

## МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПРИСТЕННОЙ ЗОНЕ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

УДК 532.526

А. В. Горин, Д. Ф. Сиковский

Институт теплофизики СО РАН,  
630090 Новосибирск

**Введение.** Моделирование турбулентности и процессов теплопереноса в потоках с отрывом — актуальная проблема современной термогидродинамики. Основная трудность при решении этой задачи состоит в адекватном моделировании течения в пристенных областях, играющих определяющую роль в процессах теплоотдачи. Толщина вязкого подслоя, в котором обычно сосредоточено основное термическое сопротивление, в развитом турбулентном течении является очень малой (сравнимой по порядку с колмогоровским масштабом длины). При численном решении требуется высокое разрешение вычислительной сетки вблизи границы, что приводит к усложнению схемы расчета и значительному увеличению времени счета.

Для того чтобы обойти эту трудность, вместо расчета течения во всей области потока вплоть до границы используется условие сращивания численного решения с так называемыми функциями стенки [1]:

$$u_+ = \frac{1}{\varkappa} \ln y_+ + B. \quad (1)$$

$$T_+ = \frac{1}{\varkappa_t} \ln y_+ + B_t. \quad (2)$$

Здесь  $u_+ = u/v_*$ ;  $u$  — продольная средняя скорость;  $v_*$  — динамическая скорость;  $T_+ = \rho c_0 v_* (T_w - T)/q$ ;  $T$  — средняя температура;  $T_w$  — температура стенки;  $q$  — тепловой поток на стенке;  $\rho$ ,  $c_0$  — плотность и удельная теплоемкость;  $y_+ = v_* y/\nu$ ;  $y$  — расстояние по нормали к стенке;  $\varkappa$ ,  $B$  — постоянные, считающиеся универсальными;  $\varkappa_t$ ,  $B_t$  — функции числа Прандтля  $Pr = \nu/a$ ;  $a$  — температуропроводность.

В основе использования функций стенки (1), (2) лежит представление об универсальности свойств пристенной турбулентности, определяемых касательным напряжением трения на стенке, деленным на плотность (рассматривается несжимаемая жидкость):  $\tau_w = \rho v_*^2$ . Однако в последнее время появились экспериментальные доказательства нарушения универсальности логарифмического закона стенки в турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления  $dP/dx > 0$  [2, 3]. В [3] логарифмический участок профиля скорости (1) вблизи стенки имел место, однако величина  $B$  монотонно уменьшалась с ростом параметра градиента давления  $P_+ = \nu (dP/dx)/(\rho v_*^3)$  в то время как значение  $\varkappa$  менялось слабо.

В более ранних экспериментах [2], в которых использовалось касательное напряжение трения на стенке, измеренное независимо электрохимическим методом, исследовался турбулентный пограничный слой в диффузоре при наличии отрыва. По мере приближения к сечению отрыва, несмотря на уменьшение  $P_+$ , значение  $B$  в законе (1) падало (значение  $\varkappa$  при этом увеличивалось). Наблюдалась также неоднозначность в зависимости  $\varkappa$  и  $B$  от  $P_+$ : при близких значениях  $P_+$  профили скорости в координатах закона стенки  $u_+(y_+)$

существенно отличались друг от друга.

Такое поведение пограничного слоя невозможно объяснить на основе традиционных представлений о структуре турбулентности в пристенной зоне, определяемой лишь параметрами, участвующими в осредненных уравнениях движения. Причина этому — сложная природа турбулентного отрывного течения.

По сравнению с безградиентным пограничным слоем наблюдается более чем двукратное увеличение интенсивности турбулентности (в опытах [2] отношение среднеквадратичной амплитуды пульсации продольной скорости  $u'$  к средней локальной скорости  $u$  доходило до 0,7). В наиболее близком к отрыву сечении происходили качественные изменения в структуре рейнольдсовых напряжений, заключающиеся в увеличении удельного веса их мгновенных крупномасштабных значений  $u'v'$ .

В [4] отмечается значительная роль крупномасштабных когерентных структур в отрывном турбулентном течении, следствием чего является нестационарный характер отрывного процесса. Наиболее сильно нестационарность заметна в точке отрыва и в лежащей за ней зоне возвратного течения, которое инициируется крупными вихревыми структурами, пришедшими из расположенного над рециркуляционной зоной слоя смешения. Степень турбулентности в этой области имеет порядок единицы, а в отдельных местах и превышает ее [4–6]. Автор работы [4] делает вывод о том, что средний профиль скорости в возвратном течении — результат осреднения по времени нестационарного турбулентного движения большой амплитуды и пространственного масштаба, поэтому сдвиговое рейнольдсово напряжение не имеет локальной связи с градиентом средней скорости. Таким образом, для адекватного моделирования турбулентных отрывных течений недостаточно одной лишь информации о средних параметрах потока. Необходимо также использовать пульсационные характеристики, связанные с нестационарным отрывным движением.

В настоящей работе предлагается физическая модель пристенной зоны турбулентного отрывного течения, в основе которой лежит предположение об определяющей роли среднеквадратичного кинематического градиента давления  $\alpha_{rms}$  в процессах переноса, происходящих в непосредственной близости от стенки в отрывном потоке. Такое предположение связано с основанным на экспериментальных наблюдениях представлением о течении в пристенной зоне, подверженном интенсивным мгновенным ускорениям, инициированным крупными вихревыми структурами потока. Среднеквадратичный пристенный градиент давления  $\alpha_{rms}$  — количественная характеристика этих ускорений. На основе соображений размерности и подобия выводятся закономерности поведения средних и пульсационных характеристик пристенной турбулентности, спектров пульсаций скорости и давления, «закон двух третей» ( $Nu \sim Re^{2/3}$ ) для турбулентной тепломассоотдачи и связь коэффициента теплоотдачи с уровнем пульсаций давления на стенке  $h \sim (p'_{rms})^{1/3}$ . Полученные закономерности находят подтверждение в опубликованных экспериментальных данных.

**Структура турбулентности в пристенной зоне отрывного течения.** Приведем некоторые известные экспериментальные данные для отрывного потока на плоской поверхности, исследованного в [7].

В лежащей за точкой отрыва рециркуляционной зоне возвратная скорость имеет максимум  $U_N$  на расстоянии  $N$  от стенки, много меньшем локальной толщины пограничного слоя  $\delta$  (расстояние от стенки, на котором продольная скорость  $U$  достигает  $0,99U_\infty$  ( $U_\infty$  — скорость внешнего потока в данном сечении)). В сечении  $x = 397,3$  см  $N = 0,06\delta$ . Область течения, расположенную в пределах  $0 < y < N$ , обычно называют пристенным слоем рециркуляционного течения.



Рис. 1

Оценим масштабы турбулентного движения в пристенном слое. Согласно данным измерений спектров продольной скорости [7], характерная частота крупномасштабного движения

$$f \sim 5 \cdot 10^{-2} U_{\infty} / \delta. \quad (3)$$

Считая, что фазовая скорость турбулентных возмущений имеет порядок  $U_N$ , с учетом (3) получим оценку длины волны

$$\lambda \sim U_N / f \sim 20 \delta U_N / U_{\infty} \sim 2 \delta, \quad (4)$$

поскольку отношение  $U_N / U_{\infty}$  имеет порядок  $10^{-1}$  [7]. С учетом оценки  $N \sim 0,06 \delta$  соотношение (4) можно записать в виде

$$\lambda / N \sim 33. \quad (5)$$

Таким образом, пространственные размеры низкочастотных пульсаций продольной скорости в пристенном слое намного превышают его толщину. С другой стороны, согласно измерениям [7], среднеквадратичная пульсация поперечной скорости  $v'_{rms}$  в пристенном слое на порядок ниже продольной пульсации  $u'_{rms}$ . Эти факты свидетельствуют о том, что крупномасштабное движение в пристенном слое имеет характер нестационарного пограничного слоя. При этом роль внешнего потока играет крупномасштабное нестационарное возвратное течение, создаваемое вовлеченными из лежащего выше слоя смешения крупными вихрями (рис. 1, где пунктиром показана линия нулевой скорости). Поскольку уровень пульсации  $u'_{rms}$  имеет порядок средней скорости  $U$ , нестационарное движение в пограничном слое характеризуется большой амплитудой. Характерную частоту, исходя из (3)–(5) и приведенных выше данных, можно связать с параметрами пристенной зоны с помощью оценки

$$f \sim 3 \cdot 10^{-2} U_N / N. \quad (6)$$

Таким образом, турбулентное движение в пристенной зоне можно разбить на две составляющие: крупномасштабную с масштабом длины, намного превышающим толщину пристенного слоя  $N$ , и мелкомасштабную, составляемую вихрями с размером порядка  $N$  и меньше. Осредняя уравнения Навье — Стокса по мелкомасштабным пульсациям и считая равной нулю корреляцию между крупномасштабными и мелкомасштабными пульсациями скорости, получим в приближении пограничного слоя следующие уравнения крупномасштабного движения в пристенном слое:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial y} + \rho - \frac{\partial \tau}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u, w)$  — вектор крупномасштабной скорости;  $u, w, v$  —  $x$ -,  $z$ - и  $y$ -компоненты скорости;  $\alpha = \rho^{-1} (\partial p / \partial x, \partial p / \partial z)$  — крупномасштабный кинематический градиент давления;  $\tau = -(\langle u'v' \rangle, \langle v'w' \rangle)$  — крупномасштабное рейнольдсово напряжение; угловые скобки означают осреднение по мелкомасштабным пульсациям; ось  $Ox$  направлена вдоль набегающего потока; штрихом обозначены мелкомасштабные пульсации скорости. Уравнения (7) учитывают трехмерность крупномасштабного движения в отрывном потоке.

При выводе нестационарных уравнений Рейнольдса (7) использовались правила осреднения Рейнольдса [8]:

$$\langle \Psi' \rangle = \langle \Phi' \rangle = 0, \quad \langle \Phi \Psi \rangle = \langle \Phi \rangle \langle \Psi \rangle + \langle \Phi' \Psi' \rangle, \quad \langle \Phi' \langle \Phi \rangle \rangle = \langle \Psi' \langle \Psi \rangle \rangle = 0$$

( $\Phi, \Psi$  — переменные, связанные с течением (давление или любая компонента скорости)).

Пограничный слой, описываемый уравнениями (7), имеет зависящую от времени толщину  $\delta_N(t, x, z)$ , среднее от которой по большому интервалу времени равно  $N(x)$ . При  $y = \delta_N$  поле скорости  $\mathbf{u}$  должно срачиваться с внешним крупномасштабным полем скорости  $\mathbf{U}_e(t, x, z)$ , а рейнольдсовы напряжения — с внешним крупномасштабным полем  $\tau_e(t, x, z)$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_e, \quad \tau = \tau_e \quad \text{при } y = \delta_N. \quad (8)$$

На стенке ( $y = 0$ ) ставятся условия прилипания и затухания турбулентных напряжений:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (9)$$

На расстояниях от стенки, много меньших толщины пограничного слоя, конвективные члены в уравнении (7) незначительны, и уравнение движения выражает баланс между градиентом давления, рейнольдсовыми и вязкими напряжениями:

$$\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}, \quad y \ll \delta_N.$$

Интегрируя по  $y$  с учетом (9), получим

$$\tau = \tau_w + \alpha y - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \quad (10)$$

где  $\tau_w = \nu (\partial \mathbf{u} / \partial y)_{y=0}$  — напряжение трения на стенке.

При достаточно больших числах Рейнольдса набегающего потока в непосредственной близости от стенки расположен вязкий подслой, толщина  $l_v$  которого много меньше толщины пограничного слоя ( $l_v \ll \delta_N$ ). При  $y \gg l_v$  влияние вязкости на распределение рейнольдсовых напряжений мало, и последним членом в (10) можно пренебречь, после чего

$$\tau = \tau_w + \alpha y, \quad l_v \ll y \ll \delta_N. \quad (11)$$

В стационарном безградиентном ( $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0, \alpha = 0$ ) потоке выражение (11) имеет вид  $\tau = \tau_w$ , соответствующий подслою постоянного касательного напряжения, в пределах которого статистические характеристики турбулентности определяются динамической скоростью  $v_*$ .

Выше уже говорилось о том, что при наличии градиента давления подслой постоянного касательного напряжения трения существует лишь при достаточно малых значениях  $P_+$ . Оценить критическое значение  $P_+$ , начиная с которого такой подслой перестает существовать, можно следующим образом. Известно, что характерный для подслоя постоянно напряжения логарифмический профиль скорости имеет место в безградиентном потоке

при  $y > 30\nu/v_*$ . С другой стороны, согласно (11), при  $y \sim v_*^2/\alpha$  становится существенным влияние градиента давления на распределение сдвигового рейнольдсова напряжения вблизи стенки. Таким образом, можно считать, что при  $v_*^2/\alpha \sim 30\nu/v_*$ , т. е. при  $P_+ \sim 3 \cdot 10^{-2}$ , влияние градиента давления достигает границ вязкого подслоя, и подслоя постоянного напряжения исчезает. Такая оценка согласуется с результатами экспериментов [2], фактически показавшими отсутствие логарифмического закона стенки при  $P_+ \sim 2 \cdot 10^{-2}$ .

В отрывных потоках мгновенные значения  $P_+$  могут существенно превышать эту величину. Для отрывного потока за уступом высотой  $H$  можно записать следующие оценки для порядков мгновенных величин  $\alpha$  и  $\tau_w$ :

$$\alpha \sim p' / (\rho H) = C_{p'} U_\infty^2 / (2H); \quad (12)$$

$$\tau_w \sim \tau'_w = C_f U_\infty^2 / 2. \quad (13)$$

Здесь  $p'$ ,  $\tau'_w$  — среднеквадратичные пульсации давления и трения на стенке. С учетом (12), (13) получим

$$P_+ = \nu\alpha / (\tau_w)^{3/2} \sim 2^{1/2} C_{p'} / (\text{Re}_H C_f^{3/2}). \quad (14)$$

Типичное значение величины  $C_{p'}$  в отрывных потоках  $10^{-1}$  [9]. Для отрывного потока [6] при  $\text{Re}_H = 3,5 \cdot 10^4$   $C_{f',\text{max}} = 8 \cdot 10^{-4}$  в окрестности точки присоединения. Подставляя эти значения в (14), имеем  $P_+ \sim 2 \cdot 10^{-1}$ , что на порядок превышает найденное выше критическое значение.

Таким образом, создаваемые крупными вихрями отрывного потока ускорения жидкости в пристенной зоне не позволяют сформироваться слою постоянного касательного напряжения. В связи с этим динамическая скорость  $v_*$  не является определяющим параметром пристенной области турбулентного отрывного течения. В соответствии с (11) таким параметром будет мгновенная величина кинематического градиента давления  $\alpha$ :

$$\tau = \alpha y, \quad l_v \ll y \ll \delta_N, \quad (15)$$

поскольку  $\tau_w$  по сравнению с  $\alpha y$  в (11) можно пренебречь. Статистический режим турбулентного течения в области  $l_v \ll y \ll \delta_N$  должен определяться единственными параметрами задачи:  $\alpha$  и  $y$ . Тогда для ширины области вязкого подслоя на основании соображений размерности следует соотношение

$$l_v \sim \nu^{2/3} \alpha^{-1/3} \quad (\alpha = |\alpha|). \quad (16)$$

Для профиля средней скорости можно записать выражение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\alpha}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{y} \right)^{1/2} \quad (17)$$

( $\varkappa$  — универсальная постоянная). В проекции на направление  $\alpha$  выражения (15), (17) приводят к известной формуле Прандтля  $\tau = (\varkappa y du/dy)^2$ . Интегрирование (17) по  $y$  дает «закон корня» для профиля крупномасштабной продольной скорости:

$$u = \frac{2}{\varkappa} \frac{\alpha}{\alpha} (\alpha y)^{1/2} + K \quad (18)$$

( $K$  — не зависящий от  $y$  вектор). Осреднение (18) по большому интервалу времени приводит к выражению для средней скорости в направлении  $x$  (в силу двумерности среднего

движения  $\overline{\alpha_z} = 0$ ,  $\overline{\alpha^{-1/2}\alpha_z} = 0$ , и движение в направлении  $z$  отсутствует):

$$U = \frac{2}{\overline{\alpha}} \overline{\alpha^{-1/2}\alpha_x} y^{1/2} + \overline{K_x} = \frac{2}{\overline{\alpha'}} (|\alpha_x|y)^{1/2} + \overline{K_x}. \quad (19)$$

Здесь черта обозначает среднее по длительному интервалу времени;

$$\overline{\alpha'} = \overline{\frac{(|\overline{\alpha_x}|)^{1/2}}{\alpha^{-1/2}\alpha_x}}. \quad (20)$$

Выражение (19) напоминает известный «закон корня» для отрывного профиля скорости в пограничном слое с положительным градиентом давления  $\overline{\alpha_x}$  [10]. Однако постоянная  $\overline{\alpha'}$  в (19) не является универсальной и, согласно (20), зависит от статистического режима крупных вихрей потока, создающих крупномасштабные пульсации кинематического градиента давления. Такая зависимость может служить объяснением наблюдаемого разброса измеряемых величин в различных отрывных и градиентных потоках [11].

Вычитая из (18) его среднее значение, определим крупномасштабную пульсацию скорости  $u'$ . Осредняя квадраты ее проекций по направлениям  $Ox$  и  $Oz$ , получим выражения для интенсивностей пульсаций:

$$\overline{u'^2} = \frac{4}{\overline{\alpha^2}} \overline{(\alpha^{-1/2}\alpha_x - \overline{\alpha^{-1/2}\alpha_x})^2} y + O(K\alpha^{1/2}y^{1/2}); \quad (21)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{4}{\overline{\alpha^2}} \overline{\alpha^{-1}\alpha_z^2} y + O(K\alpha^{1/2}y^{1/2}). \quad (22)$$

Величины под чертой в правых частях (21), (22), очевидно, пропорциональны среднеквадратичной амплитуде пульсаций крупномасштабного градиента давления в соответствующих направлениях:  $\overline{(\alpha^{-1/2}\alpha_x - \overline{\alpha^{-1/2}\alpha_x})^2} = C_x (\overline{\alpha_x'^2})^{1/2}$ ,  $\overline{\alpha^{-1}\alpha_z^2} = C_z (\overline{\alpha_z'^2})^{1/2}$ , где  $\alpha_x' = \alpha_x - \overline{\alpha_x}$ ;  $\alpha_z' = \alpha_z$ ; безразмерные коэффициенты  $C_x, C_z$  — корреляции, зависящие от статистического режима пульсаций  $\alpha$ , который определяется структурой крупных вихрей. Таким образом,

$$\overline{u'^2} = \frac{4C_x}{\overline{\alpha^2}} \overline{\alpha_{x,rms}'} y + o(\alpha y); \quad (23)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{4C_z}{\overline{\alpha^2}} \overline{\alpha_{z,rms}'} y + o(\alpha y). \quad (24)$$

Поскольку крупномасштабные пульсации скорости являются наиболее энергонесущими, закономерности (23), (24) справедливы и для полных пульсаций скорости (включающих крупно- и мелкомасштабные).

В силу предположения об определяющей роли ускорения  $\alpha$  в динамике турбулентности в пристенной зоне отрывного потока продольный спектр пульсаций скорости в своей мелкомасштабной части, т. е. в интервале волновых чисел  $\delta_N^{-1} \ll k_x \ll l_v^{-1}$ , должен зависеть от  $\alpha, k_x, y$ .

При  $k_x y \ll 1$  статистический режим пульсаций скорости не зависит от  $y$ , и спектр определяется параметрами  $\alpha$  и  $k_x$ :

$$E_{ij}(k_x) = a_{ij} \alpha k_x^{-2}, \quad \delta_N^{-1} \ll k_x \ll y^{-1}. \quad (25)$$

Здесь  $E_{ij}(k_x)$  — продольный спектр пульсаций скорости:  $E_{ij}(k_x) dk_x = \overline{du_i' u_j'}$ ;  $k_x$  — продольное волновое число;  $a_{ij}$  — универсальные постоянные. Выражение (25) совпадает с

«законом степени  $-2$ », полученным для пограничного слоя с положительным градиентом давления  $\alpha$  в работе [12]. Осредняя (25) по длительному интервалу времени, имеем

$$\overline{E}_{ij}(k_x) = a'_{ij} \alpha_{rms} k_x^{-2}, \quad N^{-1} \ll k_x \ll y^{-1}, \quad (26)$$

где  $a'_{ij} = a_{ij} |\overline{\alpha}| / \alpha_{rms}$  — постоянные, определяемые статистикой крупных вихрей;  $\alpha_{rms} = (\overline{\alpha^2})^{1/2}$ .

Аналогичным образом для мелкомасштабного спектра пульсаций давления получим выражение  $E_{pp}(k_x) = a_p \rho^2 \alpha^2 k_x^{-3}$ , осреднение которого по времени дает «закон степени  $-3$ »:

$$\overline{E}_{pp}(k_x) = a_p \rho^2 \alpha_{rms}^2 k_x^{-3}. \quad (27)$$

Приведем некоторые экспериментальные данные, подтверждающие полученные выше законы подобия. Прежде всего обратимся к результатам [7] измерений компонент уравнения движения

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial(-u'v')}{\partial y} - \frac{\partial u'^2}{\partial x} \quad (28)$$

в сечении  $x = 397,3$  см пограничного слоя на плоской поверхности за точкой отрыва. В этом сечении максимум возвратной скорости имеет место при  $N = 0,06\delta$ . Как следует из приведенных в [7] данных, внутри пристенного слоя ( $y < N$ ) конвективные члены практически везде малы. Доминирующим членом в уравнении (28) является постоянный по сечению градиент давления, который в области  $0 < y < 0,01\delta$  уравновешивается вязкими ускорениями, а в области  $0,01\delta < y < 0,06\delta$  — градиентом сдвигового реинольдсова напряжения. Последнюю можно считать областью действия осредненного по времени соотношения (15). Отметим, что приведенные в [7] данные не согласуются с высказываемым в [5, 6] мнением (со ссылкой на [7]) о несущественности членов с реинольдсовыми напряжениями в уравнении движения в пристенном слое рециркуляционного течения.

На рис. 2 представлены спектры продольной пульсации скорости  $F(k) = E_{xx}(k)/u'^2$ , измеренные вблизи дна квадратной (а) и прямоугольной (б) каверн в среднем сечении [13]. Квадратная каверна имела размеры  $150 \times 150$  мм, толщина пристенного слоя  $N \approx 7$  мм. Как видно из рис. 2, а, в области волновых чисел  $k_x \gtrsim N^{-1}$  в соответствии с (26) имеет место «закон степени  $-2$ ».

Поскольку измерение пульсаций давления внутри потока представляет значительные трудности, соответствующие экспериментальные данные отсутствуют в литературе. Обратимся к имеющимся данным по измерениям пульсаций давления на стенке. Полученный выше из соображений размерности «закон степени  $-3$ » (27) ранее обнаружен экспериментально в работе [14], где на рис. 5 показан частотный спектр пульсаций давления в различных сечениях пограничного слоя на плоской поверхности за точкой отрыва. При  $\omega \delta_* / U_\infty > 1$  в спектре имеется интервал  $\omega^{-3}$ . Согласно приведенным в [14] данным, фазовая скорость возмущений давления  $U_{ph}$  в этом интервале частот в пределах погрешности измерений была постоянной. Поэтому обсуждаемые данные могут рассматриваться как подтверждение наличия интервала «закона степени  $-3$ » (27) в спектрах пульсаций давления отрывного потока.

Детальные измерения интенсивностей продольной пульсации скорости в пристенном слое рециркуляционного течения за внезапным расширением в трубе приведены в [6]. На рис. 3 представлены данные [6] в координатах  $u_* = u'/v'_*$  и  $y_* = v'_* y / \nu$  ( $u'$  — среднеквадра-



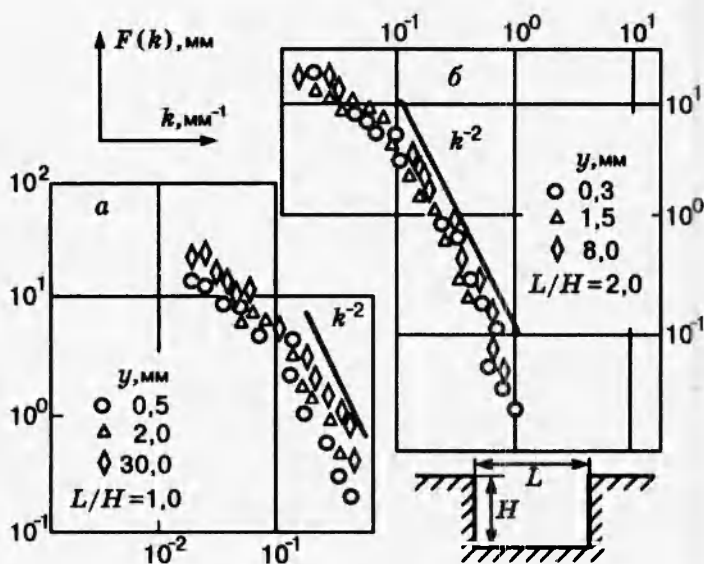


Рис. 2

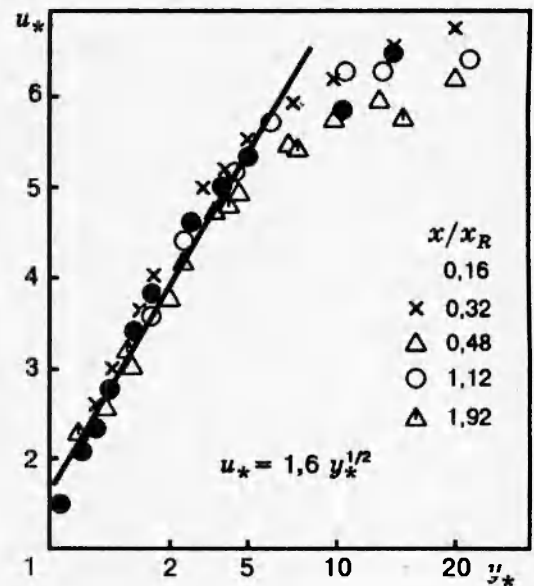


Рис. 3

тичная продольная пульсация скорости,  $v_*' = (\tau_w')^{1/2}$ ,  $\tau_w'$  — среднеквадратичная пульсация трения на стенке,  $x_R$  — расстояние до точки присоединения). Как видно из рис. 3, вблизи стенки профили интенсивностей пульсаций собираются в одну кривую  $u_* = 1,6 y_*^{1/2}$  в соответствии с (21). Заметим, что исходя из соображений размерности «пульсационная динамическая скорость»  $v_*'$  должна определяться соотношением  $v_*' \sim (\nu \alpha_{rms})^{1/3}$ .

Отмеченный при анализе экспериментальных результатов, приведенных в [4, 7], факт малости конвективных членов уравнения движения в пристенном слое рециркуляционного течения за точкой отрыва может служить основанием для распространения «закона корня» для профиля средней скорости (19) на весь пристенный слой  $0 < y < N$ :

$$\frac{U}{U_N} = \left(\frac{y}{N}\right)^{1/2}.$$

Толщина вытеснения для такого профиля  $\delta_* = N/3$ , так что последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{U}{U_N} = \left(\frac{y}{3\delta_*}\right)^{1/2}, \tag{29}$$

более удобном для сравнения с экспериментом, поскольку точность экспериментального определения  $N$  по измеренным профилям скорости зачастую более низкая, чем точность определения  $\delta_*$ . Распределению (29) соответствует формпараметр  $H = 2,0$ , что совпадает с экспериментальным значением [5]. На рис. 4 зависимость (29) сравнивается с экспериментальными профилями скорости в пристенном слое рециркуляционного течения за уступом [5].

Таким образом, предположение об определяющей роли статистических характеристик крупномасштабного кинематического градиента давления  $\alpha$  в процессах переноса в пристенной зоне отрывного турбулентного потока приводит к согласующимся с различными экспериментальными данными закономерностям поведения пристенных распределений



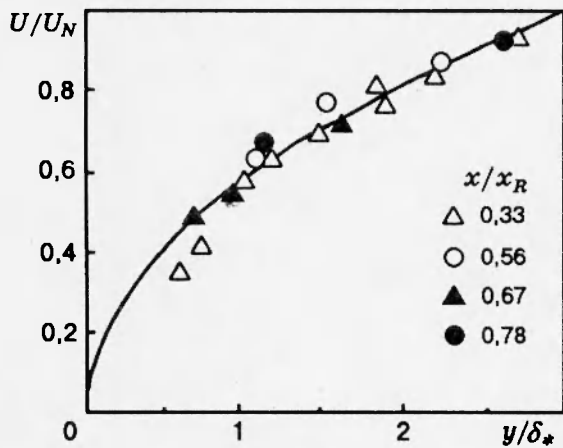


Рис. 4

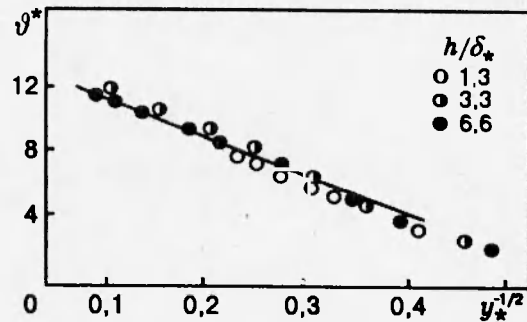


Рис. 5

средней и пульсационной скоростей и спектров пульсаций скорости и давления.

**Пристенная теплоотдача в турбулентном отрывном течении.** При числах Прандтля порядка единицы в диапазоне расстояний от стенки  $l_v \ll y \ll \delta_N$  перенос тепла характеризуется постоянством турбулентного потока тепла  $\overline{v'T'} = q/(\rho c_0)$ ,  $l_v \ll y \ll \delta_N$ . Тогда градиент температуры должен определяться величинами  $q/(\rho c_0)$ ,  $\alpha$  и  $y$ :

$$\partial T/\partial y \sim -q/(\rho c_0 \alpha^{1/2} y^{3/2}), \quad l_v \ll y \ll \delta_N,$$

что приводит к «закону обратного корня» для профиля температуры

$$T = K_t \frac{q}{\rho c_0 (\alpha y)^{1/2}} + \text{const}$$

( $K_t$  — универсальная функция числа Прандтля).

Осреднение по длительному интервалу времени дает

$$\overline{T} = K'_t \frac{q}{\rho c_0 (\alpha y)^{1/2}} + \text{const}, \quad (30)$$

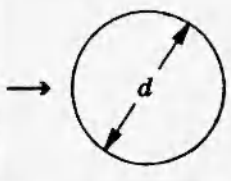
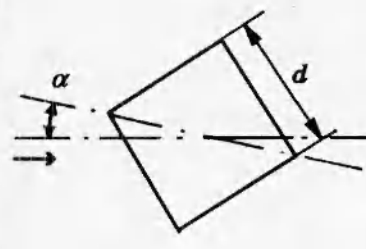
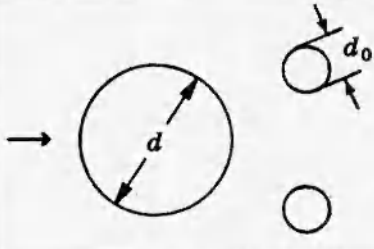
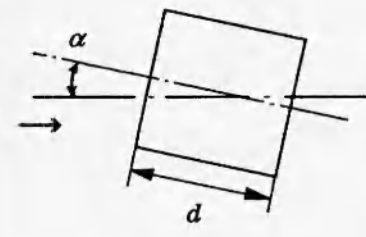
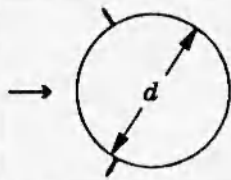
где

$$K'_t = K_t \frac{\alpha_{rms}^{1/2}}{\bar{q}} \left( \frac{q}{\alpha^{1/2}} \right)$$

— константа, зависящая от статистического режима крупных вихрей. Выражение (30) напоминает «закон обратного корня» для профиля средней температуры в турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления [15].

Анализ многих (имеющихся в литературе) экспериментальных данных по профилям температуры в потоке с отрывом показывает наличие «закона обратного корня» в измеренных профилях температуры в пристенной области. На рис. 5 приведены профили температуры в сечении присоединения отрывного потока за прямоугольным препятствием на плоской поверхности [16] ( $\vartheta^* = St^{-1/2} (T - T_w)/(T - T_\infty)$ ,  $y^* = (y U_\infty / \nu) St^{1/2}$ ,  $St = q/[\rho c_0 U_\infty (T_\infty - T_w)]$ ,  $\delta^*$  — толщина вытеснения набегающего пограничного слоя,  $h$  — высота препятствия).

Согласно соотношению (30), перепад температур при удалении от стенки убывает как

№ п/п	Геометрия	L	№ п/п	Геометрия	L
1		d	4		d
2		d	5		d/√2
3		d			

$y^{-1/2}$ , т. е. быстрее, чем при логарифмическом распределении, характерном для безградиентного пограничного слоя. Поэтому вклад вязкого подслоя в общее термическое сопротивление в отрывном потоке существеннее, чем в обычном турбулентном пограничном слое с  $dP/dx = 0$ .

Действительно, из выражения (30) можно получить оценку для перепада температур между границей вязкого подслоя ( $y = l_v$ ) и границей пристенного слоя ( $y = \delta_N$ ):  $\Delta T_{vN} \sim q/[\rho c_0 (\alpha_{rms} N)^{1/2}]$ .

Перепад температур на стенке и на границе вязкого подслоя имеет порядок  $\Delta T_{wv} \sim q l_v / \lambda$  ( $\lambda$  — коэффициент теплопроводности). Отношение этих двух величин запишем как

$$\frac{\Delta T_{vN}}{\Delta T_{wv}} \sim \frac{a}{l_v (\alpha_{rms} N)^{1/2}}. \quad (31)$$

Толщина вязкого подслоя в отрывном течении определяется соотношением (16). Тогда среднее по длительному интервалу времени значение толщины вязкого подслоя  $\bar{l}_v$  имеет порядок  $\nu^{2/3} \alpha_{rms}^{-1/3}$ , на основании чего выражение (31) принимает вид

$$\frac{\Delta T_{vN}}{\Delta T_{wv}} \sim \text{Pr}^{-1} (\bar{l}_v / N)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, можно считать, что основной перепад температур сосредоточен в пределах вязкого подслоя, эффективные коэффициенты переноса в котором близки к молекулярным. Тогда коэффициент теплоотдачи определяется выражением  $q/(T_w - T_\infty) \sim \lambda / l_v \sim \lambda \nu^{-2/3} \alpha^{1/3}$ , где коэффициент пропорциональности — универсальная функция  $\text{Pr}$ . Средний коэффициент теплоотдачи равен отношению среднего теплового потока к сред-

нему перепаду температур:

$$h_w = q / (T_w - T_\infty) = \text{const} \lambda \nu^{-2/3} \alpha_{rms}^{1/3}. \quad (32)$$

Здесь коэффициент пропорциональности помимо универсальной функции  $Pt$  включает множитель  $\alpha^{1/3} (T_w - T_\infty) / [\alpha_{rms}^{1/3} (T_w - T_\infty)]$ , представляющий собой коэффициент корреляции, определяемый статистикой крупных вихрей. Используя критерии Нуссельта и Рейнольдса  $Nu = h_w L / \lambda$ ,  $Re = U_\infty L / \nu$  ( $L$  — характерный внешний размер,  $U_\infty$  — скорость внешнего потока), выражение (32) запишем в виде

$$Nu = \text{const} C_\alpha^{1/3} Re^{2/3}, \quad (33)$$

где введен критерий  $C_\alpha = \alpha_{rms} L / U_\infty^2$ .

Величину пристенных ускорений  $\alpha_{rms}$ , создаваемых крупными вихрями, движущимися со скоростью порядка  $U_\infty$  и имеющими размеры порядка  $L$ , можно оценить следующим образом:  $\alpha_{rms} \sim U_\infty^2 / L$ , так что коэффициент  $C_\alpha$  не зависит от числа Рейнольдса, и выражение (33) представляет собой «закон степени 2/3» ( $Nu \sim Re^{2/3}$ ) для турбулентной теплоотдачи в отрывных течениях. Таким образом, впервые получено теоретическое обоснование экспериментально обнаруженного еще в начале 1960-х годов [17] и впоследствии встречающегося практически во всех тепловых экспериментах с турбулентным отрывом «закона степени 2/3».

Согласно (32), интенсивность теплообмена зависит от уровня среднеквадратичной амплитуды пульсаций пристенного градиента давления  $\alpha_{rms}$ . Поскольку прямых измерений  $\alpha_{rms}$  до сих пор не проводилось, не представляется возможным сравнить закон теплоотдачи (33) с экспериментальными данными. Для проведения такого сравнения необходимо связать  $\alpha_{rms}$  с величинами, измерявшимися в опытах. Предположим, что имеет место связь  $\alpha_{rms}$  с уровнем пульсаций давления на стенке  $p'_{rms}$  и характерным масштабом длины возмущений давления  $l_p$ :

$$\alpha_{rms} = p'_{rms} / (\rho l_p). \quad (34)$$

С учетом (34) выражение (33) запишем в виде

$$Nu = \text{const} (l_p / L)^{-1/3} C_{p'}^{1/3} Re^{2/3}, \quad (35)$$

где  $C_{p'} = 2p'_{rms} / (\rho U_\infty^2)$  — коэффициент пульсаций давления.

Выражение (35) дает связь коэффициента теплоотдачи с уровнем пульсаций давления  $h_w \sim (p'_{rms})^{1/3}$ , экспериментально обнаруженную в работе [18], где изучалось влияние уровня пульсаций донного давления на средний коэффициент теплоотдачи в кормовой зоне поперечно обтекаемого воздухом цилиндра и в кормовой зоне квадратной призмы с различными углами атаки. Уровень пульсаций давления в кормовой зоне цилиндра изменяли с помощью генератора вихрей и двух параллельных цилиндров меньшего диаметра, размещенных поперек отрывных слоев смещения (см. таблицу). Для сравнения данных [18] с зависимостью (35) необходима информация о величине  $l_p$ . Примем длину  $l_p$  пропорциональной длине рециркуляционной зоны за телом, которая, в свою очередь, связана с характерным поперечным размером тела. В качестве последнего можно взять гидравлический диаметр  $d_T$  (равный диаметру для цилиндра и стороне квадрата для призмы). Взяв в качестве масштаба  $L$  в критериях  $Nu$ ,  $Re$  величину  $d_T$  и приняв  $l_p \sim d_T = L$ , получим в соответствии с (35)  $Nu \sim C_{p'}^{1/3} Re^{2/3}$ . Как видно из рис. 6, экспериментальные данные [12]

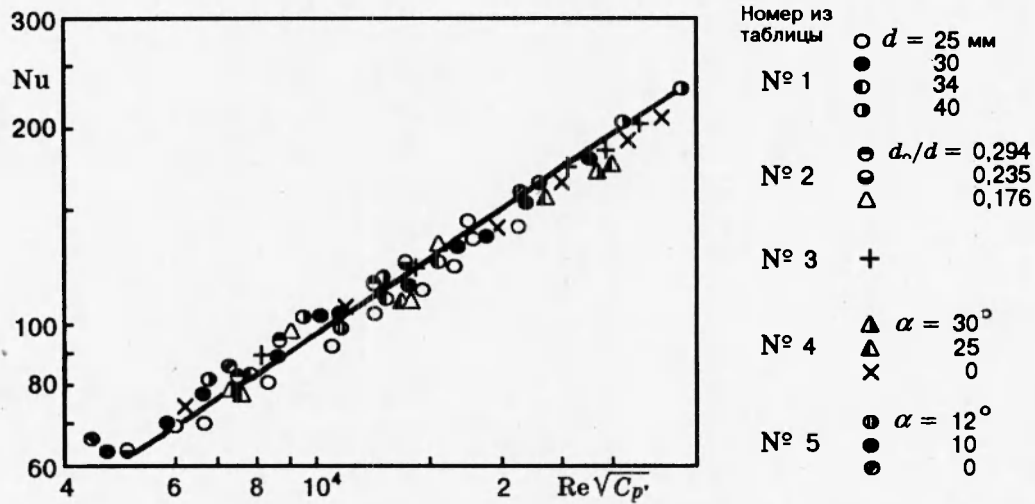


Рис. 6

обобщаются зависимостью (линия)

$$Nu = 0,21 C_p^{1/3} Re^{2/3}. \quad (36)$$

Для призмы, обтекаемой тупой стороной (см. таблицу, № 5), принято  $L = d_r/\sqrt{2}$ , поскольку в сравнении с призмой, обтекаемой с острого угла (№ 4), ее поперечные размеры меньше в  $\sqrt{2}$  раза.

В [19] изучалась локальная теплоотдача на поверхности плоской пластины с затупленным передним концом, обтекаемой потоком воздуха. Подробные исследования гидродинамики этого объекта проведены в работах [20, 21], в [21] измерено распределение уровня пульсаций давления на стенке. Будем считать масштаб  $l_p$  постоянным и пропорциональным полуширине пластины  $H$  и примем  $L = H$ , тогда выражение (35) дает  $Nu \sim C_p^{1/3} Re^{2/3}$ . На рис. 7 приведены данные [19] по распределению величины  $NuRe^{-2/3}$  по поверхности пластины в сравнении с зависимостью (линия)

$$NuRe^{-2/3} = 0,23 C_p^{1/3}, \quad (37)$$

которая хорошо описывает экспериментальные результаты, за исключением области вблизи передней кромки. В этой области ввиду близости сходящего с кромки отрывного слоя смещения масштаб турбулентности пропорционален  $x$  [20, 21]. Соответствующее уменьшение масштаба  $l_p$  приводит согласно (35) к увеличению коэффициента теплоотдачи. Отметим близость выражений (36) и (37).

Учет влияния числа Прандтля на коэффициент теплоотдачи обычно производится путем включения в зависимость для теплоотдачи функции  $Pr^\beta$ . Согласно рекомендациям, данным в [22] на основе измерений теплоотдачи в кормовой зоне цилиндра в диапазоне  $0,7 < Pr < 100$ , показатель степени  $\beta$  можно принять равным 0,45, так что закон тепло-

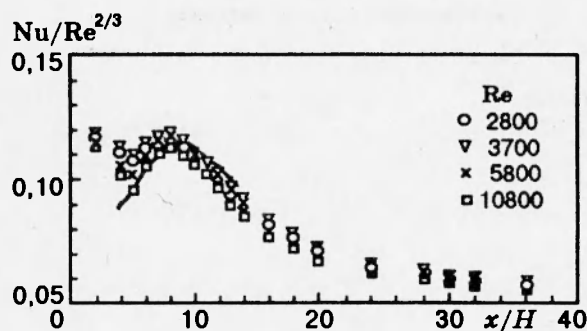


Рис. 7

отдачи для цилиндра и пластины соответственно примет вид

$$Nu = 0,25 C_p^{1/3} Re^{2/3} Pr^{0,45}, \quad Nu = 0,27 C_p^{1/3} Re^{2/3} Pr^{0,45}.$$

Таким образом, полученные закономерности процессов переноса подтверждаются экспериментальными результатами. Предлагаемую физическую модель можно рассматривать как основу для построения приемлемых функций стенки, необходимых для расчета гидродинамики и тепломассопереноса в сложных турбулентных течениях с отрывом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лондер. О расчете конвективного теплообмена в сложных турбулентных течениях // Современ. машиностроение. Сер. А. 1989. № 9. С. 69–89.
2. Хабахпашева Е. М., Ефименко Г. И. Структура турбулентного течения в плоском диффузоре // Структура вынужденных и термогравитационных течений. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. С. 5–31.
3. Nagano Y., Tagawa M., Tsuji T. Effects of adverse pressure gradient on mean flows and turbulence statistics in a boundary layer // Turbulent Shear Flows 8, Selected Papers from the Eight Int. Symp., Munich, 1993. P. 7–21.
4. Simpson R. L. Turbulent boundary-layer separation // Ann. Rev. Fluid Mech. 1989. V. 21. P. 205–234.
5. Адамс Э. В., Джонстон Дж. П. Структура течения в пристенной зоне турбулентного отрывного течения // Аэрокосмич. техника. 1989. № 5. С. 3–13.
6. Девенпорт У. Дж., Саттон Э. П. Отрывные и присоединяющиеся течения в пристеночной области // Аэрокосмич. техника. 1991. № 5. С. 49–58.
7. Simpson R. L., Chew Y. T., Shivaprasad B. G. Structure of a separating turbulent boundary layer. Pt I. Mean flow and Reynolds stresses. Pt II. Higher-order turbulence results // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 23–51; 53–73.
8. Tennekes H., Lumley J. L. A First Course in Turbulence. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1972.
9. Govinda Ram H. S., Arakeri V. H. Studies on unsteady pressure field in the region of separating and reattaching flows // J. Fluid Eng. 1990. V. 112. P. 402–408.
10. Townsend A. A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976.

11. Perry A. E., Schofield W. H. Mean velocity and shear stress distribution in turbulent boundary layers // Phys. Fluids. 1973. V. 16, N 12. P. 2068–2074.
12. Кадер Б. А., Яглом А. М. Спектры анизотропных турбулентных пульсаций скорости и температуры в пристеночных турбулентных потоках // Проблемы турбулентных течений. М.: Наука, 1987. С. 65–74.
13. Варфоломеев И. М., Глебов Г. А., Гортышов Ю. Ф. и др. Структура турбулентного отрывного течения в прямоугольной полости // Пристенные струйные потоки / Под ред. Э. П. Волчкова. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984. С. 86–92.
14. Simpson R. L., Ghodbane M., McGrath B. E. Surface pressure fluctuations in a separating turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 167–186.
15. Kader B. A. Heat and mass transfer in pressure-gradient boundary layers // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34, N 11. P. 2837–2858.
16. Пядишюс А., Шланчаускас А. Турбулентный теплоперенос в пристенных слоях. Вильнюс: Мокслас, 1987.
17. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир, 1973. Т. 3.
18. Igarashi T. Correlation between heat transfer and fluctuating pressure in the separated region of bluff body // Eight Int. Heat Transfer Conf., San Francisco. 1986. V. 3. P. 1023–1028.
19. Ота, Кон. Теплообмен в областях отрыва и последующего присоединения течения при обтекании плоской пластины с затупленной передней кромкой // Теплопередача. 1974. № 4. С. 29–32.
20. Kiya M., Sasaki K. Structure of a turbulent separation bubble // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 83–113.
21. Cherry N. J., Hillier R., Latour M. E. M. P. Unsteady measurements in a separated and reattaching flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 144. P. 13–46.
22. Жукаускас А., Жюгжда И. Теплоотдача цилиндра в поперечном потоке жидкости. Вильнюс: Мокслас, 1979.

*Поступила в редакцию 16/XII 1994 г.,  
в окончательном варианте — 15/III 1995 г.*

---