

## ВЛИЯНИЕ СИЛЫ КОРИОЛИСА НА КОНВЕКЦИЮ В ГЛУБОКОМ ОЗЕРЕ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Е. А. Цветова

Вычислительный центр СО РАН, 630090 Новосибирск

Квазидвумерная негидростатическая модель гидротермодинамики с учетом сжимаемости воды используется для исследования конвекции в глубоком водоеме при температурах, близких к температуре максимальной плотности (ТМП). Вращение Земли учитывается в модели с помощью двух компонентов силы Кориолиса. Специфика глубокого водоема в отношении конвективных процессов состоит в зависимости ТМП не только от солёности, но и от давления. Сравниваются результаты трех численных экспериментов: без учета силы Кориолиса, с одним и двумя параметрами Кориолиса. Результаты демонстрируют существенное влияние силы Кориолиса, что позволяет сделать вывод о необходимости ее учета при моделировании конвективных процессов в природных объектах.

**Введение.** Вопрос — учитывать или нет вращение Земли при моделировании гидродинамических процессов, происходящих в атмосфере, океане и водных объектах, уже давно не дискутируется. В задачах геофизической гидродинамики он решен однозначно в пользу необходимости учета силы Кориолиса. Справедливость такого решения подтверждается хотя бы тем фактом, что геострофический баланс, т. е. баланс между градиентом давления и силой Кориолиса, выполняется довольно точно почти при всех типах движений, имеющих место в природных объектах. Однако, согласно традиции, почти во всех численных моделях сила Кориолиса представляется только одним параметром  $l \equiv 2\Omega \sin\varphi$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  — широта. Относительно второго параметра  $k \equiv 2\Omega \cos\varphi$  делается предположение о его малом влиянии, и им пренебрегают. Иногда отбрасывание второй составляющей силы Кориолиса представляется справедливым. Действительно, при моделировании крупномасштабных природных процессов различие в три порядка между горизонтальными и вертикальным размерами исследуемых областей дает такое же отличие в характерных масштабах горизонтальных и вертикальной составляющих вектора скорости. Поэтому, если не задаваться целью моделирования конвекции, отбрасывание второго компонента позволяет существенно упростить постановку задачи и вместо полного уравнения для вертикальной скорости использовать его приближенный аналог — уравнение гидростатики. Очевидные затруднения возникают в традиционных постановках задач с одним параметром  $l$ , когда необходимо рассматривать экваториальные или близкие к ним районы, где  $l$  равно или близко к нулю. Однако не этот крайний случай интересует нас сейчас. Даже и для средних широт, когда соизмеримы вертикальный и горизонтальные характерные масштабы движений, возникают ситуации, при которых нет особых оснований отдавать предпочтение какому-либо компоненту. Такая ситуация возникает при конвекции. Одним из наиболее интересных примеров таких процессов, наблюдаемых в природе, является конвекция в холодной пресной воде озера Байкал.

Целью настоящей работы является анализ влияния параметров, учитывающих вращение Земли, на формирование гидротермодинамических процессов в водных объектах. Исследование проводится в рамках численной модели, которую мы используем для изуче-

ния процессов конвективного перемешивания в глубоком озере [1].

**Математическая модель.** Система уравнений выражает законы сохранения момента, массы и энергии для сжимаемой жидкости. Предполагается, что по координате  $y$ , направленной на север, все характеристики процессов однородны и движение осуществляется в плоскости  $x - z$ , ось  $x$  направлена на восток, а ось  $z$  — вниз. В систему входят три уравнения движения для компонент вектора скорости  $u, v, w$  в направлениях  $x, y, z$  соответственно:

$$\frac{du}{dt} - lv - kw = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + lu = \frac{\partial}{\partial z} \nu' \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} + ku = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + g \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \nu' \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Перераспределение тепла в водной толще описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} - \Gamma \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5)$$

Дополняет систему нелинейное уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, S_0). \quad (6)$$

Здесь  $l$  и  $k$  — параметры Кориолиса, которые из-за сравнительно небольших горизонтальных размеров озер практически всегда принимаются постоянными;  $p$  — давление,  $p'$  — отклонение местного давления от местного гидростатического значения  $p_h$ , когда система находится при заданных температуре  $T^0(z)$  и солёности  $S_0$ ,  $p'(x, z, t) = p(x, z, t) - p_h(z)$ ;  $\rho$  — плотность,  $\rho'$  — соответствующее отклонение плотности,  $\rho'(x, z, t) = \rho(x, z, t) - \rho_h(z)$ ;  $A, \nu, \mu, \nu_T$  — коэффициенты турбулентной диффузии;  $T$  — температура;  $\Gamma$  — адиабатический градиент,  $\Gamma = \alpha T_a / (\rho c_p)$ ;  $T_a$  — абсолютная температура;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $S_0$  — солёность;  $\alpha$  — коэффициент термического расширения.

Система уравнений (1)–(6) рассматривается в области  $D_t = D \times [0, t_k]$ , где  $D$  — область изменения пространственных переменных  $(x, z)$  и  $[0, t_k]$  — интервал изменения времени. Рельеф дна предполагается заданной функцией горизонтальной координаты. Граничные и начальные условия:

— на поверхности при  $z = 0$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho}, \quad \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{Q}{\rho c_p}; \quad (7)$$

$$p = p_a, \quad w = -\frac{1}{g\rho} \frac{\partial p'}{\partial t}; \quad (8)$$

— на дне при  $z = H(x)$

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial N} = 0; \quad (9)$$

— на боковых границах

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial N} = 0; \quad (10)$$

— начальные условия при  $t = 0$

$$\varphi = \varphi^0(x, z), \quad \varphi = (u, v, w, T, p, \rho). \quad (11)$$

Здесь  $\partial/\partial N$  — производная по конормали:

$$\frac{\partial}{\partial N} = \mu \cos(\mathbf{n}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \nu_T \cos(\mathbf{n}, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к границе области;  $p_a$  — атмосферное давление;  $\tau_x, \tau_y$  — напряжение ветра;  $Q$  — поток тепла на поверхности;  $\varphi^0(x, z)$  — заданные функции.

Уравнение состояния (6), используемое в модели, специально приспособлено к лимнологическим целям [2]: интервалы изменения  $T, p, S$  отвечают значениям, которые встречаются в озерах. В соответствии с этим уравнением плотность — нелинейная функция температуры, давления и солености. В данной версии модели соленость задана постоянной величиной 0,098 г/кг. Адиабатический градиент температуры, коэффициент термического расширения, удельная теплоемкость и другие термодинамические величины, необходимые в модели, также вычисляются по формулам [2].

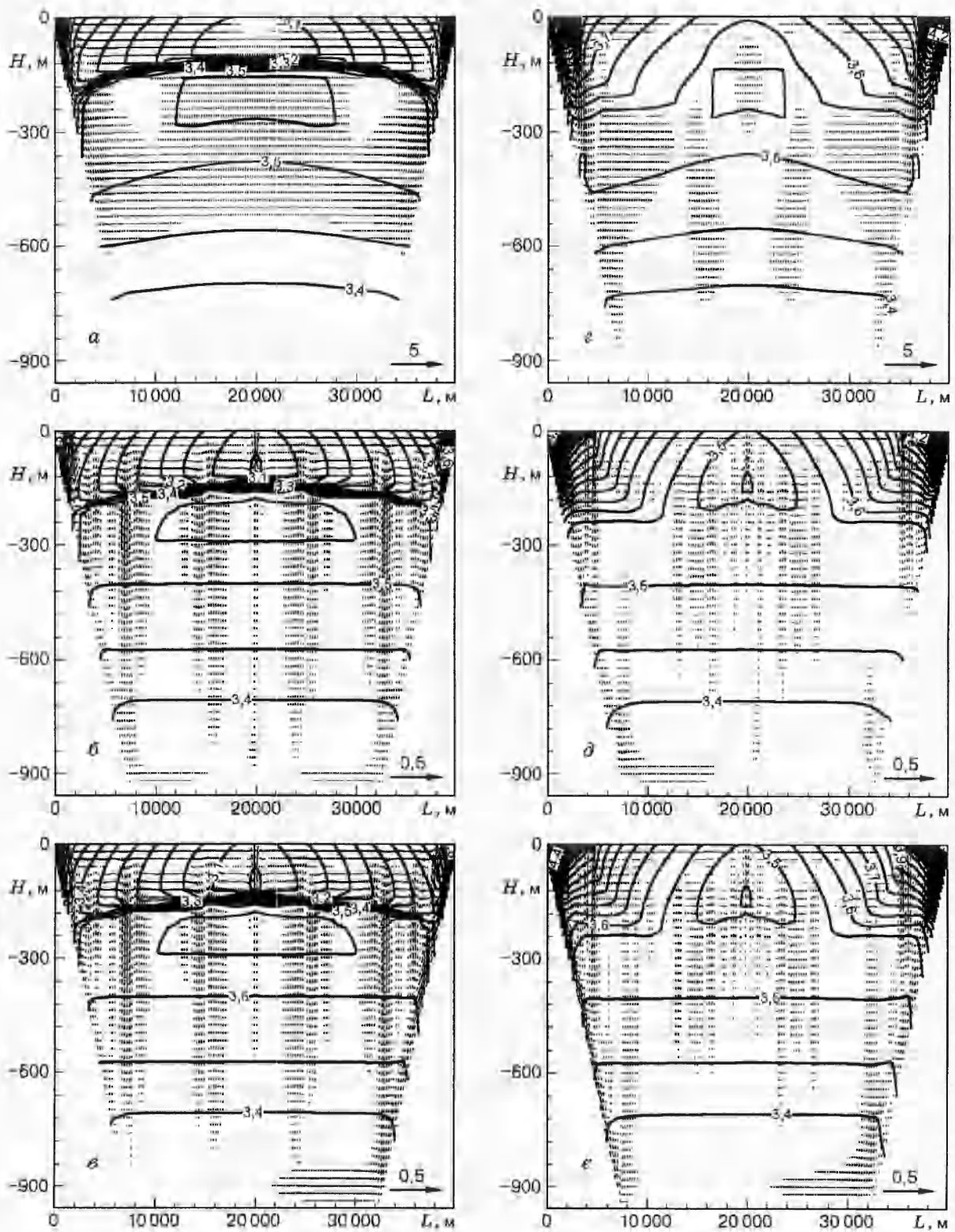
Одной из важных задач при моделировании конвекции является параметризация турбулентности. Движения подсеточного масштаба, которые непосредственно не воспроизводятся в модели, параметризуются с помощью диффузионных операторов второго порядка, причем, как это принято в океанологии, горизонтальные и вертикальные процессы описываются по-разному. В численных экспериментах, описываемых в статье, горизонтальные коэффициенты турбулентности предполагались постоянными, в то время как для вертикальных коэффициентов использовались функциональные зависимости от градиентного числа Ричардсона.

Численный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам [3]. Для построения энергетически сбалансированных аппроксимаций (1)–(12) используется вариационный принцип [4]. В соответствии с идеей метода расщепления решение задачи на каждом шаге по времени осуществляется в несколько этапов. Более подробно наш подход к решению задачи описан в [5].

С помощью описанной модели и некоторых ее модификаций автором выполнен цикл исследований по моделированию конвективных процессов в глубоком озере [1, 6, 7]. Особый интерес представляют эксперименты по изучению термобара, который возникает во всех димиктических озерах два раза в год, весной и осенью. Это явление занимает особое место в ряду других явлений на Байкале, поскольку ему отводится важная роль в обновлении глубинных вод озера [8–13]. В частности, в работах [8–13] развивается гипотеза об интенсивном водообмене на фронте термобара и определяющей роли в этих процессах уменьшения ТМП с ростом давления.

В отличие от нашей постановки задачи, в работе [14] для моделирования термобара глубокого озера использованы две двумерные модели — гидростатическая и негидростатическая. В обеих моделях не учитывалась сила Кориолиса, а в уравнениях состояния отсутствовала зависимость плотности от давления. По нашему мнению, такие предположения исключают возможность получения распределения температуры, которое соответствует реальному, а, следовательно, и всех других компонентов функции состояния. Тем не менее авторы [14] утверждают, что такие модели позволяют описать принципиальные особенности обновления глубинных вод в прибрежной зоне глубокого озера.

Нашей главной целью было проанализировать различия в результатах расчетов по модели с одним и двумя параметрами Кориолиса. Поскольку в наших расчетах тоже фигурирует термобар, естественно рассмотреть и тот случай, когда вращение не учитывается, что частично соответствует условиям экспериментов из [14]. Так что в данном случае результаты моделирования можно рассматривать как оценку влияния параметров



Поле течений и изолинии температуры:

*a, б, в* — эксперименты 0, 1, 2 через 10 дней после начала эксперимента; *г, д, е* — через 20 дней

на характеристики термобара, а, следовательно, и на процессы обновления глубинных вод озера.

**Численные эксперименты.** Численные эксперименты проводятся в рамках одной постановки задачи. Изменения, отличающие один эксперимент от другого, не касаются алгоритма. Они вносятся соответствующим заданием параметров, относящихся только к силе Кориолиса. Сравниваются результаты трех численных экспериментов:

- 0)  $l = 0, \quad k = 0;$
- 1)  $l \neq 0, \quad k = 0;$
- 2)  $l \neq 0, \quad k \neq 0.$

Двумерная область, в которой решается задача, представляет собой трапециевидную полость. Горизонтальный размер по верхней границе 40 км. Небольшие отвесы ограничивают область слева и справа, углы наклона боковых сторон трапеции одинаковы. Максимальная глубина 960 м. Область покрывается регулярной сеткой с шагами  $\Delta x = 80$  м,  $\Delta z = 20$  м, т. е. расчеты выполняются на сетке, имеющей  $501 \times 49$  точек. Шаг по времени  $\Delta t = 60$  с. В численной реализации береговые склоны аппроксимируются отрезками, параллельными осям координат. Рассматривается задача о весеннем нагревании глубокого озера. Параметры модели выбраны так, что они укладываются в интервалы изменений, соответствующие условиям озера Байкал. Начальное температурное поле принято однородным по горизонтали, но переменным по вертикали. Вертикальный профиль, взятый из натуральных данных за 1.06.1977 г., полученных на разрезе Лиственичное — Танхой, схематически отражает типичный весенний профиль температуры в Байкале с максимумом  $3,6^\circ\text{C}$  на глубине 250 м в зоне так называемого мезотермического максимума. В этом профиле присутствует четко выраженный термоклин на глубинах 100–150 м. Температура поверхности  $2,61^\circ\text{C}$ . Согласование начального распределения температуры  $T^0$ , давления  $p_h$  и плотности  $\rho_h$  производится с помощью решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, одно из которых есть уравнение состояния (6), а второе — уравнение гидростатики  $\partial p_h / \partial z = g\rho_h$  с граничным условием из (9). Система решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности.

В начальный момент (в состоянии покоя) компоненты вектора скорости и отклонения давления и плотности от их гидростатических значений равны нулю. Напряжение ветра на поверхности для всего срока эксперимента задается нулевым. Это приближение не только интересно с методической точки зрения, но и оправдано, поскольку, по данным наблюдений, в весенний период на Байкале ветер почти всегда слабый и неустойчивый. Единственный источник движения — это поток тепла на поверхности, который задан зависящим от горизонтальной координаты  $Q(x) = c - d \sin(\pi x/L)$ , где  $c = 167,3$  Дж/(м<sup>2</sup>·с), что соответствует средним данным за июнь. Для других параметров выбраны следующие величины:  $d = 0,002$ ,  $A = \mu = 0,1$  м<sup>2</sup>/с.

Результаты численного моделирования представлены на рисунках, где поля течений совмещены с полями температур. Изотермы проведены через  $0,05^\circ\text{C}$ . В векторных полях дана только каждая четвертая по горизонтали точка сетки. Рисунки *a* и *г* представляют эксперимент 0, *б* и *д* — эксперимент 1, *в* и *е* — эксперимент 2. Ключевое значение во всех экспериментах имеет нелинейное поведение плотности в зависимости от температуры и давления.

Рисунки *a–в* относятся к моменту времени  $t = 10$  дней от начала экспериментов. На этих рисунках имеются общие черты. Видно, что температура поверхности у берегов приближается к ТМП, изолинии сильно сгущаются и их направления практически вертикальны, т. е. происходит интенсивное перемешивание по глубине от поверхности до склона. На всех рисунках видны по две циркуляционные ячейки, располагающиеся вблизи берегов. Они сформировались благодаря термоклину, который «запирал» опускающиеся

вдоль склона течения, не давая им вначале напрямую продвигаться вниз по склону.

В то время как картины течений и поля температур на рисунках *б* и *в*, рассчитанных с учетом силы Кориолиса, отличаются друг от друга только некоторыми деталями, рисунок *а* демонстрирует совершенно иную схему течений и другое поведение изолиний поля температур. Скорости течений в эксперименте 0 значительно превышают скорости течений в двух других экспериментах. В этом можно убедиться сравнивая соответствующие рисунки (масштаб векторов на рисунке *а* отличается от масштаба, выбранного для рисунков *б* и *в*). Картина течений без учета вращения (рисунок *а*) имеет «глобальный» характер: опускание вдоль склонов и подъем в центре. Наблюдается полная симметрия картины относительно центральной вертикальной оси области. Из рисунков *б* и *в* видно, что из-за учета вращения изменяются масштабы движений, они становятся более мелкими. Проявляется сложная, меняющаяся во времени ячеистая структура полей течений.

Во всех экспериментах поступление тепла на поверхность происходит одинаково, а перераспределяется оно в толще вод по-разному, о чем свидетельствует расположение изотерм. Так, в эксперименте 0 (рисунок *а*) горизонтальные градиенты температуры в эпилимнионе меньше и термоклин располагается выше, чем в других вариантах. Сравняя эксперименты 1 и 2 (рисунки *б* и *в*), существенные различия в поведении изотерм и векторов течений можно найти только у берегов.

Рисунки *г-е* относятся к моменту времени 20 дней от начала эксперимента. Благодаря интенсивному перемешиванию термоклин, находившийся в начальном поле температур на глубине 100–150 м и через 10 дней опустившийся на глубину около 200 м, теперь полностью разрушен. Вблизи поверхности начинает образовываться новый термоклин. Если обратить внимание на поведение изотерм в 300-метровом слое, то можно заметить, что во всех экспериментах изолинии на части области расположены почти горизонтально, а затем резко изменяют направление. Линия, соединяющая точки максимальных градиентов на изотермах, является линией фронта. Она совпадает с геометрическим местом точек, где температура *in situ* равна локальной ТМП,  $T = T_*(p(x, z, t), S_0)$ , т. е. по определению вблизи этой линии должен проходить термобар. На всех рисунках видны по два термобара (по одному слева и справа), которые продвинулись от берегов, где они зародились, уже на довольно значительное расстояние. Таким образом, термобар как таковой получился во всех экспериментах. Рассмотрим, чем отличаются результаты расчетов.

Аналогично предыдущему моменту времени сохраняются все отмеченные выше различия. Эксперименты 1 и 2 (рисунки *д* и *е*) демонстрируют похожие результаты, тогда как эксперимент без учета вращения (рисунок *г*) отличается от них по структуре полей температуры и течений. Анализируя результаты расчетов, можно сделать вывод, что сила Кориолиса деформирует процесс, действуя таким же образом, что и стратификация. К такому же выводу пришли авторы теоретической работы [15], в которой изучались свойства решения гидродинамической задачи, описывающей стратифицированную вращающуюся жидкость.

И наконец, при сопоставлении рисунков *д* и *е* можно убедиться в том, что, как и в предыдущий момент времени, имеются существенные отличия в поведении гидродинамических характеристик вблизи берегов в экспериментах с учетом одного и двух компонентов силы Кориолиса.

С точки зрения геофизического содержания результатов, исследования, выполненные нами с помощью численного моделирования, показывают, что водообмен между поверхностными и глубинными водами действительно может реализоваться благодаря течениям, сопровождающим термобар. Такие течения, как правило, достигают подводных склонов. Это согласуется с упомянутой выше гипотезой [8–13]. Кроме того, из анализа ситуации в целом следует, что водообмен происходит не только и не столько на термобаре. Он ре-

ализуется во всей области за счет конвекции с чередованием нисходящих и восходящих движений, достигая максимальных глубин. Горизонтальные и вертикальные масштабы конвективных ячеек получаются в расчетах соизмеримыми, а характер водообмена контролируется динамикой термоклина и областей, в которых локальная температура воды совпадает с ТМП для местных условий.

**Заключение.** На основании численных экспериментов, выполненных на базе описанной модели, можно сделать вывод, что в численном моделировании конвективных процессов глубокого водоема необходимо учитывать силу Кориолиса, по крайней мере, с помощью одного параметра  $l$ . Роль второго параметра нам тоже кажется важной, особенно в мета- и гипolimнионе. Различие процессов вблизи западного и восточного берегов появилось в результате действия второго компонента силы Кориолиса. Для окончательного выяснения роли параметра  $k$  мы постараемся продолжить исследование на трехмерной модели, добавляя, в рамках данной постановки задачи, учет неоднородностей по второй горизонтальной координате. Однако уже из представленной серии экспериментов видно, что при учете вращения Земли присутствие в модели одного или двух параметров не столь кардинально меняет структуру решения, как пренебрежение силой Кориолиса вообще.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-05-16106).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цветова Е. А. Специфические проявления конвекции в глубоких озерах // Математ. проблемы экологии. Новосибирск. 1996. Вып. 2. С. 181–189.
2. Chen C. T., Millero F. J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range // Limnol. Oceanogr. 1986. V. 31(3). P. 657–662.
3. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
4. Пененко В. В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
5. Tsvetova E. A. Compressibility effects in lake hydrodynamics // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Numerical Modeling in Atmosphere, Ocean, and Environment Studies. 1993. N 1. P. 91–103.
6. Tsvetova E. A. A numerical model of thermal bar in lake Baikal // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Numerical Modeling in Atmosphere, Ocean, and Environment Studies. 1995. N 2. P. 85–100.
7. Tsvetova E. A. Convective currents associated with the thermal bar of lake Baikal // Adv. Math.: Computations and Appl. / A. S. Alekseev, N. S. Bakhvalov (Eds). Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. P. 386–393.
8. Шимараев М. Н., Гранин Н. Г. Термическая стратификация и механизм конвекции в озере Байкал // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 831–835.
9. Шимараев М. Н., Грачев М. А., Имбоден Д. М. и др. Международный геофизический эксперимент на Байкале: процессы обновления глубинных вод в весенний период // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 6. С. 824–827.
10. Шимараев М. Н., Домышева В. М., Горбунова Л. А. О динамике кислорода в Байкале в период весеннего перемешивания // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 6. С. 814–817.
11. Shimaraev M. N., Granin N. G. Deep ventilation of lake Baikal waters due to spring thermal bars // Limnol. Oceanogr. 1993. V. 38, N 5. P. 1068–1072.

12. **Shimaraev M. N., Verbolov V. I., et al.** Physical limnology of lake Baikal: a review // Baikal Intern. Center for Ecological Res. 1994. Print N 2.
13. **Weiss R. F., Carmack E. C., Koropalov V. M.** Deep water renewal and biological production in lake Baikal // Nature. 1991. V. 349. P. 665–669.
14. **Бочаров О. Б., Васильев О. Ф., Квон В. И., Овчинникова Т. Э.** Математическое моделирование термобара в глубоком озере // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 4. С. 530–532.
15. **Масленникова В. Н., Петунин И. М.** Асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения начально-краевой задачи теории внутренних волн // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 823–828.

*Поступила в редакцию 27/1 1997 г.*

---