

О ЗАТУХАНИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Р. К. Мазитов

(Новосибирск)

Рассматривается механизм образования плато для функции распределения скоростей электронов в процессе затухания монохроматических плазменных волн. Показывается, что функция распределения подвергается сильной модуляции в окрестности фазовой скорости волны, а стационарное состояние устанавливается вследствие столкновений.

Бесстолкновительное затухание плазменных волн, полученное в линейном приближении в [1], как известно, вызвано резонансными частицами и зависит от функции распределения скоростей электронов в области

$$v_{\phi} - \sqrt{2e\Phi_0/m} \leq v_{\phi} \leq v + \sqrt{2e\Phi_0/m} \quad (0.1)$$

Здесь  $\Phi_0$  — амплитуда потенциала поля волны,  $v_{\phi}$  — фазовая скорость. Согласно [2, 3], где использовано так называемое квазилинейное приближение, при  $t \rightarrow \infty$  функция распределения в окрестности фазовой скорости волны принимает вид «плато» и затухание прекращается.

Так как квазилинейное приближение справедливо только для достаточно широкого пакета волн, представляет интерес, как достигается стациональное состояние в случае монохроматической волны.

В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  функция распределения подвергается сильной модуляции, на что указано в работе Л. Д. Ландау [1], где приводится асимптотический вид этой функции

$$f = f_0 + f_1 e^{-ikhvt} \quad (0.2)$$

Ниже показывается, что при нелинейном рассмотрении характер модуляции функции распределения в резонансной области существенно зависит от электрического поля. На основе качественных соображений исследуется процесс образования «плато», которое в случае монохроматической волны устанавливается только при учете столкновений, и выводится зависимость энергии волны от времени.

1. В дальнейшем будем считать профиль волны заданным и пренебрегать его искажением. Оно будет незначительно, если число захваченных полем волны электронов невелико и амплитуда волны мала. Предполагая распределение захваченных электронов в момент  $t = 0$  максвелловским, условие слабого искажения профиля запишем в виде:

$$\sqrt{2e\Phi_0/m} \ll v_T \ll v_{\phi} \quad (1.1)$$

Здесь  $v_T$  — средняя тепловая скорость электронов.

Чтобы упростить расчеты, ограничимся в разложении функции распределения в момент  $t = 0$  в точке  $v = w/k$  двумя первыми членами

$$f_{t=0} = f_0(w/k) + (v - w/k) f_0'(w/k) \quad (1.2)$$

Таким образом, для отыскания функции распределения требуется решить кинетическое уравнение, коэффициенты которого в системе координат, связанной с волной, не зависят от времени

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e\Phi'(x)}{m} \frac{\partial f}{\partial u} = st f \quad (1.3)$$

с начальным условием

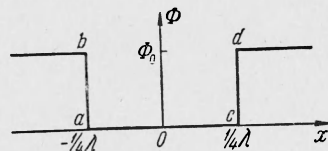
$$f_{t=0} = f_0(w/k) + u f_0'(w/k) \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим сначала потенциальный профиль, изображенный на фиг. 1. Захваченные электроны, имеющие скорость больше фазовой, догоняют стенку  $cd$  и отражаются назад, отдавая энергию волне; электроны, скорость которых меньше фазовой, ускоряются догоняющей их стенкой  $ab$ , получая от волны энергию. Изменение кинетической энергии электронов равно изменению энергии волны, взятому с противоположным знаком

$$\Delta T = -1/2 \lambda \Delta \epsilon \tag{2.1}$$

Здесь  $T$  — кинетическая энергия захваченных электронов, а  $\epsilon$  — энергия волны, отнесенная к единице длины.

Выпишем выражения для  $T$



Фиг. 1

$$T = \int_{-1/2 \lambda u_-}^{+1/2 \lambda u_+} \int \left\{ f(x, u, 0) \left[ \frac{mu^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 + f(x, u, t) mu \frac{\omega}{k} \right] du dx \tag{2.2}$$

$$(u_{\pm} = \pm \sqrt{2e\Phi_0/m})$$

Обозначим первый член через  $T_{\infty}$ . Ниже будет показано, что это кинетическая энергия электронов при  $t \rightarrow \infty$ .

Второй член будет линейной функцией времени

$$\Delta T = T - T_{\infty} = (2e\Phi_0/m)^2 (2/3 t_1 - t) f_0' \quad \text{для } t \leq t_1 = \lambda/2u_+ \tag{2.3}$$

Следовательно,

$$\Delta \epsilon = \epsilon - \epsilon_{\infty} = -2\lambda^{-1} (2e\Phi_0/m)^2 (2/3 t_1 - t) f_0'. \tag{2.4}$$

Отметим, что декремент затухания  $1/2 \epsilon d\epsilon/dt$ , полученный в (2) при помощи простого рассмотрения обмена энергией между волной и захваченными электронами, совпадает с точностью до числового множителя с декрементом, вычисленным Л. Д. Ландау [1].

Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем выражение энергии волны

$$\epsilon = \epsilon_{\infty} + 2 (2e\Phi_0/m)^{3/2} f_0' \Psi(n) \quad \text{при } t \geq t_1 \tag{2.5}$$

Здесь

$$\Psi(n) = \begin{cases} -[n^2(\gamma^2 - \gamma) + 7/6 n\gamma^3 + 1/2 \gamma^4 - 1/3 \gamma^3] (n + \gamma)^{-3} & (n = 1, 3, \dots) \\ [n^2(\gamma^2 + \gamma) + 2/3 n\gamma^3 + 1/2 \gamma^4 - 1/3 \gamma^3] (n + \gamma)^{-3} & (n = 2, 4, \dots) \end{cases}$$

$$t = t_1 (n + \gamma), \quad n = [t/t_1]$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\Psi(n) \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\epsilon_{\infty}$  — энергия волны при  $t \rightarrow \infty$ .

Зависимость  $\epsilon$  от времени изображена на фиг. 2.

Функция распределения захваченных электронов при  $t \rightarrow \infty$  подвергается сильной модуляции. Функция  $f(x, u, t)$  для фиксированного  $u$  имеет только два значения  $f_- = f_0 - uf_0'$  и  $f_+ = f_0 + uf_0'$ . Поэтому ее для  $x > 0$  можно представить в виде

$$f = \begin{cases} f_+ & (0 < u < (x + 1/4 \lambda) t^{-1}, [x + 1/4 \lambda + (2m + 1) 1/2 \lambda] t^{-1} < u < [x + 1/4 \lambda + (2m + 2) 1/2 \lambda] t^{-1}) \\ f_- & ([x + 1/4 \lambda + 2m 1/2 \lambda] t^{-1} < u < [x + 1/4 \lambda + (2m + 1) 1/2 \lambda] t^{-1}) \\ f_+ & ((1/4 \lambda - x) t^{-1} < u < 0, -[1/4 \lambda - x + (2m + 2) 1/2 \lambda] t^{-1} < u < -[1/4 \lambda - x + (2m + 1) 1/2 \lambda] t^{-1}) \\ f_- & (-[1/4 \lambda - x + (2m + 1) 1/2 \lambda] t^{-1} < u < -[1/4 \lambda - x + 2m 1/2 \lambda] t^{-1}) \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Последние интервалы в (2.6) опущены, чтобы не загромождать формул. Аналогично записывается  $f$  и для  $x < 0$ .

Модуляция функции распределения вызвана различием в периодах движения электронов. Распространим полученные результаты на потенциальные профили с несколько сглаженными углами и предположим, что  $\Phi'(\pm 1/4\lambda) \neq \infty$ . Выясним влияние столкновений на вид функции распределения. Член, описывающий столкновения, возьмем в форме [4]

$$st f = v \frac{\partial}{\partial u} \left[ v_T^2 \frac{\partial f}{\partial u} + (v_\phi + u) f \right] \quad (2.7)$$

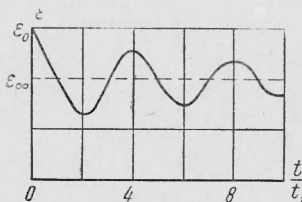
Здесь  $v$  — имеет смысл частоты столкновений. При  $t \rightarrow \infty$  сильно возрастает величина первого члена в (2.7), так что вторым членом можно пренебречь. Столкновения становятся существенными для всех  $x$ , когда

$$\frac{e\Phi_{\max}}{m} \frac{\partial f}{\partial u} \sim v v_T^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad \text{или} \quad t \sim t_1 \frac{e\Phi_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2e\Phi_0/m}}{v v_T^2} \quad (2.8)$$

Диффузия в пространстве скоростей приведет к тому, что осциллирующая функция распределения «размоется» и в точке  $u = 0$  ( $v = \omega/k$ ) при  $t \rightarrow \infty$  примет вид плато.

3. Рассмотрим теперь случай синусоидальной волны

$$\Phi = 1/2 \Phi_0 (1 - \cos kx) \quad (3.1)$$



Фиг. 2

Для решения уравнения (1.3) требуется определить интегралы движения электрона в поле волны. При помощи подстановки

$$\sin \xi = \frac{\sin 1/2 kx}{\sin 1/2 kx_0} \quad \left( \sin 1/2 kx_0 = \frac{E}{e\Phi_0} \right) \quad (3.2)$$

интеграл

$$\int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin 1/2 kx)^2]}} = t \quad (x_1 - \text{начальная координата}) \quad (3.3)$$

приобретает более простой вид

$$\int_{\xi}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \xi}} = t \frac{k \sqrt{2e\Phi_0/m}}{2} \quad (\alpha = \sin 1/2 kx_0) \quad (3.4)$$

В момент  $t = 0$

$$f(x_1, E) = \frac{j_0 \pm \sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin 1/2 kx_1)^2]}}{m \sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin 1/2 kx_1)^2]}} \quad (3.5)$$

Здесь плюс — для  $u > 0$ , минус — для  $u < 0$ . В любой другой момент времени  $t$  функция распределения будет отличаться от (3.5) тем, что в числителе  $x_1 = x_1(x, E, t)$  и в знаменателе вместо  $x_1$  будет  $x$ .

Используя интеграл (3.4), преобразуем выражение для функции распределения

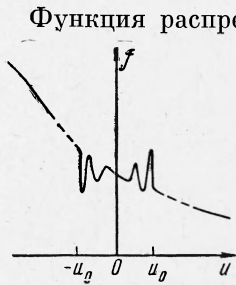
$$f(x, E, t) = \begin{cases} \frac{j_0 \pm f_0' \alpha \sqrt{2e\Phi_0/m} \operatorname{cn} [\tau \pm \chi(\xi)]}{m \sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin 1/2 kx)^2]}} & \left( -\frac{\pi}{2} < kx < 0 \right) \\ \frac{j_0 \pm f_0' \alpha \sqrt{2e\Phi_0/m} \operatorname{cn} [\tau \mp \chi(\xi)]}{m \sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin 1/2 kx)^2]}} & \left( 0 < kx < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

В выражении (3.6) приняты следующие обозначения:

$$\tau = t \frac{k \sqrt{2e\Phi_0/m}}{2}, \quad \chi(\xi) = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \xi}}$$

Здесь  $\alpha$  — модуль эллиптической функции. Отметим, что если перейти к переменным  $x, u, t$ , то  $f$  при фиксированном  $x$  будет определена как функция от  $u$  на интервале

$$(-u_0 \cos^{1/2} kx, \quad u_0 \cos^{1/2} kx) \quad (u_0 = \sqrt{2e\Phi_0/m}) \quad (3.7)$$



Фиг. 3

Функция распределения, как и в первом случае, подвергается сильной модуляции при больших  $\tau$  из-за того, что периоды движения электронов в поле волны зависят от энергии  $E$ . На фиг. 3 дан вид функции распределения для дна потенциальной ямы. Наибольшая частота колебаний  $f$  при фиксированном  $x$  будет на концах интервала  $(-u_0 \cos^{1/2} kx, u_0 \cos^{1/2} kx)$ , где поэтому столкновения становятся существенными раньше, чем при  $u \approx 0$ . Таким образом, функция распределения сначала сглаживается у концов интервала, а с течением времени и в середине, т. е. в точке  $u = 0$  ( $v = \omega/k$ ).

Найдем теперь кинетическую энергию электронов, захваченных полем волны

$$T = \int_{-1/2\lambda}^{1/2\lambda} \int_0^{e\Phi_0} \left\{ f(x, E, 0) \left[ \frac{mu^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 \right] + f(x, E, t) u \frac{\omega}{k} \right\} \frac{dE dx}{mu} \quad (3.8)$$

Здесь

$$u = \sqrt{2m^{-1} [E - e\Phi_0 (\sin^{1/2} kx)^2]}$$

Подставим (3.6) в (3.8) и выпишем второй член, который обозначим через  $\Delta T$

$$\Delta T = -8 \frac{\omega}{k} \left( \frac{2e\Phi_0}{m} \right)^{1/2} \frac{e\Phi_0}{k} f_0' \int_0^1 \alpha^3 \operatorname{cn} \tau \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos^2 \xi d\xi}{[1 - \alpha^2 (\sin \xi)^2 (\operatorname{sn} \tau)^2] \sqrt{1 - \alpha^2 (\sin \xi)^2}} \quad (3.9)$$

Ясно, что первый член в (3.8) — кинетическая энергия электронов при  $\tau \rightarrow \infty$ .

После разложения

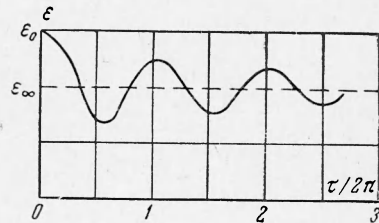
$$[1 - \alpha^2 (\sin \xi)^2 (\operatorname{sn} \tau)^2]^{-1}$$

в ряд и интегрирования по  $\xi$  получим

$$\Delta T = -8 \left( \frac{2e\Phi_0}{m} \right)^{1/2} \frac{e\Phi_0}{k} f_0' \int_0^1 \alpha^3 \operatorname{cn} \tau \left[ \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\alpha) \operatorname{sn}^{2j} \tau \right] d\alpha \quad (3.10)$$

Здесь  $B_j(\alpha)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) выражаются через полные эллиптические интегралы.

Грубая оценка показывает, что вклад первого члена в (3.10) приблизительно в четыре раза больше вклада



Фиг. 4

остальных. Рассмотрим поэтому интеграл

$$J = \int_0^1 \alpha^3 B_0 \operatorname{cn} \tau d\alpha = \int_0^1 K'(\alpha) \alpha^2 (1 - \alpha^2) \operatorname{cn} \tau d\alpha \quad (3.11)$$

Здесь  $K(\alpha)$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Произведем замену переменной

$$J = K(0) \int_0^1 \frac{\alpha^2(y) [1 - \alpha^2(y)]}{y^2} \operatorname{cn} \tau dy, \quad \frac{K(0)}{K(\alpha)} = y \quad (3.12)$$

Выясним асимптотическое поведение  $J$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Замечая, что

$$\frac{\alpha^2(1 - \alpha^2)}{y^2} \sim \frac{1}{y^2} e^{-1/y} \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad \operatorname{cn} \tau \sim \cos \tau y \quad \text{при } y \rightarrow 1$$

и интегрируя (3.12) по частям, получим

$$J = 4K(0) [\tau^{-2} \cos \tau + O(\tau^{-3})] \quad (3.13)$$

Второй член будет мал по сравнению с первым, когда  $\tau > 10$ . Используя соотношение

$$\Delta T = -\lambda \Delta \varepsilon \quad (3.14)$$

найдем выражение для энергии волны при больших  $\tau$

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty + 8 \frac{\omega}{k} \frac{e\Phi_0}{k} \left( \frac{2e\Phi_0}{m} \right)^{1/2} \frac{\cos \tau}{\tau^2} \quad (3.15)$$

Зависимость энергии волны от времени изображена на фиг. 4.

В заключение автор выражает благодарность Р. З. Сагдееву за руководство работой и В. И. Карпману за обсуждение результатов.

Поступила 10 III 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. Ж. Эксперим. и теор. физ. 1946, т. 16, стр. 574.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы. Усп. физ. н., 1961, т. 73, стр. 701.
3. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. 1, стр. 82.
4. Захаров В. Е., Карпман В. И. К нелинейной теории затухания плазменных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 43, стр. 490.