

УДК 532.57; 533.6/7; 535.8; 629.7/.016

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТОЙКОСТИ КРИТИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ СОПЕЛ ДЛЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТАНОВОК СВЕРХВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ И РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ СОПЛОВОЙ ВСТАВКИ ИЗ САПФИРА

М. Е. Топчиян<sup>\*,\*\*</sup>, В. И. Пинаков<sup>\*\*\*</sup>, В. Н. Рычков<sup>\*,\*\*</sup>,  
А. А. Мещеряков<sup>\*\*\*</sup>

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\*\* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

\*\*\* Конструкторско-технологический филиал Института гидродинамики  
им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: topch@hydro.nsc.ru

Представлены результаты экспериментального исследования воздействия потока азота и воздуха на сопловые вставки из различных материалов и сапфира при значениях давления в форкамере до 1 ГПа. Получены формулы, необходимые для оценки величины термических напряжений в материалах, близких по своим свойствам к сапфиру.

**Ключевые слова:** мощность теплового потока, критическое сечение сопла, распределение термических деформаций, напряжения в теле сопловой вставки.

**Введение.** При использовании воздуха в качестве рабочего газа в газодинамических установках с высоким уровнем давления (0,5 ÷ 1,0 ГПа) [1, 2], необходимым для точного воспроизведения в наземных экспериментах натуральных чисел Маха и Рейнольдса на моделях гиперзвукового прямооточного воздушно-реактивного двигателя (ГПВРД), возникают трудности двоякого рода. С одной стороны, для работы сопла при давлениях в форкамере порядка 1 ГПа и выше необходимы высокие прочностные свойства материала. С другой стороны, поскольку в этих условиях химическая активность кислорода воздуха возрастает в тысячи раз, необходима стойкость материала к окислению. Сопловые вставки (рис. 1), изготовленные из термостойких конструкционных материалов, например штамповой стали марки ЭИ-958 (4Х5В2ФС), выгорают в атмосфере воздуха в течение первого же пуска (рис. 2), что иногда создает аварийную ситуацию. Были испытаны также вставки из карбида вольфрама и рения, которые показали достаточную стойкость при работе с азотом.

При работе с воздухом применялись вставки из меди, легированной окислами алюминия или бериллия [3] и сохраняющей прочность холодного металла при температуре, близкой к температуре плавления. Это позволяет работать с воздухом до значения давления, приближенно равного 0,45 ГПа. При более высоких давлениях (0,6 ГПа) происходит характерное смятие сопловой вставки с перекрытием отверстия критического сечения (рис. 3).

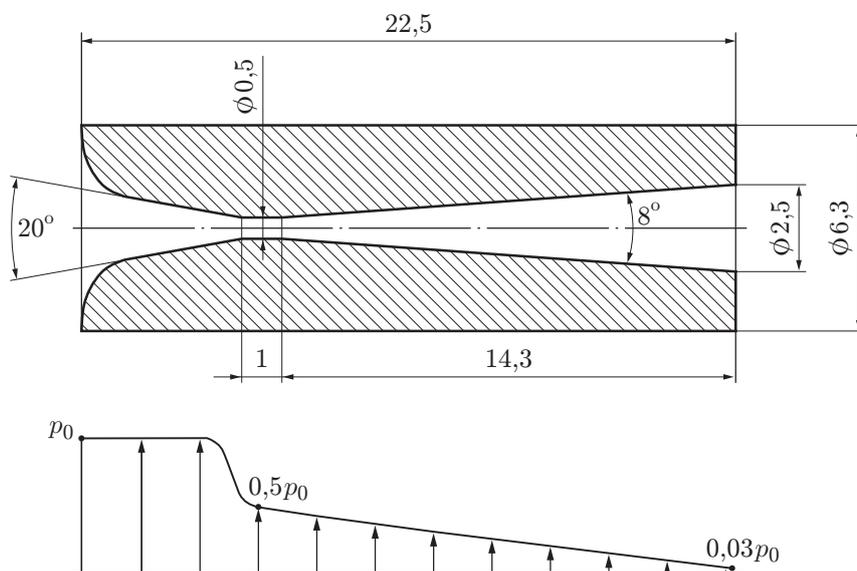


Рис. 1. Исходные размеры сопловых вставок

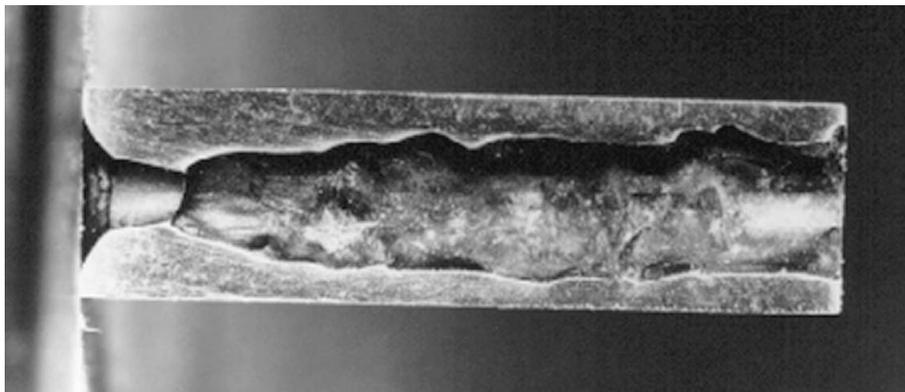


Рис. 2. Разрез сопловой вставки из стали марки ЭИ-958 после единственного пуска с техническим азотом (давление в форкамере  $p_\Phi = 200$  МПа)

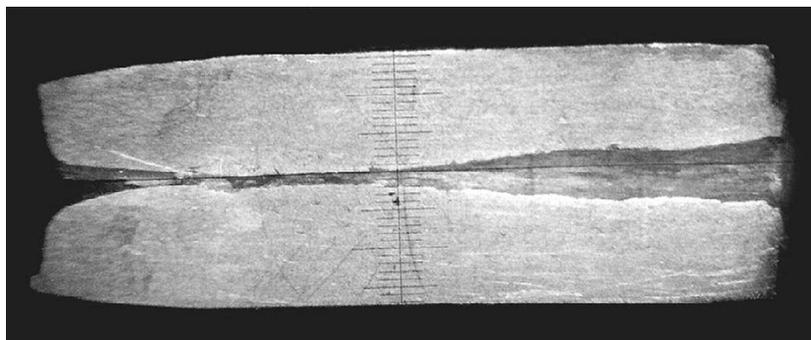


Рис. 3. Разрез сопловой вставки из меди, легированной оксидами алюминия, после пуска с воздухом ( $p_\Phi = 600$  МПа)

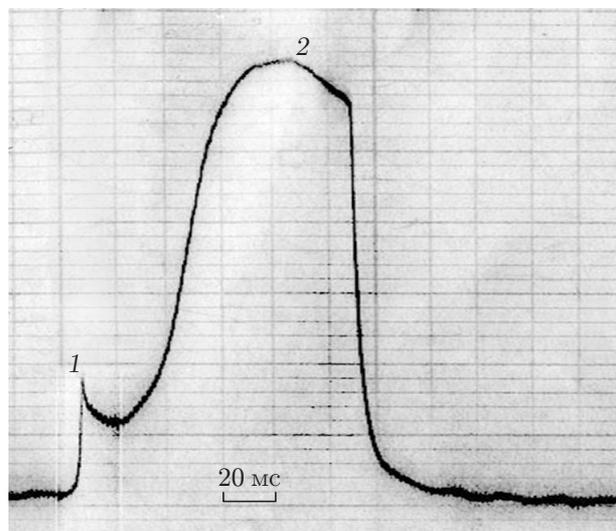


Рис. 4. Осциллограмма давления в эксперименте со вставкой из сапфира:  
1 — работа первой ступени А-1; 2 — максимальное давление  $p = 516$  МПа

При давлениях свыше  $0,5$  ГПа приходится использовать азот, что исключает возможность исследования процессов горения. Эта возможность появляется при использовании в качестве материала вставки прочных окислов, не подверженных химическому воздействию воздуха. В силу доступности и подходящей прочности на сжатие ( $2$  ГПа) для экспериментов был выбран лейкосапфир. Из этого материала была изготовлена сопловая вставка (см. рис. 1), диаметр критического сечения которой составлял  $(0,573 \pm 0,005)$  мм. Также на рис. 1 показано приблизительное распределение давления на внутренней поверхности вставки.

Для того чтобы уменьшить растягивающие напряжения, в конструкции предусмотрена всесторонняя внешняя поддержка вставки полным давлением газа в форкамере  $p_b = p_0$ , поэтому по всей длине вставки отношение внутреннего статического давления к внешнему  $p_a/p_b$  изменялось от единицы в конфузурной части до  $0,03$  на выходе из конуса.

Вставка была подвергнута испытанию при максимальном давлении азота в форкамере  $p_{\text{ф}} \approx 516$  МПа и температуре  $T_{\text{ф}} \approx 1593$  К. Время рабочего режима составило приблизительно  $50$  мс. Расчетные параметры в критическом сечении следующие: давление  $p^* \approx 225$  МПа, температура  $T^* \approx 1304$  К, плотность  $\rho^* \approx 360$  кг/м<sup>3</sup>, скорость потока  $v^* \approx c^* \approx 1152$  м/с, при этих условиях вязкость воздуха в критическом сечении  $\eta^* = 46,5 \cdot 10^{-6}$  Н·с/м<sup>2</sup>.

Осциллограмма давления, полученная в проведенном эксперименте, показана на рис. 4. Промежуток времени между вертикальными линиями —  $20$  мс, максимальное давление —  $516$  МПа. После разборки узла крепления оказалось, что вставку пронизывают трещины, иногда сквозные, но ее целостность не нарушена: отдельных осколков не образовалось, разрушение хрупкое (рис. 5).

Промеры калибрами и на инструментальном микроскопе показали, что диаметр критического сечения не изменился в пределах ошибки измерения. Из совокупности приведенных фактов следует, что сопловая вставка, стойкая к химическому воздействию и удовлетворяющая требованиям к исходным прочностным характеристикам, разрушилась в результате действия термических напряжений, возникающих при нагревании ее внутренней поверхности истекающим газом и растягивающих ее внешние слои. Растрескивание произошло, по-видимому, уже после истечения газа на стадии уменьшения поддерживающего давления.

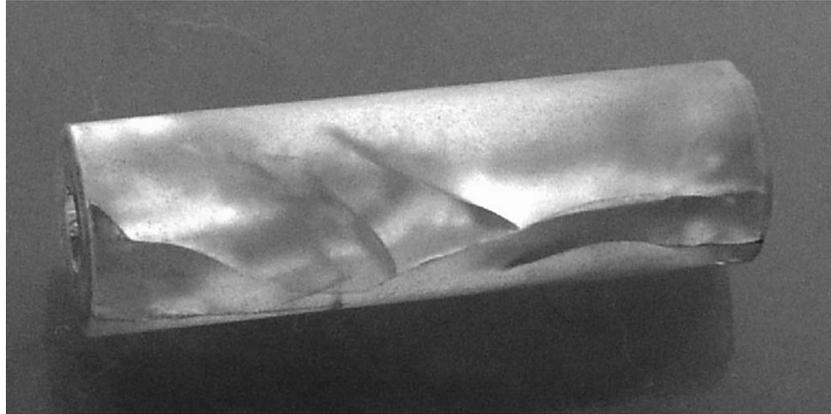


Рис. 5. Вставка из сапфира после эксперимента

**Оценка максимально возможной мощности теплоотвода в тело вставки из сапфира.** Термические напряжения в сопловой вставке возникают при тепловом контакте с истекающим горячим газом вследствие появления градиента температуры. В пограничном слое горла сопла реализуются критическое давление ( $p = p^*$ ) и температура торможения незначительно превышает (при больших давлениях в форкамере) температуру в форкамере  $T_\Phi$ .

Перед пуском температура сопловой вставки равна комнатной ( $T_0 \approx 300$  К). Характерное время увеличения температуры ее поверхности  $\Delta t$  приблизительно равно 30 мс. Для оценки потока тепла сверху предположим, что за время  $\Delta t = 10$  мс, заведомо меньшее реального времени нагрева, температура прогретого слоя достигает полученного в проведенном эксперименте значения температуры торможения  $T_\Phi = 1586$  К. Толщина этого слоя  $\delta \sim \sqrt{\alpha_T \Delta t}$ , где  $\alpha_T$  — температуропроводность. Теплопроводность сапфира  $\lambda_c = 17$  Вт/(м·К), плотность  $\rho_c \approx 4000$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкость  $C_c \approx 800$  Дж/(кг·К), температуропроводность  $\alpha_{Tc} = \lambda_c / (\rho_c C_c) = 5,3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, поэтому глубина прогретого слоя  $\delta \approx 0,23$  мм. Слой длиной  $l^* = 1$  мм и диаметром  $d^* \approx 0,573$  мм прогреется до температуры, не превышающей значения  $\Delta T = T_\Phi - T_0 \approx 1300$  К, при средней мощности подвода тепла  $N_1 < \pi d^* l^* \rho_c C_c \Delta T \sqrt{\alpha_{Tc} \Delta t} / \Delta t = 3,14 \cdot 0,57 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 4000 \cdot 800 \cdot 1300 \cdot 2,3 \cdot 10^{-3} / 10^{-2} \approx 172$  Вт.

**Оценка теплоотдачи в критическом сечении вставки.** Нагрев внутренней поверхности сопловой вставки зависит также от мощности теплового потока от газа к стенке  $N_2$ . Согласно закону Ньютона — Рихмана

$$N_2 = \beta(T_r - T_c)S,$$

где  $\beta$  — коэффициент теплоотдачи;  $T_r = T_\Phi$  — температура газа;  $T_c$ ,  $S$  — температура и площадь поверхности цилиндрической части стенки ( $S = 1,8 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>). В условиях эксперимента  $\Delta T = T_r - T_c \approx 1300$  К.

Полагаем, что пограничный слой нарастает от входной кромки ( $x = 0$ ) цилиндрической части критического сечения ( $d^* = 0,573$  мм) и при  $x = l^* = 1$  мм число Рейнольдса

$$Re = \rho^* a^* l^* / \eta = 360 \cdot 1152 \cdot 10^{-3} / (46,5 \cdot 10^{-6}) = 8,91 \cdot 10^6.$$

Следовательно, практически на всей длине “критической” части  $l^*$  в пограничном слое устанавливается турбулентное течение [4. С. 203].

Для турбулентного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи  $\beta = \text{Nu} \lambda_r / l^*$  [5. С. 153], где  $\lambda_r = 7,3 \cdot 10^{-3}$  Вт/(м·К) — теплопроводность газа; число Нуссельта определяется по формуле

$$\text{Nu} = 0,03 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43},$$

$\text{Pr}$  — число Прандтля, для двухатомных газов равно 0,72.

Для данных значений параметров имеем  $\text{Nu} = 9,4 \cdot 10^3$ ,  $\beta = 6,8 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), а также среднее по длине “критической” части сопла значение  $\bar{\beta} = 1,25\beta = 8,5 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) [5. С. 199]. В результате подстановки  $\bar{\beta}$ ,  $T_r - T_c$  и  $S$  в формулу для  $N_2$  получаем оценку  $N_2 \approx 2 \cdot 10^3$  Вт.

Следовательно, возможная тепловая мощность, подведенная с помощью газа к стенке сопла, в критическом сечении примерно на порядок превышает мощность тепловода с поверхности в тело сопловой вставки. Это подтверждается и очень большой величиной критерия Био, вычисленного по половине толщины вставки:  $\text{Bi} = \bar{\beta}(b - a)/(2\lambda_c) \approx 143$ .

Таким образом, имеются основания полагать, что в условиях такого эксперимента температура внутренней поверхности по всей длине вставки, изготовленной из сапфира или других материалов со сходными характеристиками, в течение времени работы (примерно 50 мс) приблизительно равна температуре в форкамере  $T_\Phi$  или вследствие эффектов реального газа несколько превышает ее.

После прекращения течения газа внутреннюю стенку вставки можно рассматривать как теплоизолированную, поскольку теплообмен с покоящимся неподвижным газом пренебрежимо мал по сравнению с теплообменом при истечении плотного газа. По той же причине можно не учитывать нагрев поверхности конфузорной части вставки за время эксперимента, поскольку скорость обтекания этой поверхности много меньше критической.

**Распределение температуры.** Как правило, решение задач теплопроводности в случае цилиндрической формы тела получается в виде бесконечных рядов бесселевых функций, что создает определенные трудности при анализе и оценке этих решений. При использовании сапфира за время эксперимента уже на глубине, приблизительно равной 1 мм, увеличение температуры составляет лишь 10 % ее скачка на стенке. Поэтому для оценки возникающего поля температуры не будем учитывать радиальную расходимость потока тепла и рассмотрим задачу в одномерном приближении, так же как при нагревании полупространства или полуограниченного теплоизолированного стержня, ось  $x$  которого проходит в радиальном направлении, т. е. перпендикулярно обтекаемой поверхности. Будем считать, что до начала теплового воздействия температура стержня была равна комнатной температуре  $T_0$ . Начиная с момента времени  $t = 0$  на конце стержня  $x = 0$  отклонение от начальной температуры задано функцией времени  $T(t)$ , которую в соответствии с приведенной осциллограммой давления приближенно представим в виде прямоугольника ( $T_W = T_\Phi - T_0 \approx 1300$  К при  $0 \leq t \leq t_0 \approx 50$  мс; в течение остального времени конец  $x = 0$  теплоизолирован).

Данная физическая модель соответствует двум задачам для уравнения теплопроводности  $\partial T / \partial t = a_T \partial^2 T / \partial x^2$ : 1) поиск распределения отклонения температуры  $T_1(x, t_0)$  в полуограниченном стержне в момент прекращения действия источника тепла при начальном и граничном условиях  $T_1(x, 0) = 0$  и  $T_1(0, t) = T_W$  соответственно ( $0 \leq t \leq t_0$ ); 2) определение выравнивания поля температур при  $t > t_0$  в отсутствие теплообмена с газом, т. е. при  $\partial T_2 / \partial x|_{x=0} = 0$ .

Согласно свойствам решений уравнения теплопроводности, начальным и граничным условиям данной задачи максимальные температуры, а также градиенты и термические напряжения достигаются в момент прекращения подогрева при  $t = t_0$ . Поэтому решать вторую задачу не требуется.

Для первой задачи распределение отклонения температуры определено решением уравнения теплопроводности в виде

$$T_1(x, t_0) = \frac{T_W}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{a_T x}{[a_T(t_0 - \tau)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4a_T(t_0 - \tau)} \right] d\tau, \quad (1)$$

которое с помощью замены  $\theta = x/\{2[a_T(t_0 - \tau)]^{1/2}\}$  можно выразить через интеграл вероятности

$$T_1(x, t_0) = T_W \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{\theta}}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = T_W \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tilde{\theta}} e^{-\theta^2} d\theta \right)$$

или

$$T_1(x, t_0) = T_W [1 - \operatorname{erf}(\tilde{\theta})],$$

где  $\tilde{\theta} = x/[2(a_T t_0)^{1/2}]$  — предел интегрирования (см., например, [6. С. 538–543]).

Можно определить  $x_0$  — положение границы температурного поля, на которой за время воздействия потока, приблизительно равное 50 мс, температура повышается не более чем на 10 % скачка на внутренней стенке  $T_W$ . Из таблиц, приведенных в [7], следует, что  $\operatorname{erf}(\theta_0) \approx 0,9$  при  $\tilde{\theta} = \theta_0 \approx 1,163$ , т. е. расстояние от этой границы до внутренней стенки составляет  $x_0 = 2\theta_0(a_T t_0)^{1/2} = \theta_0 b \operatorname{Fo}^{1/2} \approx 1,2$  мм. Здесь  $\operatorname{Fo} = a_T t_0 / b^2$  — критерий Фурье. В рассматриваемом случае при  $b = 3,15$  мм  $\operatorname{Fo} \approx 0,027$ .

Для того чтобы оценить количество подведенного тепла  $Q$ , умножим формулу (1) на теплоемкость  $C_c$ , введем переменную  $\eta = x^2/[4a_T(t_0 - \tau)]$  и изменим порядок интегрирования. Получаем следующее соотношение:

$$Q(x, t_0) = \frac{C_c T_W}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{a_T}{\sqrt{a_T(t_0 - \tau)}} \left( \int_0^{x^2/[4a_T(t_0 - \tau)]} e^{-\eta} d\eta \right) d\tau.$$

После интегрирования выражения в скобках имеем

$$Q(x, t_0) = \frac{C_c T_W a_T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1 - e^{-x^2/[4a_T(t_0 - \tau)]}}{[a_T(t_0 - \tau)]^{1/2}} d\tau. \quad (2)$$

При  $x \rightarrow \infty$

$$Q(\infty, t_0) = \frac{C_c T_W}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{a_T d\tau}{[a_T(t_0 - \tau)]^{1/2}} = C_c T_W \sqrt{\frac{4a_T t_0}{\pi}} = C_c T_W b \sqrt{\frac{\operatorname{Fo}}{\pi}} = \frac{C_c T_W x_0}{\theta_0 \sqrt{\pi}}.$$

При  $x = x_0$ , интегрируя (2) по частям, находим

$$Q(x_0, t_0) = -2C_c T_W \sqrt{\frac{a_T}{\pi}} \Big|_0^{t_0} [1 - e^{-x_0^2/[4a_T(t_0 - \tau)]}] (t_0 - \tau)^{1/2} + \\ + 2C_c T_W \sqrt{\frac{a_T}{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{x_0^2 e^{-x_0^2/[4a_T(t_0 - \tau)]}}{4a_T(t_0 - \tau)^{3/2}} d\tau.$$

Последний интеграл также сводится к интегралу вероятности. Поэтому

$$Q(x_0, t_0) = C_c T_W x_0 \{ [1 - e^{-\theta_0^2}] / (\theta_0 \sqrt{\pi}) + [1 - \operatorname{erf}(\theta_0)] \}.$$

Очевидно, что доля тепла, подведенного к слою толщиной  $x_0$  при  $\theta_0 = 1,163$ , составляет  $Q(x_0, t_0)/Q(\infty, t_0) = 1 - e^{-\theta_0^2} + \theta_0 \sqrt{\pi} [(1 - \operatorname{erf}(\theta_0))] \approx 95\%$  всего количества тепла, подведенного за время  $t_0$ . Заметим, что вследствие расходимости потока тепла в цилиндрическом случае реальная граница  $x_0$  этого слоя будет расположена еще ближе к нагреваемой поверхности, а доля тепла, подведенного к слою толщиной 1,2 мм, будет еще ближе к единице.

**Распределение термических напряжений.** Имеющиеся в литературе данные относятся в основном к тепловому удару, обусловленному охлаждением плоской поверхности или внешней поверхности цилиндра, и поэтому для исследуемого случая непригодны [8]. Попытаемся на примере настоящего эксперимента сделать соответствующие оценки.

Ввиду того что угол раствора внутреннего конуса мал, будем пренебрегать касательными напряжениями на площадках, нормальных к оси вставки, возникающими вследствие изменения давления и толщины стенки вдоль оси вставки. Поэтому аналитическую оценку термических напряжений проведем для вставок цилиндрической формы с внутренними диаметрами  $2a^* = 0,573$  и  $2a_{ex} = 2,5$  мм, т. е. диаметрами критического и выходного сечений соответственно (см. рис. 1), и наружным диаметром  $2b = 6,3$  мм.

Вследствие неоднородности температурного поля и термического расширения материала при истечении горячего газа на внутренней стенке вставки и в прилегающем слое возникают деформации и соответствующие им напряжения сжатия, а слои вблизи внешней стенки будут растянуты. Ввиду высокой склонности лейкосапфира к трещинообразованию желательно, чтобы растягивающие напряжения отсутствовали, т. е. внешнее  $p_b$  и внутреннее  $p_a$  давления удовлетворяли условию  $p_b/p_a > (k^2 + 1)/(2k^2)$  ( $k = b/a \approx 11,00$  и  $k = b/a \approx 2,52$  в критическом сечении и на выходе из вставки соответственно) [8]. Для холодной или равномерно нагретой вставки это условие конструктивно легко выполняется, поскольку из известных формул Ламе следует, что отношение  $p_b/p_a$  должно превышать отношение  $(k^2 + 1)/(2k^2)$ , находящееся в исследуемом случае в пределах  $0,50 \div 0,58$ . В данном опыте это условие заведомо выполнялось, поскольку значение  $p_b/p_a$  находилось в интервале от 1 до 33.

Для цилиндров с подогревом внутренней поверхности три главных напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях вставки, возникающих под действием радиальных, окружных и осевых термических деформаций, определяются выражениями [9. С. 479]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^T(a) &= E_0 \left[ F(b) \frac{2k^2}{k^2 - 1} - \alpha_0 T(a) \right], & \sigma_z^T(a) &= E_0 \left[ F(b) \frac{2k^2}{k^2 - 1} - \alpha_0 T(a) \right], & \sigma_r^T(a) &= 0, \\ \sigma_\theta^T(b) &= E_0 \left[ F(b) \frac{2k^2}{k^2 - 1} - \alpha_0 T(b) \right], & \sigma_z^T(b) &= E_0 \left[ F(b) \frac{2k^2}{k^2 - 1} - \alpha_0 T(b) \right], & \sigma_r^T(b) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $F(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r \rho \alpha_0 T(\rho) d\rho$ ;  $\alpha_0 = \alpha(1 + \mu)$ ;  $E_0 = E/(1 - \mu^2)$ ;  $\alpha$  — коэффициент термического расширения;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — коэффициент Пуассона материала вставки (считаем, что эти коэффициенты мало меняются в наблюдаемом интервале значений температуры);  $\rho$  — переменная интегрирования по радиусу;  $T(\rho)$  — распределение приращения температуры тела вставки к моменту времени  $t = t_0$ . Поскольку температура внешней поверхности вставки к этому моменту времени практически не изменится, полагаем скачок  $T(b) = 0$ .

На внутренней ( $r = a$ ) и внешней ( $r = b$ ) поверхностях свободного нагреваемого цилиндра реализуется плоское напряженное состояние (радиальные напряжения отсутствуют), а круговая и осевая (вдали от концов цилиндра) компоненты напряжений на этих поверхностях одинаковы.

**Расчет температурных деформаций.** Поскольку толщина прогретого слоя мала, функцию  $F(r)$ , определяющую температурную деформацию, можно приближенно найти, подставляя в качестве  $T(\rho)$  известное распределение температуры, полученное для полуголощенного пространства или теплоизолированного стержня, и заменяя аргумент  $x$  на  $\rho - a$ :

$$T_1(\rho, t_0) = \frac{T_W}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{a_T(\rho - a)}{[a_T(t_0 - \tau)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\rho - a)^2}{4a_T(t_0 - \tau)} \right] d\tau.$$

Здесь  $\rho$  — радиальная координата точки.

Следовательно, в момент прекращения действия источника тепла

$$F(r, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{r^2} \int_a^r \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{a_T}(\rho - a)}{4a_T(t_0 - \tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\rho - a)^2}{4a_T(t_0 - \tau)} \right] d\tau \right\} d\rho.$$

Введем переменные

$$\theta = \frac{\rho - a}{2[a_T(t_0 - \tau)]^{1/2}}, \quad \eta = \frac{\rho - a}{2\sqrt{a_T t_0}}, \quad \rho^2 = a^2 + 4a\sqrt{a_T t_0}\eta + 4a_T t_0 \eta^2. \quad (4)$$

Тогда

$$F(r, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{r^2} \int_a^r \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta \right) \rho d\rho = \frac{\alpha_0 T_W}{r^2} \int_a^r [1 - \operatorname{erf} \eta] d\left(\frac{\rho^2}{2}\right).$$

Интегрируя по частям, имеем

$$F(r, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{2r^2} \left[ r^2 - a^2 - r^2 \operatorname{erf} \eta(r) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta(r)} \rho^2 e^{-\eta^2} d\eta \right].$$

Подставляя в данное выражение  $\rho^2$  из (4), получаем

$$F(r, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \eta(r) - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta(r)} e^{-\eta^2} d\eta - \right. \\ \left. - \frac{4a}{r^2} \sqrt{\frac{a_T t_0}{\pi}} \int_0^{\eta(r)} d(e^{-\eta^2}) - \frac{4a_T t_0}{r^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\eta(r)} \eta d(e^{-\eta^2}) \right].$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и используя критерий Фурье, после двойной подстановки, заменяя множитель  $\eta$  из (4), находим

$$F(r, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} - 2 \operatorname{Fo} \frac{b^2}{r^2} \right) [1 - \operatorname{erf} \eta(r)] + 2 \operatorname{Fo} \frac{b^2}{r^2} + \right. \\ \left. + 4 \sqrt{\frac{\operatorname{Fo}}{\pi}} \frac{ab}{r^2} - 2 \sqrt{\frac{\operatorname{Fo}}{\pi}} \frac{b}{r^2} (r + a) e^{-\eta^2(r)} \right\}.$$

Поскольку  $\eta(a) = 0$ ,  $\operatorname{erf} \eta(a) = 0$  и  $e^{-\eta^2(a)} = 1$ . Следовательно,  $F(a, t_0) = 0$ ,

$$F(b, t_0) = \frac{\alpha_0 T_W}{2} \left\{ \left( \frac{k^2 - 1}{k^2} - 2 \operatorname{Fo} \right) [1 - \operatorname{erf} \eta(b)] + 2 \operatorname{Fo} + \right. \\ \left. + \frac{4}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{\operatorname{Fo}} - \frac{2}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{\operatorname{Fo}} (k + 1) e^{-\eta^2(b)} \right\}, \quad (5)$$

где  $\eta(b) = (k - 1)/(2k\sqrt{\operatorname{Fo}})$ . В рассматриваемом случае  $\sqrt{\operatorname{Fo}} \approx 0,164$ .

Для цилиндров с внутренним диаметром  $2a$  от 0,57 до 2,50 мм и внешним  $2b = 6,3$  мм значение  $k$  составит от 11,00 до 2,52,  $(k - 1)/(2k) \approx 0,455 \div 0,302$ ,  $(k^2 - 1)/k^2 \approx 0,992 \div 0,843$ , при этом  $\eta(b) \approx 2,766 \div 1,835$ ,  $1 - \operatorname{erf} \eta(b) \approx 10^{-4} \div 9,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\eta^2(b) = 7,651 \div 3,367$ ,  $e^{-\eta^2(b)} \approx 5,2 \cdot 10^{-4} \div 3,45 \cdot 10^{-2}$ . Слагаемые в фигурных скобках (5) соответственно составляют  $0,94 \times 10^{-4} \div 7,60 \cdot 10^{-3}$ ,  $0,054$ ,  $0,0337 \div 0,1471$  и  $-0,93 \cdot 10^{-4} \div -8,90 \cdot 10^{-3}$ . Левые границы диапазонов соответствуют критическому сечению сопловой вставки, правые — ее выходному торцу. Следовательно, в сечении горла сопла суммой первого и последнего членов, которые к тому же имеют разные знаки, можно пренебречь и считать, что

$$F(b) \approx \alpha_0 T_W (\operatorname{Fo} + 2\sqrt{\operatorname{Fo}}/(k\sqrt{\pi})).$$

На выходном торце поправка к последней формуле составит приблизительно  $-1,3 \cdot 10^{-3}$  (примерно 13 % расчетной величины). Итак, в сечении горла сопла  $F(b^*) \approx 0,044\alpha_0 T_W$ , а на выходе из него  $F(b_{ex}) \approx 0,10\alpha_0 T_W$ .

Определив  $F(b)$ , с помощью формул (75), (76) из [9. С. 480] можно вычислить средние температурные деформации  $(\alpha_0 T)_{cp}^* = 2k_*^2 F(b)^*/(k_*^2 - 1)$  и  $(\alpha_0 T)_{cp}^{ex} = 2k_{ex}^2 F(b_{ex})/(k_{ex}^2 - 1)$ . Подставляя отношение радиусов цилиндра  $k$  и значение функции  $F(b)$  в формулу для средней температурной деформации, получаем

$$\alpha_0 T_{cp}^* \approx 2,016 F(b^*) \alpha_0 T_W \approx 0,089 \alpha_0 T_W, \quad \alpha_0 T_{cp}^{ex} \approx 2,374 F(b_{ex}) \approx 0,2374 \alpha_0 T_W.$$

**Выводы.** Таким образом, в результате нагревания средняя температурная деформация вставки будет соответствовать скачку температуры, составляющему от 9 до 24 % его величины на внутренней поверхности ( $\Delta T = T_W = 1300$  К).

Величины напряжений, возникающих за счет термических деформаций на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях, оцениваются с помощью формул (3) при  $T(b) = 0$ :

$$\sigma_\theta^T(a) = \sigma_z^T(a) = E_0 \alpha_0 [T_{cp} - T_W], \quad \sigma_\theta^T(b) = \sigma_z^T(b) = E_0 \alpha_0 T_{cp}, \quad \sigma_r^T(a) = \sigma_r^T(b) = 0.$$

После подстановки изменений средней температуры и температуры внутренней поверхности данные формулы принимают простой вид. В критическом сечении вставки

$$\sigma_\theta^T(a^*) = \sigma_z^T(a^*) = E_0 \alpha_0 [T_{cp}^* - T_W] \approx -0,91 E_0 \alpha_0 T_W, \quad \sigma_\theta^T(b)^* = \sigma_z^T(b)^* \approx 0,09 E_0 \alpha_0 T_W,$$

а на выходе из нее

$$\sigma_\theta^T(a^{ex}) = \sigma_z^T(a^{ex}) = E_0 \alpha_0 [T_{cp}^{ex} - T_W] \approx -0,77 E_0 \alpha_0 T_W, \quad \sigma_\theta^T(b)_{ex} = \sigma_z^T(b)_{ex} \approx 0,23 E_0 \alpha_0 T_W.$$

Для внутренней поверхности цилиндров разность в квадратных скобках отрицательна и составляет от  $-1183$  до  $-1001^\circ$ . Для внешней поверхности эта разность практически равна изменению средней температуры (от  $117$  до  $299^\circ$ ).

Значение  $E_0 \alpha_0 = E\alpha/(1 - \mu)$  для сапфира равно 4,8 МПа/град, поэтому при воздействии только температуры напряжения будут иметь значения  $\sigma_\theta^T(a^*) = \sigma_z^T(a^*) \approx -5,68$  ГПа,  $\sigma_\theta^T(a_{ex}) = \sigma_z^T(a_{ex}) \approx -4,8$  ГПа,  $\sigma_r^T(a^*) = \sigma_r^T(a_{ex}) = 0$ ,  $\sigma_\theta^T(b)^* = \sigma_z^T(b)^* \approx 0,56$  ГПа,  $\sigma_\theta^T(b)_{ex} = \sigma_z^T(b)_{ex} \approx 1,44$  ГПа,  $\sigma_r^T(b)^* = \sigma_r^T(b)_{ex} = 0$ . Внутренняя поверхность

сжата, а внешняя растянута круговыми и осевыми (вдали от концов) напряжениями. На этих поверхностях по окончании истечения, когда прекращается режим автоподдержки, имеет место плоское напряженное состояние.

Заметим также, что по истечении времени внешнего воздействия (50 мс) значение  $(\alpha_0 T)_{\text{ср}}$  остается постоянным, так как дополнительное тепло во вставку не поступает. При выравнивании поля температур все термические напряжения стремятся к нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рычков В. Н., Топчийн М. Е., Мещеряков А. А., Пинаков В. И. Использование высоких давлений для решения задач гиперзвуковой аэродинамики // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 103–114.
2. Рычков В. Н. Возможности моделирования аэрогазодинамических процессов на импульсной адиабатической установке сверхвысокого давления: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1995.
3. Бондарь М. П., Ободовский Е. С., Рычков В. Н., Топчийн М. Е. Особенности поведения дисперсно-упрочненной меди при импульсных высокотемпературных и силовых нагружениях // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 140–143.
4. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.
5. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. М.: Энергия, 1976.
6. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: Физматгиз, 1963.
7. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
8. Мэнсон С. Температурные напряжения и малоцикловая устойчивость. М.: Машиностроение, 1974.
9. Биргер В. А. Сопротивление материалов / В. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. М.: Наука, 1986.

*Поступила в редакцию 24/VI 2010 г.,  
в окончательном варианте — 13/V 2011 г.*

---