную с ориентацией площадки раздела в недеформированном состоянии, причем ось  $e_\alpha^{(0)}$  направим вдоль нормали к рассматриваемой площадке. Полученные из соотношений (7) значения компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(1)}$  в искаженной конфигурации могут быть использованы для определения касательной  $\tau_\alpha$  и нормальной  $\sigma_{\alpha\alpha}$  составляющих напряжений, действующих по  $\alpha$ -площадке раздела с учетом ее нового положения после искажения области.

Действительно, ортогональные касательные векторы  $\mathbf{e}_\beta^{(0)}$  и  $\mathbf{e}_\gamma^{(0)}$  преобразуются соответственно в неортогональные  $\mathbf{e}_\beta^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_\gamma^{(1)}$  с изменением модулей:

$$\mathbf{e}_\beta^{(1)} = \mathbf{C}^{(0)} \mathbf{e}_\beta^{(0)}, \quad \mathbf{e}_\gamma^{(1)} = \mathbf{C}^{(0)} \mathbf{e}_\gamma^{(0)}. \quad (10)$$

Изменение площади  $\alpha$ -площадки  $S/S_0$  составляет

$$S/S_0 = |\mathbf{e}_\beta^{(1)} \times \mathbf{e}_\gamma^{(1)}|. \quad (11)$$

Вектор нормали  $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}$  к  $\alpha$ -площадке в искаженной конфигурации определяется соотношением

$$\mathbf{e}_\alpha^{(1)} = \mathbf{e}_\beta^{(1)} \times \mathbf{e}_\gamma^{(1)}. \quad (12)$$

В дальнейшем удобно использовать нормировку

$$\mathbf{e}_\alpha^{(1)} = \mathbf{e}_\alpha^{(1)} / |\mathbf{e}_\alpha^{(1)}|. \quad (13)$$

Тогда компоненты вектора полных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{(1)}$ , действующих по  $\alpha$ -площадке и отнесенных к искаженной конфигурации, определяются выражением

$$\sigma_{i(\alpha)}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} e_{j(\alpha)}^{(1)}. \quad (14)$$

Проекция вектора полных напряжений на нормаль  $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}$  к поверхности

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} = \sigma_{i(\alpha)}^{(1)} e_{i(\alpha)}^{(1)} = e_{(\alpha)i}^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)} e_{j(\alpha)}^{(1)}, \quad (15)$$

компоненты нормальной составляющей вектора полных напряжений

$$\sigma_{i(\alpha\alpha)}^{(1)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} e_{i(\alpha)}^{(1)}, \quad (16)$$

тогда компоненты полной касательной составляющей напряжения по  $\alpha$ -площадке

$$\tau_{i(\alpha)}^{(1)} = \sigma_{i(\alpha)}^{(1)} - \sigma_{i(\alpha\alpha)}^{(1)}. \quad (17)$$

Отметим, что касательная составляющая лежит в плоскости векторов  $\mathbf{e}_\beta^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_\gamma^{(1)}$ .

Модуль касательной составляющей полного напряжения, действующего по  $\alpha$ -площадке,

$$\tau_\alpha^{(1)} = \sqrt{\tau_{i(\alpha)}^{(1)} \tau_{i(\alpha)}^{(1)}}. \quad (18)$$

По величине касательной  $\tau_\alpha^{(1)}$  и нормальной  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}$  составляющих напряжений, действующих по  $\alpha$ -площадке, можно судить о возможности скольжения по совпадающей с площадкой внутренней поверхности раздела, если напряжения отнести к площади площадки в ненапряженной конфигурации:

$$\tau_\alpha^{(0)} = \tau_\alpha^{(1)} S_0/S, \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} S_0/S. \quad (19)$$

При этом будем полагать, что возможность скольжения по этим площадкам определяется только напряжениями, действующими по их поверхностям.

Будем считать, что если напряжения, действующие по рассматриваемой  $\alpha$ -поверхности раздела, превышают определенный уровень  $f_\alpha(\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \tau_\alpha^{(0)})$ , в области происходит скольжение этой поверхности. Условие скольжения будем задавать простейшим соотношением для сухого трения. В частности, для условных напряжений имеем

$$f_\alpha(\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \tau_\alpha^{(0)}) \equiv k\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_\alpha^{(0)} \geq 0, \quad (20)$$

где  $k$  — коэффициент трения по площадке раздела. Предельное соотношение (20) с учетом (19) может быть записано и для истинных напряжений:

$$f_\alpha(\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}, \tau_\alpha^{(1)}) \equiv k\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} + \tau_\alpha^{(1)} \geq 0. \quad (21)$$

Будем полагать, что направление необратимого скольжения по рассматриваемой поверхности раздела совпадает с направлением обратимых сдвиговых деформаций по ней. В отличие от касательных напряжений Шмида [3] необратимое преобразование скольжением, как и компоненты обратимых деформаций, относятся к одной и той же (ненапряженной) конфигурации области. Тогда обратимая деформация области относительно ненапряженной конфигурации в системе координат  $\mathbf{e}_k^{(0)}$  ( $k = \alpha, \beta, \gamma$ ), связанной с  $\alpha$ -поверхностью раздела, составляет

$$\varepsilon_{lk}^{(0)} = e_{il}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(0)} e_{jk}^{(0)}, \quad (22)$$

а матрица полученного тензора деформаций имеет вид

$$\varepsilon_{lk}^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} & \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} & \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(0)} \\ \varepsilon_{\beta\alpha}^{(0)} & \varepsilon_{\beta\beta}^{(0)} & \varepsilon_{\beta\gamma}^{(0)} \\ \varepsilon_{\gamma\alpha}^{(0)} & \varepsilon_{\gamma\beta}^{(0)} & \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Полная деформация сдвига по  $\alpha$ -площадке составляет

$$\varepsilon_\alpha^{(0)} = \sqrt{\varepsilon_{i\alpha}^{(0)} \varepsilon_{i\alpha}^{(0)}} \quad (i = \beta, \gamma). \quad (24)$$

Необратимое искажение скольжением  $A_{ij}^{sh}$  по  $\alpha$ -поверхности представим в виде преобразования простого сдвига [9, 10] со сдвиговыми компонентами, пропорциональными соответствующим компонентам тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ :

$$A_{ij}^{sh} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\beta\alpha}^{sh} & 1 & 0 \\ \varepsilon_{\gamma\alpha}^{sh} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \chi \varepsilon_{\beta\alpha}^{(0)} & 1 & 0 \\ \chi \varepsilon_{\gamma\alpha}^{(0)} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

которое и искажает ненапряженную конфигурацию. Здесь  $\chi$  — малый положительный параметр скольжения. Представленное преобразование не изменяет объем рассматриваемой области.

Полный необратимый сдвиг  $\varepsilon_\alpha^{sh}$  по  $\alpha$ -площадке составляет

$$\varepsilon_\alpha^{sh} = \sqrt{\varepsilon_{i\alpha}^{sh} \varepsilon_{i\alpha}^{sh}} \quad (i = \beta, \gamma). \quad (26)$$

Параметр сдвига  $\chi$  представим в виде положительной функции превышения сдвигающих напряжений над удерживающими (18):

$$\chi = f_\alpha(\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \tau_\alpha^{(0)}) \Delta t / \nu^{sh} \equiv (k\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_\alpha^{(0)}) \Delta t / \nu^{sh}, \quad (27)$$

где  $\nu^{sh}$  — вязкость сдвига по локальной площадке скольжения;  $\Delta t$  — шаг по времени. Полученное необратимое преобразование сдвигом  $A_{kj}^{sh}$  “вычленяется” из матрицы градиента деформаций:

$$A_{ij} = A_{lk}^0 A_{kj}^{sh}, \quad (28)$$

где  $A_{kl}^0$  — градиент деформаций относительно новой ненапряженной конфигурации, полученной после необратимого сдвига  $A_{kj}^{sh}$ . Из (28) следует соотношение

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{sh})^{-1}. \quad (29)$$

В свою очередь, градиент деформации относительно новой ненапряженной конфигурации  $A_{kl}^0$  может быть полярно разложен:

$$A_{ij}^0 = B_{ik}C_{kl}^{(0)}. \quad (30)$$

Здесь  $C_{kl}^{(0)}$  — обратимое (в данном случае) искажение области относительно новой ненапряженной конфигурации;  $B_{ik}$  — поворот искаженной конфигурации в актуальную.

Структура соотношений (28)–(30) показывает, что необратимый сдвиг меняет напряженное состояние подобласти, а необратимые сдвиги, определяемые соотношением (25), приводят к уменьшению касательных напряжений по  $\alpha$ -площадке скольжения [10]. Последнее утверждение может быть сформулировано в виде теоремы.

**Теорема.** *В деформированном упругом теле малое скольжение по локальной площадке в направлении общих сдвиговых деформаций приводит к уменьшению касательных напряжений по рассматриваемой площадке.*

Рассмотрим деформированную область в момент, когда сдвиг по  $\alpha$ -площадке еще не произошел, в случае малых деформаций. Тогда разложение градиента деформаций (1) упрощается до представления градиента перемещений в виде суммы тензора малых деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и малых поворотов  $\omega_{ij}$ . При этом в системе координат, связанной с рассматриваемой  $\alpha$ -площадкой,  $u_{i,j} = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij}$ , где  $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ ;  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ . Следует отметить, что, поскольку скольжение в области еще не произошло, деформации  $\varepsilon_{ij}$  упругие и обратимые.

Для описания скольжения по  $\alpha$ -площадке градиент перемещений простого сдвига  $u_{ij}^{sh}$  при бесконечно малых деформациях по аналогии с преобразованием скольжением при больших деформациях представим в виде

$$u_{ij}^{sh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\beta\alpha} d\chi & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} d\chi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим изменение напряженно-деформированного состояния области после такого скольжения. Для этого в градиенте перемещений  $u_{i,j}$  выделим необратимое скольжение  $u_{ij}^{sh}$  и получим градиент перемещений  $u_{i,j}^0$  относительно нового ненапряженного состояния  $u_{i,j} = u_{i,j}^0 + u_{ij}^{sh}$ , откуда для компонент градиента перемещений по отношению к  $\alpha$ -площадке получим  $u_{\beta,\alpha}^0 = u_{\beta,\alpha} - u_{\beta\alpha}^{sh} = u_{\beta,\alpha} - \chi\varepsilon_{\beta\alpha}$ ,  $u_{\gamma,\alpha}^0 = u_{\gamma,\alpha} - u_{\gamma\alpha}^{sh} = u_{\gamma,\alpha} - \chi\varepsilon_{\gamma\alpha}$ , причем  $u_{\alpha,\beta}^0 = u_{\alpha,\beta}$ ,  $u_{\gamma,\beta}^0 = u_{\gamma,\beta}$ . Тогда компоненты обратимых деформаций после необратимого скольжения определяются соотношениями  $\varepsilon_{ij}^0 = (u_{i,j}^0 + u_{i,j}^0)/2$ . Для  $\alpha$ -площадки  $\varepsilon_{\beta\alpha}^0 = (u_{\beta,\alpha}^0 + u_{\alpha,\beta}^0)/2 = (u_{\beta,\alpha} + u_{\alpha,\beta} - \chi\varepsilon_{\beta\alpha})/2 = \varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon_{\beta\alpha}d\chi/2 = \varepsilon_{\beta\alpha}(1 - d\chi/2)$ . Аналогично  $\varepsilon_{\gamma\alpha}^0 = \varepsilon_{\gamma\alpha}(1 - d\chi/2)$ . Так как по определению  $d\chi$  — положительный бесконечно малый параметр, то  $1 - d\chi/2 < 1$ , и соответственно обратимые деформации по  $\alpha$ -площадке после необратимого скольжения уменьшаются по модулю:  $|\varepsilon_{\beta\alpha}^0| < |\varepsilon_{\beta\alpha}|$ ,  $|\varepsilon_{\gamma\alpha}^0| < |\varepsilon_{\gamma\alpha}|$ . Из полученных соотношений следует уменьшение модуля компонент касательных напряжений по площадке необратимого скольжения. Действительно, пусть упругая среда характеризуется, по крайней мере, модулем упругого сдвига  $G$ . Тогда, поскольку в правых и левых частях последних неравенств содержатся компоненты упругих деформаций, получим  $|2G\varepsilon_{\beta\alpha}^0| < |2G\varepsilon_{\beta\alpha}|$ ,  $|2G\varepsilon_{\gamma\alpha}^0| < |2G\varepsilon_{\gamma\alpha}|$ . Наконец, для касательных напряжений до и

после скольжения соответственно получаем  $|\tau_{\beta\alpha}^0| < |\tau_{\beta\alpha}|$ ,  $|\tau_{\gamma\alpha}^0| < |\tau_{\gamma\alpha}|$ , что и требовалось доказать.

Следствием доказанной теоремы является возможность определения параметра  $\chi$  для достигнутого в результате сдвига стационарного состояния, когда уменьшение сдвигающих напряжений приводит к равенству в условии скольжения (20), (21).

Из асимметричности (25) следует несоосность напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(1)}$  полному искажению  $C_{ij}$  из (2), экспериментально обнаруженная для анизотропных дефектных материалов или материалов с анизотропией, наведенной в процессе деформирования.

**3. Пора как расхождение поверхности раздела.** Как и в п. 2, деформацию малой окрестности как псевдосплошной будем рассматривать с учетом соотношений (1)–(17). При этом также возможен случай, когда рассчитанные по (16) нормальные напряжения являются растягивающими:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} > 0, \quad (31)$$

т. е. берега поверхности раздела расходятся с образованием полости-поры. Можно сказать, что полость формируется, раскрываясь в  $\alpha$ -направлении, а обе части окрестности расходятся, деформируясь как сплошные вблизи ее свободной поверхности.

В общем случае будем считать, что касательные напряжения, вычисленные по (17), для рассматриваемой площадки не равны нулю, тогда условие скольжения (20), (21) с учетом (31) упрощается:

$$f_{\alpha}(\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, \tau_{\alpha}^{(0)}) \equiv \tau_{\alpha}^{(0)} \neq 0, \quad (32)$$

а расхождение берегов и образование поры происходят одновременно с необратимым скольжением по этой площадке. Параметры скольжений вычисляются в соответствии с соотношениями (25)–(27). Описание сдвига по раскрывшейся поверхности раздела отличается от описания скольжения по сомкнутой поверхности только условием его окончания. В рассматриваемом случае сдвиг завершается при уменьшении касательного напряжения  $\tau_{\alpha}^{(0)}$  по площадке до нуля [10].

Согласно [11] для раскрытой поверхности раздела нормальная компонента  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}$  равна нулю. При этом ориентация главных направлений тензора обратимых деформаций и тензора напряжений устанавливается в соответствии с ориентацией раскрытой площадки раздела, а изотропные упругие соотношения (6) принимают вид [10, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con} + \varepsilon_{\beta\beta}^{(0)} + \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)}) + 2G\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con} = 0, \quad \sigma_{\beta\beta}^{(0)} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con} + \varepsilon_{\beta\beta}^{(0)} + \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)}) + 2G\varepsilon_{\beta\beta}^{(0)}, \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con} + \varepsilon_{\beta\beta}^{(0)} + \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)}) + 2G\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)}. \end{aligned} \quad (33)$$

В системе уравнений (33) представлены две известные из соотношения (30) компоненты  $\varepsilon_{\beta\beta}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(0)}$  и три неизвестные:  $\sigma_{\beta\beta}^{(0)}$ ,  $\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}$  — напряжения по направлениям, перпендикулярным поверхности раздела, и  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con}$  — деформации сплошных (континуальных) частей области перпендикулярно поверхности раздела. В этом случае появляется еще один параметр, относящийся к однородно деформированной окрестности в дополнение к общей деформации области в  $\alpha$ -направлении  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)}$ . Таким образом, деформация области как целого в  $\alpha$ -направлении и деформации ее континуальных частей в том же направлении различны в результате появления полости. Поскольку и полная деформация в  $\alpha$ -направлении  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)}$ , и соответствующее искажение  $C_{\alpha\alpha}^{(0)}$ , и деформация сплошных частей  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{con}$  рассматриваются по отношению к единой ненапряженной конфигурации, в качестве меры раскрытия полости может быть выбрана величина

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{pr} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} - \varepsilon_{\alpha\alpha}^{con} = C_{\alpha\alpha}^{(0)} - 1 - \varepsilon_{\alpha\alpha}^{con}, \quad (34)$$

которая соответствует известному в классической механике грунтов коэффициенту пористости, но при этом описывает и обсуждаемую анизотропию области.

**4. Сыпучие среды как среды с непрерывным множеством различно ориентированных площадок скольжения.** Сыпучие среды принято считать средами, содержащими непрерывное множество систем поверхностей раздела произвольного направления. В этом случае может быть найдена наиболее нагруженная поверхность скольжения [12]. Наиболее нагруженные площадки сдвига ориентированы перпендикулярно плоскости действия наибольших и наименьших напряжений  $\sigma_1$ – $\sigma_3$ . Нормальная  $\sigma_{\alpha\alpha}$  и касательная  $\tau_\alpha$  составляющие по  $\alpha$ -площадке имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \sin 2\alpha(\sigma_3 - \sigma_1)/2, \quad (35)$$

где  $\alpha$  — угол наклона нормали к направлению главных напряжений  $\sigma_1$ . Разность сдвигающих и удерживающих сил составляет

$$\Delta\tau = \tau_\alpha + k\sigma_{\alpha\alpha} = \sin 2\alpha(\sigma_3 - \sigma_1)/2 + k(\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha) \quad (36)$$

и максимальна для пары площадок с углом наклона нормалей

$$\alpha = \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg k \right) \quad (37)$$

в деформированном состоянии. Ориентации площадок максимальных сдвигов в недеформированном состоянии определяются из соотношений, обратных (10).

**5. Локальные скольжения сыпучих сред по системам различно ориентированных площадок.** Сыпучая среда может быть рассмотрена как упругое тело, содержащее множество различно ориентированных поверхностей раздела [10, 13, 14]. Тогда анализ напряжений, действующих по каждой из них, следует проводить по соотношениям (10)–(17), выделяя те поверхности, где напряжения, согласно принятому условию скольжения (20), (21), превышают предел равновесного состояния. Будем считать, что наиболее нагруженная площадка сдвигается с наибольшей скоростью. В то же время деформация области и нагружение площадок происходят за конечный промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого площадки последовательно нагружаются. Поэтому скольжение по ним должно быть рассмотрено последовательно. Такой подход упрощает учет взаимного влияния скольжений, поскольку скольжение по одной площадке, согласно соотношениям (28)–(30), приводит к изменению напряженного состояния в исследуемой окрестности (и соответственно напряжений на каждой площадке), а также порядка “перенапряженных” площадок согласно принятому условию скольжения (20), (21) и позволяет выделить новую наиболее нагруженную площадку. При этом вводить специальные функции, отражающие взаимное влияние скольжений по различным площадкам [7], не требуется. Следует отметить, что в сыпучих средах отсутствует “блокирование” [4] одних площадок скольжений из-за сдвигов по другим. Таким образом, полное необратимое преобразование скольжениями осуществляется в результате последовательных элементарных скольжений по  $\alpha$ -поверхностям раздела ( $\alpha = 1, 2, \dots, l$ ):

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_{(l)} \mathbf{C}_{(l)}^{(0)} \mathbf{A}_{(l)}^{sh} \mathbf{A}_{(l-1)}^{sh}, \dots, \mathbf{A}_{(2)}^{sh} \mathbf{A}_{(1)}^{sh}. \quad (38)$$

Как и в случае с единичным скольжением по поверхности раздела (30), в последнем соотношении может быть выделен градиент деформаций относительно новой ненапряженной конфигурации, достигнутой после  $l$ -го шага скольжения:

$$\mathbf{A}_{(l)}^0 = \mathbf{B}_{(l)} \mathbf{C}_{(l)}^{(0)}, \quad (39)$$

так что факты последовательных скольжений накапливаются в единственной текущей ненапряженной конфигурации, которую и достаточно запоминать. Таким образом, вся

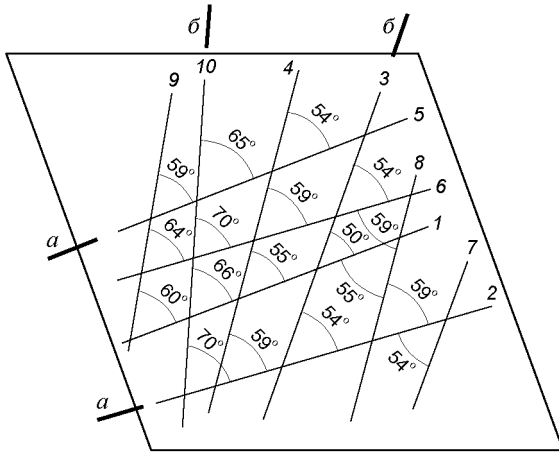


Рис. 1

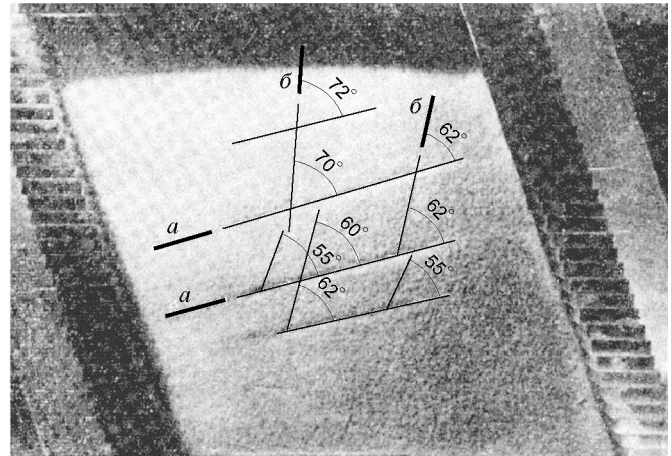


Рис. 2

Рис. 1. Ориентация рассчитанной последовательности площадок скольжений при скашивании области на угол  $20^\circ$  (первый этап):

1–10 — площадки скольжения наибольшей интенсивности в порядке возникновения;  $a$ ,  $б$  — ориентации площадок для знаков “+” и “–” в (37) соответственно

Рис. 2. Плоское скашивание сухого песка в эксперименте [8] (первый этап):

$a$ ,  $б$  — ориентации площадок для знаков “+” и “–” в (37) соответственно

история необратимого деформирования при сдвигах запоминается в ненапряженной конфигурации области. Однако скольжения изменяют ориентации всех поверхностей раздела (10)–(13), которые должны быть соответственно скорректированы после каждого искажения.

Поскольку при скольжениях непрерывно изменяется ориентация всех площадок, параметр скольжения целесообразно определять из временных зависимостей (27), малыми шагами приближаясь к фактической траектории деформирования, а величину временного шага определять из условия сходимости.

Результаты численного моделирования локализации площадок скольжений (рис. 1) для сыпучего тела сопоставлялись с соответствующими результатами для плоского скашивания в сухих песках [8] (рис. 2). Площадки скольжения пронумерованы автором в порядке их возникновения. Угол сухого трения по площадкам скольжения принят равным  $31^\circ$  (угол естественного откоса для песка) [8].

В численном эксперименте на первом этапе задавалось жесткое нагружение градиентом деформации (1), соответствующим скашиванию на угол  $20^\circ$  (в эксперименте [8] скашивающая рамка поворачивается на угол  $20^\circ$  против часовой стрелки). Возникшее напряжение вычислялось по соотношениям (6), положение площадок скольжения — по соотношению (37), действующие по ним нормальные и касательные напряжения — по соотношениям (35). Рассчитанный по (36) уровень перенапряжений разгружался локальными сдвигами (см. (25)–(27)), показанными на рис. 1. Особенность формируемого сдвигового нагружения состоит в том, что оно приводит к возникновению растяжений и раскрытию пор в соответствии с соотношениями (31)–(34) в направлении удлиняющейся диагонали, которые быстро заполняются в процессе скольжений, описываемых соотношениями (20)–(30), (37)–(39). Поэтому моделируемое квазистационарное нагружение представляет собой последовательность этих двух неравновесных процессов. Выбор между двумя равнонагруженными площадками сдвига (37) осуществлялся случайным образом. Распределение пло-



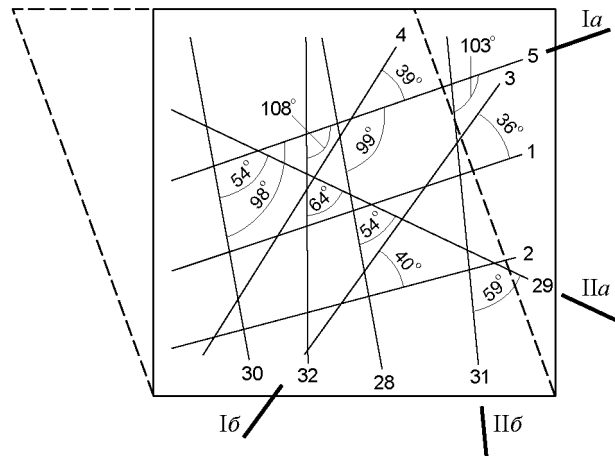


Рис. 3. Ориентация рассчитанной последовательности площадок скольжений при восстановлении исходной конфигурации области (второй этап):

штриховые линии — предшествующая конфигурация; I — площадки скольжения на первом этапе, II — на втором; *a*, *б* — ориентации площадок для знаков “+” и “-” в (37) соответственно

щадок по области также предполагалось случайным. Для визуализации численного эксперимента прослеживалось положение десяти скольжений наибольшей интенсивности (26). Приведенная на рис. 1 нумерация площадок скольжения соответствует порядку их возникновения. Результаты экспериментов с реальным сыпучим материалом [8] (см. рис. 2) показали, что углы между площадками в эксперименте различны для различных площадок. Такой же результат получен численно (см. рис. 1), поскольку в расчетах учтено влияние предыдущих сдвигов на напряженно-деформированное состояние, соответствующее началу последующих сдвигов, и на изменение ориентации площадок предшествующих скольжений. Также хорошо согласуются с экспериментальными данными углы между площадками скольжения, полученные в расчете (ср. рис. 1 и рис. 2). При этом несоосность общих деформаций достигала  $4,6^\circ$ . В результате происшедших скольжений напряжение релаксирует до нуля и вся “сообщенная” области деформация оказывается необратимой.

На втором этапе численного эксперимента жесткое нагружение задавалось обратным скашиванием на угол  $20^\circ$  и восстановлением исходной конфигурации области (скашивающая рамка в эксперименте [8] поворачивается на угол  $20^\circ$  по часовой стрелке, угол суммарного скашивания равен нулю). Возникшие напряжения уменьшались за счет скольжений нового семейства (рис. 3, площадки II*a*, II*б*) до полного исчезновения, при этом площадки предшествующих сдвигов меняли ориентацию. Для визуализации отбирались 10 площадок с наибольшими по модулю скольжениями (26) из всей истории нагружения: 1–5-я, 28–32-я (см. рис. 3).

На третьем этапе численного эксперимента жесткое нагружение задавалось последующим обратным скашиванием на угол  $20^\circ$  (скашивающая рамка в эксперименте [8] поворачивается еще на угол  $20^\circ$  по часовой стрелке, так что суммарный угол поворота составляет  $20^\circ$  в этом направлении). Возникшее при этом напряженное состояние изменяется за счет возникновения скольжений нового, третьего семейства (рис. 4, площадки III*a*, III*б*), при этом ориентация площадок предшествующих сдвигов вновь меняется. Для визуализации были выбраны 10 площадок наибольших скольжений: 1–4-я, 28–30-я, 56-я, 57-я и 59-я. Результаты численного эксперимента после третьего этапа нагружения качественно соответствуют картине скольжений реального сыпучего материала [8], приведенной на рис. 5, где хорошо видны скольжения различных этапов скашивания. Из ре-

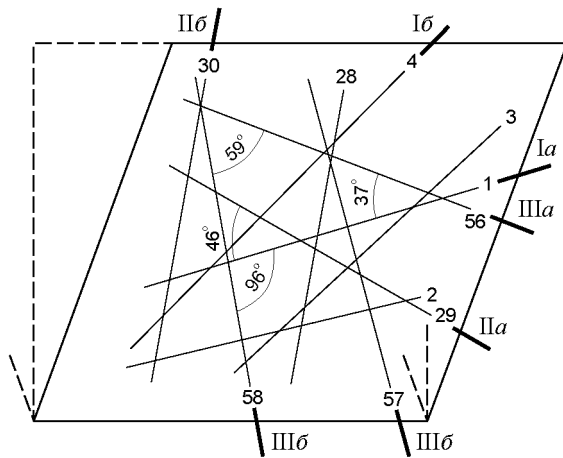


Рис. 4

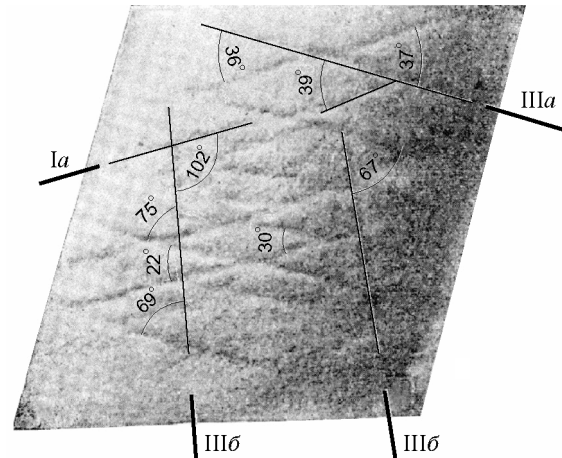


Рис. 5

Рис. 4. Ориентация рассчитанной последовательности площадок скольжений при обратном скашивании области на угол  $20^\circ$  (третий этап):

штриховые линии — предшествующие конфигурации; I — площадки скольжения на первом этапе, II — на втором, III — на третьем, *a*, *б* — ориентации площадок для знаков “+” и “-” в (37) соответственно

Рис. 5. Картина линий скольжения при обратном скашивании (третий этап) сухого песка в эксперименте [8]

зультатов расчета (см. рис. 1, 3, 4) следует, что несмотря на чрезвычайную простоту условия скольжения (37), площадки скольжения самоорганизуются в системы, ориентация которых подчиняется определенным закономерностям. Тот факт, что данный эффект обусловлен именно учетом влияния предыдущих скольжений на последующие, является принципиальным и характеризует выявленный эффект самоорганизации скольжений как возникновение “сложного” (см. рис. 1, 3, 4) из “простого” (37). При этом рассчитанные углы взаимной ориентации площадок близки к наблюдаемым в эксперименте (ср. рис. 2 и рис. 5).

Автор выражает благодарность В. А. Бабешко, Е. В. Глушкову и Н. В. Глушковой за помощь в исследованиях, а также Л. М. Зубову за подробное обсуждение процедуры счета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Батдорф С. Б., Будянский В. А. Математическая теория пластичности, базирующаяся на концепции скольжения // *Механика*. 1962. № 1. С. 135–155.
2. Asaro R. J., Rice J. R. Strain localisation in ductile single crystals // *J. Mech. Phys. Solids*. 1977. V. 25. P. 309–338.
3. Асаро Р. Пластичность кристаллов // *Механика: Новое в зарубеж. науке*. М.: Мир, 1986. Вып. 38. С. 8–48.
4. Вакуленко А. А. Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3–54. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 22).
5. Леонов М. Я., Рычков Б. А. Развитие концепции скольжения в теории пластичности // *Физ.-хим. механика материалов*. 1982. Т. 18, № 4. С. 3–12.
6. Русинко К. Н. Особенности неупругой деформации твердых тел. Львов: Выща шк., 1986.

7. **Мохель А. И., Салганик Р. Л., Христианович С. А.** О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов: Определяющие уравнения и расчет по ним // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 4. С. 119–141.
8. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О механике деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1974. № 3. С. 130–133.
9. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных тел. М.: Мир, 1975.
10. **Стоян В. П.** К развитию методов описания дискретности и пористости в рамках механики сплошных сред / Кубан. гос. с.-х. ин-т. Краснодар, 1989. Деп. в ВИНТИ 14.11.89, № 7204-B89.
11. **Майчен Дж., Сак С.** Метод расчета “тензор” // Вычислительные методы в гидромеханике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
12. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960.
13. **Стоян В. П.** Необратимые большие деформации при вязкопластическом течении и скольжениях по локальным поверхностям раздела // Тез. докл. IV Междунар. науч. симп. “Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела”, Тверь, 16–19 июня 1998 г. Тверь: Твер. ун-т, 1998. С. 32, 33.
14. **Стоян В. П.** Необратимые большие локальные скольжения сыпучей среды как упругого тела с множественными поверхностями раздела // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1999. № 4. С. 30–36.

*Поступила в редакцию 17/V 1999 г.,  
в окончательном варианте — 11/IX 2000 г.*

---