УДК 539.374

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СЖАТИИ ОРТОТРОПНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛИТАМИ

С. Е. Александров

Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, 119526 Москва
E-mail: sergeyaleksandrov@yahoo.com

В предположении, что главными осями анизотропии материала являются лучи, исходящие из угла клина, и ортогональные к ним линии, а на поверхности плит действует закон максимального трения, рассмотрено мгновенное течение при сжатии клинообразного слоя жесткопластического ортотропного материала между вращающимися плитами. Решение сведено к квадратурам, выполнен его асимптотический анализ. Установлено, что в общем случае решение является сингулярным вблизи поверхностей трения, и приведены условия, при которых сингулярность исчезает. Показано, что вблизи поверхности трения может возникать жесткая область. Проведено сравнение поведения полученного решения вблизи поверхностей трения с поведением известных решений для других моделей жесткопластических материалов.

Ключевые слова: сингулярность, трение, аналитическое решение, пластическая анизотропия.

Для ряда моделей жесткопластических материалов решения являются сингулярными вблизи поверхностей максимального трения (в частности, вблизи таких поверхностей некоторые производные от проекций вектора скорости и компонент тензора напряжения стремятся к бесконечности). В работе [1] выполнен общий асимптотический анализ такого поведения решений для произвольного течения идеального жесткопластического материала, удовлетворяющего произвольному гладкому условию текучести, не зависящему от среднего напряжения, в [2] — для осесимметричного течения материала, удовлетворяющего условию текучести Треска, в работе [3] — для плоского течения, в [4] — для осесимметричного течения материала, удовлетворяющего модели двойного сдвига (описание модели приведено в [5]). Во всех случаях установлено, что при проскальзывании эквивалентная скорость деформации (второй инвариант тензора скорости деформации) вблизи поверхности максимального трения стремится к бесконечности обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до этой поверхности. Решения задач для различных моделей материала показывают, что данное свойство поля скорости зависит от модели материала [6–10]. Сингулярное поведение поля скорости позволяет предложить новые теории для описания изменения свойств материала в тонком слое вблизи поверхностей трения [11, 12].

В настоящей работе получено решение модельной задачи о мгновенном течении клинообразного слоя жесткопластического ортотропного материала, удовлетворяющего модели [13], между вращающимися плитами, на поверхности которых действует закон максимального трения. Решения данной задачи для различных моделей материала позволяют

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00700) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-134.2008.1).

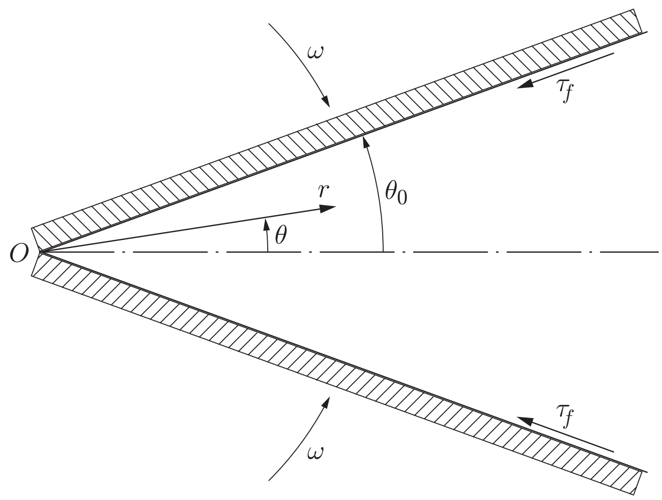

Рис. 1. Геометрия задачи

выявить ряд особенностей этих решений, в том числе их сингулярный характер [7, 8, 14]. Другие решения модельных задач в рамках теории анизотропной пластичности получены в работах [15, 16], где асимптотический анализ решений в окрестности поверхностей максимального трения не выполнялся.

Рассмотрим мгновенное плоское течение пластического ортотропного материала, сжимаемого между двумя плитами, вращающимися с угловой скоростью ω относительно точки O (рис. 1). В предположении, что сток в точке O отсутствует, введем полярную систему координат (r, θ) с началом в точке O. Поскольку полагается, что $\theta = 0$ является осью симметрии, достаточно получить решение при $\theta \geqslant 0$. В случае если главные оси анизотропии совпадают с координатными линиями полярной системы координат, условие текучести, предложенное в [13], записывается в виде

$$\frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2}{4(1-c)} + \sigma_{r\theta}^2 = T^2, \tag{1}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжения; T — предел текучести при чистом сдвиге в главных осях анизотропии; $1 > c > -\infty$ — параметр, вычисляемый по значениям пределов текучести материала в главных осях анизотропии [13] (значение $c = 0$ соответствует изотропному материалу). Закон течения, ассоциированный с условием текучести (1), имеет форму

$$\xi_{rr} = \frac{\lambda}{1-c}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \qquad \xi_{\theta\theta} = -\frac{\lambda}{1-c}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \qquad \xi_{r\theta} = 2\lambda\sigma_{r\theta}, \tag{2}$$

где ξ_{rr}, $\xi_{\theta\theta}$, $\xi_{r\theta}$ — компоненты тензора скорости деформации; $\lambda \geqslant 0$. В рассматриваемом случае уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \tag{3}$$

краевые условия на оси симметрии принимают вид

$$\sigma_{r\theta}\big|_{\theta=0} = 0; \tag{4}$$

$$u_\theta\big|_{\theta=0} = 0 \tag{5}$$

(u_θ — окружная скорость). На поверхности плиты ($\theta = \theta_0$) (см. рис. 1) заданы окружная скорость

$$u_\theta = -\omega r \tag{6}$$

и закон трения. Принимая закон максимального трения и учитывая направление удельных сил трения τ_f (см. рис. 1), получаем условие

$$\sigma_{r\theta}\big|_{\theta=\theta_0} = -T, \tag{7}$$

которое справедливо при проскальзывании; при прилипании его необходимо заменить условием

$$u_r\big|_{\theta=\theta_0} = 0, \tag{8}$$

где u_r — радиальная скорость. Условие текучести (1) выполняется в результате подстановки

$$\sigma_{rr} = \sigma + T(1-c)^{1/2}\cos 2\psi, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma - T(1-c)^{1/2}\cos 2\psi, \qquad \sigma_{r\theta} = -T\sin 2\psi. \tag{9}$$

Как и для большинства пластических решений, полученных полуобратным методом, будем полагать, что функция ψ зависит только от одной пространственной координаты, в рассматриваемом случае — от координаты θ. Тогда подстановка соотношений (9) в уравнения равновесия (3) дает

$$\begin{gathered}\frac{r}{T}\,\frac{\partial\sigma}{\partial r} - 2\cos 2\psi\Big(\frac{d\psi}{d\theta} - (1-c)^{1/2}\Big) = 0,\\ \frac{1}{T}\,\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + 2\sin 2\psi\Big((1-c)^{1/2}\,\frac{d\psi}{d\theta} - 1\Big) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Из второго уравнения (10) следует, что $\partial^2\sigma/\partial r\,\partial\theta = 0$. Тогда из первого уравнения (10) получаем

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{A}{\cos 2\psi} + (1-c)^{1/2}, \qquad \frac{\sigma}{T} = -A\ln\frac{r}{R} + \sigma_0(\psi). \tag{11}$$

Здесь постоянная R введена для удобства; $\sigma_0(\psi)$ — произвольная функция ψ. Из соотношений (9), (7) и естественного предположения $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$ следует, что $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/4$, поэтому при $\psi = \pi/4$ (или $\theta = \theta_0$) должно выполняться неравенство $d\psi/d\theta > 0$. Тогда из (11) получаем

$$A \leqslant 0. \tag{12}$$

Решение первого уравнения системы (11) можно записать в элементарных функциях, однако удобнее представить его в виде

$$\theta = \int\limits_0^{\psi} \frac{\cos 2\chi}{(1-c)^{1/2}\cos 2\chi - A}\,d\psi. \tag{13}$$

Решение (13) с учетом (9) удовлетворяет краевому условию (4).

В случае проскальзывания из выражений (7), (9) следует, что при $\theta = \theta_0$ $\psi = \pi/4$, а величина A определяется из (13):

$$\theta_0 = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\chi}{(1-c)^{1/2}\cos 2\chi - A}\,d\psi. \tag{14}$$

Учитывая неравенство (12) и полагая $A = 0$, из (14) находим максимальное значение θ_0, при котором имеет место решение в случае прилипания:

$$\theta_{\max} = (1-c)^{-1/2}\pi/4. \tag{15}$$

Подставляя величину σ из второго уравнения (11) во второе уравнение (10) и исключая $d\psi/d\theta$ с помощью первого уравнения (11), получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\psi} = 2\sin 2\psi\Big(\frac{c\cos 2\psi + A(1-c)^{1/2}}{(1-c)^{1/2}\cos 2\psi - A}\Big). \tag{16}$$

Решение уравнения (16) также можно записать в элементарных функциях, однако для удобства представим его в виде

$$\sigma_0 = 2\int\limits_0^{\psi} \sin 2\chi\Big(\frac{c\cos 2\chi + A(1-c)^{1/2}}{(1-c)^{1/2}\cos 2\chi - A}\Big)\,d\chi + A_0,$$

где A_0 — произвольная постоянная, значение которой нельзя определить из краевых условий вследствие пластической несжимаемости материала и неограниченности слоя.

С учетом (9) уравнения (2) запишем в форме

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\,\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = 0,\\ \Big(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r\,\partial\theta} - \frac{u_r}{r}\Big)(1-c)^{1/2}\operatorname{tg} 2\psi = -\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_r}{r\,\partial\theta}.\end{gathered} \tag{17}$$

Поле скорости примем в виде

$$u_r = \frac{\omega r}{2}\,\frac{dg(\psi)}{d\theta}, \qquad u_\theta = -\omega r g(\psi), \tag{18}$$

где $g(\psi)$ — произвольная функция ψ (первое уравнение системы (17) удовлетворяется при любом выборе этой функции). Краевое условие (5) преобразуем к виду

$$g\big|_{\psi=0} = 0, \tag{19}$$

а краевое условие (6) в случае проскальзывания на поверхности трения представим в виде

$$g\big|_{\psi=\pi/4} = 1. \tag{20}$$

Подставляя (18) во второе уравнение системы (17), полагая $G = dg/d\theta$ и переходя к дифференцированию по ψ с помощью (11), получаем

$$\frac{dG}{d\psi} = \frac{2(1-c)^{1/2}G\sin 2\psi}{A - (1-c)^{1/2}\cos 2\psi}. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (21), находим $G = G_0[(1-c)^{1/2}\cos 2\psi - A]$ ($G_0 = \mathrm{const}$). Используя полученное решение, определение для функции G и соотношения (11), получаем уравнение $dg/d\psi = G_0\cos 2\psi$, интегрирование которого с учетом краевого условия (19) дает

$$g = (1/2)G_0\sin 2\psi. \tag{22}$$

Учитывая краевое условие (20), находим $G_0 = 2$. Тогда из (22) получаем $g = \sin 2\psi$, а из (18), (11) — поле скорости в форме

$$u_r = \omega r[(1-c)^{1/2}\cos 2\psi - A], \qquad u_\theta = -\omega r\sin 2\psi. \tag{23}$$

Эквивалентную скорость деформации $\xi_{eq} = \sqrt{2/3}\,(\xi_{rr}^2 + \xi_{\theta\theta}^2 + 2\xi_{r\theta}^2)^{1/2}$ определим из выражений (11), (23):

$$\xi_{eq} = (2/\sqrt{3}\,)\omega[(1-c)^{1/2}\cos 2\psi - A][1 + (1-c)\operatorname{tg}^2 2\psi]^{1/2}.$$

Вблизи поверхности трения эквивалентная скорость деформации принимает вид

$$\xi_{eq} = -A(1-c)^{1/2}\omega/[\sqrt{3}\,(\pi/4-\psi)] + o[(\pi/4-\psi)^{-1}], \qquad \psi \to \pi/4, \tag{24}$$

а решение первого уравнения (11) — форму

$$\theta_0 - \theta = -A^{-1}(\pi/4-\psi)^2 + o[(\pi/4-\psi)^2], \qquad \psi \to \pi/4. \tag{25}$$

Из соотношений (24), (25) следует

$$\xi_{eq} = \sqrt{-A}\,(1-c)^{1/2}\omega/[\sqrt{3}\,(\theta_0-\theta)^{1/2}] + o[(\theta_0-\theta)^{-1/2}], \qquad \theta \to \theta_0. \tag{26}$$

Такое асимптотическое представление эквивалентной скорости деформации совпадает с соответствующим представлением, имеющим место в некоторых теориях жесткопластического тела [см., например, 1–4, 9, 10]. В частности, из (26) можно определить введенный в работе [1] коэффициент интенсивности скорости деформации

$$D = \omega[-A(1-c)r/3]^{1/2}. \tag{27}$$

Из соотношений (26) следует, что при $\theta_0 = \theta_{\max}$ (величина $\theta_{\max}$ определена в (15) при $A = 0$) сингулярность в поле скоростей исчезает. В частности, согласно выражению (27) коэффициент интенсивности скорости деформации обращается в нуль. Кроме того, из выражения для радиальной скорости (23) следует, что в этом случае выполняется условие прилипания (8).

Таким образом, поведение решения поставленной краевой задачи зависит от величины θ_0. В частности, в соответствии с выражениями (26) при $\theta_0 < \theta_{\max}$ вблизи поверхности максимального трения эквивалентная скорость деформации стремится к бесконечности и выполняется условие проскальзывания. При $\theta_0 = \theta_{\max}$ сингулярность исчезает, материал находится в пластическом состоянии и выполняется условие прилипания. При $\theta_0 > \theta_{\max}$

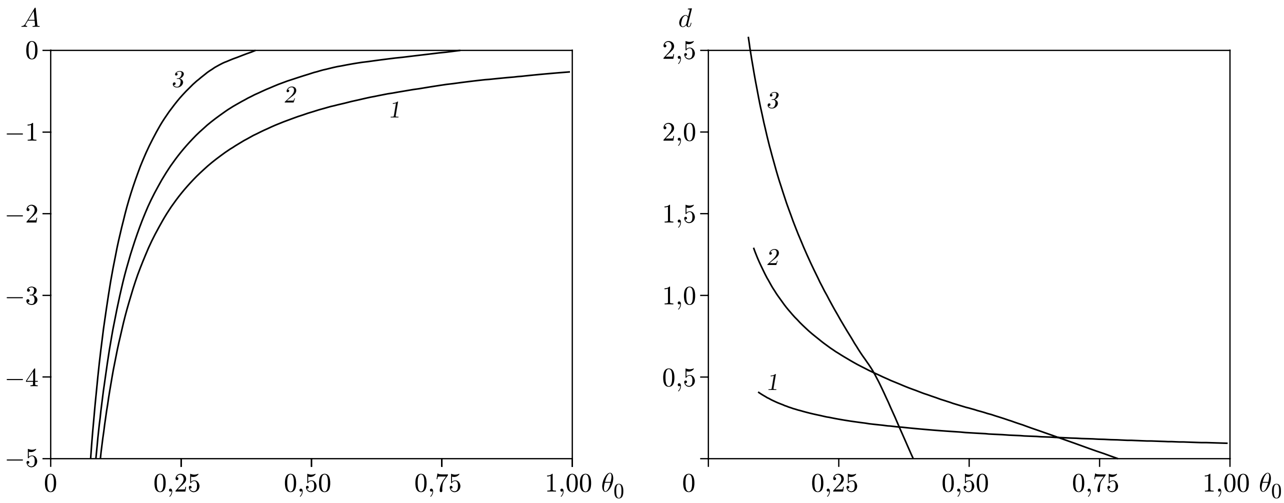

Рис. 2 Рис. 3

Рис. 2. Зависимость величины A от угла раствора плит θ_0 при различных значениях параметра c:
1 — $c = 0{,}9$, *2* — $c = 0$ (изотропный материал), *3* — $c = -3$

Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности скорости деформации d от угла раствора плит θ_0 при различных значениях параметра c (обозначения те же, что на рис. 2) выполняется условие прилипания, область $\theta_0 > \theta > \theta_{\max}$ является жесткой, а в области $\theta_{\max} > \theta > 0$ имеет место такое же решение, как в случае $\theta_0 = \theta_{\max}$.

На рис. 2 показана определенная из (14) зависимость $A(\theta_0)$ при различных значениях параметра c, характеризующего пластическую анизотропию. На рис. 3 представлена зависимость безразмерного коэффициента интенсивности скорости деформации $d = D/(\omega r^{1/2})$ от θ_0, вычисленная по формуле (27), при различных значениях параметра c. На рис. 3 видно, что пластическая анизотропия оказывает существенное влияние на величину коэффициента интенсивности скорости деформации. Это необходимо учитывать при проведении расчетов с использованием теорий [11, 12].

Таким образом, показано, что в общем случае вблизи поверхностей трения решение является сингулярным, и приведены условия, при которых сингулярность исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
2. **Александров С. Е., Ричмонд О.** Асимптотическое поведение поля скорости при осесимметричном течении материала, подчиняющегося условию Треска // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 4. С. 480–482.
3. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 4. С. 492–495.
4. **Александров С. Е.** Сингулярные решения в осесимметричных течениях среды, подчиняющейся модели двойного сдвига // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 180–186.
5. **Spencer A. J. M.** Deformation of ideal granular materials // Mechanics of solids: The Rodney Hill 60th anniversary volume / Ed. by H. G. Hopkins, M. J. Sewell. Oxford: Pergamon Press, 1982. P. 607–652.
6. **Alexandrov S.** Comparison of double-shearing and coaxial models of pressure-dependent plastic flow at frictional boundaries // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2003. V. 70, N 2. P. 212–219.
7. **Александров С. Е.** Сингулярные решения в одной модели пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 77–86.
8. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Качественные различия в решениях при использовании теорий пластичности с условием текучести Кулона — Мора // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 136–145.
9. **Alexandrov S., Harris D.** Comparison of solution behaviour for three models of pressure-dependent plasticity: a simple analytical example // Intern. J. Mech. Sci. 2006. V. 48, N 7. P. 750–762.
10. **Alexandrov S., Mishuris G.** Viscoplasticity with a saturation stress: distinguished features of the model // Arch. Appl. Mech. 2007. V. 77, N 1. P. 35–47.
11. **Lyamina E., Alexandrov S., Grabco D., Shikimaka O.** An approach to prediction of evolution of material properties in the vicinity of frictional interfaces in metal forming // Key Engng Mater. 2007. V. 345/346. P. 741–744.
12. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Нелокальный критерий разрушения вблизи поверхностей трения и его приложение к анализу процесса вытяжки и выдавливания // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2007. № 3. С. 62–68.
13. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

14. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сжатие пластического материала, чувствительного к среднему напряжению, вращающимися плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 50–60.
15. **Collins I. F., Meguid S. A.** On the influence of hardening and anisotropy on the plane-strain compression of thin metal strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 2. P. 271–278.
16. **Кийко И. А.** Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 2. С. 344–351.

Поступила в редакцию 14/X 2008 г.