

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ НЕСМЕШИВАЕМОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

М. Девакар, А. Раджи, Ш. Кумар

Национальный технологический институт им. Висвесварая, 440010 Нагпур, Индия
E-mails: m_devakar@yahoo.co.in, ankush.mth@gmail.com, kashyapagyat@gmail.com

Исследуется течение в горизонтальном канале микрополярной жидкости, находящейся между слоями ньютоновской жидкости. Система нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных решается численно с использованием конечно-разностной схемы Кранка — Николсона. На границах между слоями жидкостей используются условия непрерывности скорости и напряжений сдвига. Установлено, что со временем скорость жидкости увеличивается, течение устанавливается. С увеличением параметра микрополярности скорость микрополярной жидкости уменьшается, скорости ньютоновских жидкостей практически не меняются.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, несмешиваемые жидкости, неустановившееся течение, горизонтальный канал.

DOI: 10.15372/PMTF20180603

Введение. В последние годы ведутся интенсивные исследования динамики микрополярной жидкости, поскольку такие жидкости используются во многих технологических и биомеханических процессах. Теория микрополярных жидкостей, разработанная Эрингеном [1], описывает течение таких жидкостей, как коллоидные суспензии, кровь, жидкие кристаллы и др. Такие жидкости содержат частицы различной формы, которые могут расширяться, сжиматься и вращаться независимо от движения жидкости. Микрополярная жидкость — это жидкость, имеющая внутреннюю структуру. В модели микрополярной жидкости учитывается влияние движения каждой частицы на макроскопическое движение жидкости. В рассматриваемой модели наряду с классическим вектором скорости вводится кинематический вектор, называемый вектором микровращения и учитывающий вращение каждой частицы жидкости. Этот вектор не зависит от векторов скорости и вихря жидкости, однако наряду с ними входит в уравнение движения микрополярной жидкости. Теория микрополярной жидкости содержится в работах [2, 3]. В работе [4] исследованы тепло- и массоперенос вследствие естественной конвекции в микрополярной жидкости в вертикальном канале при несимметричном распределении температуры и концентрации. Определяющие соотношения микрополярной вязкопластической жидкости, имеющей предел текучести, построены в работе [5]. В [6] изучалось течение микрополярной вязкопла-

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального совета по высшей математике, отдела атомной энергетики, правительства Индии (код проекта 2/48(23)/2014/NBHM-R\&D II/1083 от 28.01.2015).

© Девакар М., Раджи А., Кумар Ш., 2018

стической жидкости в ячейке Хеле-Шоу. В работах [7–9] приведены результаты исследований движения микрополярной жидкости в каналах различной геометрии.

Две жидкости не смешиваются вследствие наличия больших сил взаимодействия молекул. Результаты исследований течения несмешиваемых жидкостей используются при разработке технологии очистки нефти, транспортировке сырой нефти, в химической промышленности, геофизике, физике плазмы и других областях науки и техники. Примером несмешиваемой жидкости является также артериальная кровь [10]. При течении крови по мелким сосудам вблизи их стенок находится слой плазмы, свободный от эритроцитов (слой ньютоновской жидкости), основной слой (ядро) представляет собой суспензию эритроцитов (слой неньютоновской жидкости).

Исследованию течения несмешиваемых жидкостей посвящено большое количество работ. В работе [11] исследовалось развитое свободное конвективное течение несмешиваемых полярных жидкостей в вертикальном канале. В [12] рассматривались магнитогидродинамическое течение Куэтта двух жидкостей и теплоперенос при наличии однородного наклонного магнитного поля. В [13] изучалась свободная конвекция при течении микрополярной и ньютоновской жидкостей через пористую среду в вертикальном канале.

В работе [14] исследовались краевые условия в задачах течения синовиальной вязкой микрополярной жидкости. Теоретически течение жидкости, находящейся между двумя слоями другой жидкости, можно рассматривать как течение несмешиваемых жидкостей. Единственным различием является число межслойных поверхностей, которое в первом случае равно двум. В работах [15–17] изучался теплоперенос при установившемся течении моментной жидкости, расположенной между двумя слоями вязкой жидкости.

Исследование неустановившихся течений несмешиваемых жидкостей является актуальным как с точки зрения инженерных приложений, так и с научной. В [18] изучалось течение двух несмешиваемых вязких жидкостей по проницаемому пласту. В [19] численно исследовалось течение двух несмешиваемых вязких жидкостей между двумя проницаемыми пластами. В [20] рассматривался теплоперенос в неустановившемся потоке двух неньютоновских жидкостей в горизонтальном канале. В [21] изучалась смешанная конвекция тепла в потоке двух несмешиваемых жидкостей в вертикальном канале с волнообразными и плоскими стенками.

Имеется небольшое количество работ, посвященных исследованию неустановившегося течения жидкости, заключенной между двумя слоями жидкостей. В работе [22] рассматривалось неустановившееся течение пористой среды, находящейся между двумя слоями вязких жидкостей.

В настоящей работе исследуется неустановившееся течение в горизонтальном канале несмешиваемой микрополярной жидкости, заключенной между двумя слоями ньютоновской жидкости. Связанная система дифференциальных уравнений в частных производных решается при условии непрерывности скоростей и напряжений сдвига на межслойных поверхностях. Численное решение задачи получено с использованием конечно-разностной схемы Кранка — Николсона [23].

1. Уравнения микрополярной и ньютоновской жидкостей. Уравнения течения микрополярной жидкости относительно вектора скорости \mathbf{q} и вектора микровращения \mathbf{v} для каждой частицы жидкой среды записываются в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + k \operatorname{rot} \mathbf{v} - (\mu + k) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{q} + (\lambda_1 + 2\mu + k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{q}, \\ \rho j \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{l} - 2k\mathbf{v} + k \operatorname{rot} \mathbf{q} - \gamma \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + (\alpha + \beta + \gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{f} , \mathbf{l} — вектор массовых сил и вектор массовых моментов соответственно; p — давление; плотность ρ и коэффициент вращения j полагаются постоянными. Коэффициенты вязкости λ_1 , μ , k и коэффициенты вязкого вращения α , β , γ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} k \geq 0, \quad 2\mu + k \geq 0, \quad 3\lambda_1 + 2\mu + k \geq 0, \\ \gamma \geq 0, \quad |\beta| \leq \gamma, \quad 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений t_{ij} и тензора моментных напряжений m_{ij} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{q})\delta_{ij} + (2\mu + k)d_{ij} + k\varepsilon_{ijm}(w_m - v_m), \\ m_{ij} &= \alpha(\operatorname{div} \mathbf{v})\delta_{ij} + \beta v_{i,j} + \gamma v_{j,i}. \end{aligned}$$

Здесь v_i , w_i — компоненты вектора микровращения и вектора вихря соответственно; d_{ij} — компоненты тензора скорости деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера; ε_{ijk} — символы Леви-Чевиты; запятая обозначает ковариантную производную.

В случае отсутствия микровращения ($\mathbf{v} = 0$, $\varkappa \rightarrow 0$) уравнение количества движения (1) сводится к уравнению Навье — Стокса для ньютоновской жидкости

$$\rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{q} + (\lambda_1 + 2\mu + k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

2. Математическая формулировка задачи. Рассматривается одномерное течение в горизонтальном канале микрополярной жидкости, заключенной между слоями ньютоновской жидкости. Стенками канала являются нижняя и верхняя пластины. Координата нижней пластины $y = -h_1$, верхней — $y = 2h_1$ (рис. 1).

Жидкости, заполняющие канал, являются несмешиваемыми. Ньютоновские жидкости с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1 находятся в области I ($-h_1 \leq y \leq 0$) и области III ($h_1 \leq y \leq 2h_1$), область II ($0 \leq y \leq h_1$) (см. рис. 1) заполнена микрополярной жидкостью с плотностью ρ_2 , вязкостью μ_2 и вихревой вязкостью \varkappa . Все жидкости полагаются несжимаемыми, на них не действуют массовые силы и массовые моменты, их движение происходит под действием постоянного градиента давления G в направлении координаты x . Поскольку рассматривается одномерное неустановившееся течение, компоненты векторов скоростей принимаются в виде $q_I = (u_I(y, t), 0, 0)$ ($I = 1, 2, 3$). При таком выборе скоростей уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. В области II вектор микровращения принимается в виде $\mathbf{v} = (0, 0, c(y, t))$.

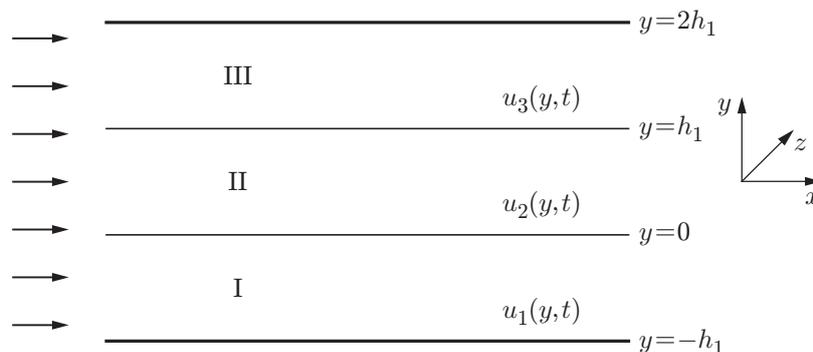


Рис. 1. Геометрия задачи:

I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

С учетом принятых допущений уравнения задачи записываются в следующем виде:
 — для ньютоновской жидкости в области I ($-h_1 \leq y \leq 0$)

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; \quad (2)$$

— для микрополярной жидкости в области II ($0 \leq y \leq h_1$)

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \varkappa \frac{\partial c}{\partial y} + (\mu + \varkappa) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}; \quad (3)$$

$$\rho_2 j \frac{\partial c}{\partial t} = -2\varkappa c - \varkappa \frac{\partial u_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}; \quad (4)$$

— для ньютоновской жидкости в области III ($h_1 \leq y \leq 2h_1$)

$$\rho_1 \frac{\partial u_3}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Для системы уравнений (2)–(5) необходимо сформулировать начальные, граничные условия и условия на межслойных поверхностях.

Изначально система находится в состоянии покоя. При $t > 0$ в направлении координаты x действует постоянный градиент давления G , вследствие чего возникает течение. На горизонтальных стенках канала ставятся условия непроскальзывания, на межслойных поверхностях — условия непрерывности скоростей жидкостей и напряжений сдвига.

Начальные условия при $t \leq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(y, 0) = 0, \quad -h_1 \leq y \leq 0, \quad u_2(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq h_1, \\ c(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq h_1, \quad u_3(y, 0) = 0, \quad h_1 \leq y \leq 2h_1, \end{aligned}$$

краевые условия при $t > 0$ — вид

$$u_1(-h_1, t) = 0, \quad u_3(2h_1, t) = 0.$$

На межслойных поверхностях при $t > 0$ условия непрерывности скоростей записываются в виде

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_2(h_1, t) = u_3(h_1, t),$$

условия непрерывности напряжений сдвига — в виде

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} &= (\mu_2 + \varkappa) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \varkappa c, & c &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y}, \\ y = h_1: \quad \mu_1 \frac{\partial u_3}{\partial y} &= (\mu_2 + \varkappa) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \varkappa c, & c &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

Вводя безразмерные переменные

$$x = h_1 \bar{x}, \quad y = h_1 \bar{y}, \quad c = \frac{U}{h_1} \bar{c}, \quad t = \frac{h_1}{U} \bar{t}, \quad p = \rho_1 U^2 \bar{p}, \quad u_I = U \bar{u}_I \quad (I = 1, 2, 3)$$

и полагая $\gamma = (\mu_1 + \varkappa/2)j$ ($j = h_1^2$) [24], уравнения (2)–(5) можно представить следующим образом:

— для ньютоновской жидкости в области I ($-1 \leq y \leq 0$)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; \quad (6)$$

— для микрополярной жидкости в области II ($0 \leq y \leq 1$)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{m_1(1+n_1)}{\text{Re } m_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{m_1 n_1}{\text{Re } m_2} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{1}{m_2} \frac{dp}{dx}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{n_1 m_1}{m_2 \text{Re}} \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2c \right]; \quad (8)$$

— для ньютоновской жидкости в области III ($1 \leq y \leq 2$)

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Здесь $\text{Re} = \rho_1 U h_1 / \mu_1$ — число Рейнольдса; $n_1 = \kappa / \mu_2$ — параметр микрополярности; $m_1 = \mu_2 / \mu_1$ — отношение вязкостей; $m_2 = \rho_2 / \rho_1$ — отношение плотностей.

Начальные условия при $t \leq 0$ записываются в виде

$$\begin{aligned} u_1(y, 0) = 0, \quad -1 \leq y \leq 0, \quad u_2(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ c(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u_3(y, 0) = 0, \quad 1 \leq y \leq 2, \end{aligned} \quad (10)$$

краевые условия при $t > 0$ — в виде

$$u_1(-1, t) = 0, \quad u_3(2, t) = 0. \quad (11)$$

На межслойных поверхностях при $t > 0$ условия непрерывности скоростей и непрерывности напряжений сдвига соответственно имеют вид

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_2(1, t) = u_3(1, t); \quad (12)$$

$$y = 0: \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = m_1(1+n_1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + m_1 n_1 c, \quad c = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y}; \quad (13)$$

$$y = 1: \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = m_1(1+n_1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + m_1 n_1 c, \quad c = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y}. \quad (14)$$

В уравнениях (6)–(14) черта над безразмерными величинами опущена.

3. Численное решение. Система дифференциальных уравнений (6)–(9) с условиями (10)–(14) в области $[-1, 2]$ решалась численно с использованием схемы Кранка — Николсона. Система разностных уравнений принимает следующий вид:

— для ньютоновской жидкости в области I ($i = 1, 2, \dots, m-1$)

$$-\lambda u_{1i-1,j+1} + (1+2\lambda)u_{1i,j+1} - \lambda u_{1i+1,j+1} = \lambda u_{1i-1,j} + (1-2\lambda)u_{1i,j} + \lambda u_{1i+1,j} + Gk; \quad (15)$$

— для микрополярной жидкости в области II ($i = m+1, m+2, \dots, 2m-1$)

$$\begin{aligned} -A u_{2i-1,j+1} + (1+2A)u_{2i,j+1} - A u_{2i+1,j+1} + B c_{i-1,j+1} - B c_{i+1,j+1} = \\ = -A u_{2i-1,j} + (1-2A)u_{2i,j} + A u_{2i+1,j} - B c_{i-1,j} + B c_{i+1,j} + D; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -E c_{i-1,j+1} + (3+2E)c_{i,j+1} - E c_{i+1,j+1} - F u_{2i-1,j+1} + F u_{2i+1,j+1} = \\ = E c_{i-1,j} - (1+2E)c_{i,j} + E c_{i+1,j} + F u_{2i-1,j} - F u_{2i+1,j}; \end{aligned} \quad (17)$$

— для ньютоновской жидкости в области III ($i = 2m+1, 2m+2, \dots, 3m-1$)

$$-\lambda u_{3i-1,j+1} + (1+2\lambda)u_{3i,j+1} - \lambda u_{3i+1,j+1} = \lambda u_{3i-1,j} + (1-2\lambda)u_{3i,j} + \lambda u_{3i+1,j} + Gk. \quad (18)$$

Условия на межфазных поверхностях имеют следующий вид:

— при $i = m$

$$-u_{1i-1,j+1} + P u_{1i,j+1} + Q u_{2i+1,j+1} - m_1 n_1 h c_{i,j+1} = 0; \quad (19)$$

$$-u_{2i,j+1} + u_{2i+1,j+1} + 2h c_{i,j+1} = 0; \quad (20)$$

— при $i = 2m$

$$Qu_{2i-1,j+1} + Pu_{2i,j+1} - u_{3i+1,j+1} + m_1 n_1 h c_{i,j+1} = 0; \quad (21)$$

$$-u_{2i-1,j+1} + u_{2i,j+1} + 2h c_{i,j+1} = 0, \quad (22)$$

где

$$\lambda = \frac{k}{2 \operatorname{Re} h^2}, \quad A = \frac{k m_1 (1 + n_1)}{2 \operatorname{Re} m_2 h^2}, \quad B = \frac{k m_1 n_1}{4 \operatorname{Re} m_2 h}, \quad D = \frac{Gk}{m_2}, \quad E = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\tau k}{2h^2},$$

$$F = \frac{\tau k}{4h}, \quad P = 1 + m_1 (1 + n_1), \quad Q = -m_1 (1 + n_1), \quad l = \frac{3}{h}, \quad m = \frac{l}{3}, \quad \tau = \frac{n_1 m_1}{\operatorname{Re} m_2}.$$

В уравнениях (15)–(22) h, k — шаги по пространственной координате и времени соответственно.

Систему разностных уравнений представим в матричной форме

$$WU^{j+1} = MU^j + T, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (23)$$

где $W = (w_{ij})|_{(4m) \times (4m)}$; $M = (m_{ij})|_{(4m) \times (4m)}$; $T = (T_j)|_{4m \times 1}$,

$$w_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{1i}, & i + 2m + 1 = j, \\ \Psi_{1i}, & i + 2m = j, \\ \delta_{1i}, & i + 2m - 1 = j, \\ \gamma_{1i}, & i + 1 = j, \\ \alpha_{1i}, & i = j, \\ \beta_{1i}, & i = j + 1, \\ \Xi_{1i}, & i = j + 2m - 1, \\ \theta_{1i}, & i = j + 2m, \\ \Omega_{1i}, & i = j + 2m + 1, \\ 0, & \text{при других } i, j, \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{2i}, & i + 2m + 1 = j, \\ \delta_{2i}, & i + 2m - 1 = j, \\ \gamma_{2i}, & i + 1 = j, \\ \alpha_{2i}, & i = j, \\ \beta_{2i}, & i = j + 1, \\ \Xi_{2i}, & i = j + 2m - 1, \\ \Omega_{2i}, & i = j + 2m + 1, \\ 0, & \text{при других } i, j, \end{cases} \quad T_j = \begin{cases} kG, & j = 1, \dots, m - 1, \\ 0, & j = m, \\ D, & j = m + 1, \dots, 2m - 1, \\ 0, & j = 2m, \\ kG, & j = 2m + 1, \dots, 3m - 1, \\ 0, & j = 2m, \dots, 4m, \end{cases}$$

$$\alpha_{1i} = \begin{cases} 1 + 2\lambda, & i = 1, \dots, m - 1, \\ P, & i = m, \\ 1 + 2A, & i = m + 1, \dots, 2m - 1, \\ P, & i = 2m, \\ 1 + 2\lambda, & i = 2m + 1, \dots, 3m - 1, \\ 2h, & i = 3m, \\ 2E + 3, & i = 3m + 1, \dots, 4m - 1, \\ 2h, & i = 4m, \end{cases} \quad \alpha_{2i} = \begin{cases} 1 - 2\lambda, & i = 1, \dots, m - 1, \\ 0, & i = m, \\ 1 - 2A, & i = m + 1, \dots, 2m - 1, \\ 0, & i = 2m, \\ 1 - 2\lambda, & i = 2m + 1, \dots, 3m - 1, \\ 0, & i = 3m, \\ -1 - 2E, & i = 3m + 1, \dots, 4m - 1, \\ 0, & i = 4m, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{1i} &= \begin{cases} -\lambda, & i = 2, \dots, m-1, \\ -1, & i = m, \\ -A, & i = m+1, \dots, 2m-1, \\ Q, & i = 2m, \\ -\lambda, & i = 2m+1, \dots, 3m-1, \\ 0, & i = 3m, \\ -E, & i = 3m+1, \dots, 4m-1, \\ 0, & i = 4m, \end{cases} & \beta_{2i} &= \begin{cases} \lambda, & i = 2, \dots, m-1, \\ 0, & i = m, \\ A, & i = m+1, \dots, 2m-1, \\ 0, & i = 2m, \\ \lambda, & i = 2m+1, \dots, 3m-1, \\ 0, & i = 3m, \\ E, & i = 3m+1, \dots, 4m-1, \\ 0, & i = 4m, \end{cases} \\
\gamma_{1i} &= \begin{cases} -\lambda, & i = 1, \dots, m-1, \\ Q, & i = m, \\ -A, & i = m+1, \dots, 2m-1, \\ -1, & i = 2m, \\ -\lambda, & i = 2m+1, \dots, 3m-1, \\ 0, & i = 3m, \\ -E, & i = 3m+1, \dots, 4m-1, \end{cases} & \gamma_{2i} &= \begin{cases} \lambda, & i = 1, \dots, m-1, \\ 0, & i = m, \\ A, & i = m+1, \dots, 2m-1, \\ 0, & i = 2m, \\ \lambda, & i = 2m+1, \dots, 3m-1, \\ 0, & i = 3m, \\ E, & i = 3m+1, \dots, 4m-1, \end{cases} \\
\Xi_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m, \\ 1, & i = m+1, \\ F, & i = m+2, \dots, 2m, \\ 0, & i = 2m+1, \end{cases} & \Xi_{2i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m+1, \\ -F, & i = m+2, \dots, 2m, \\ 0, & i = 2m+1, \end{cases} \\
\delta_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m, \\ B, & i = m+1, \dots, 2m, \\ 0, & i = 2m+1, 2m+2, \end{cases} & \delta_{2i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m, \\ -B, & i = m+1, \dots, 2m, \\ 0, & i = 2m+1, 2m+2, \end{cases} \\
\theta_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m-1, \\ -1, & i = m, \\ 0, & i = m+1, \dots, 2m-1, \\ 1, & i = 2m, \end{cases} & \Psi_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m-1, \\ -S, & i = m, \\ 0, & i = m+1, \dots, 2m, \\ S, & i = 2m+1, \end{cases} \\
\Omega_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m-1, \\ -F, & i = m, \dots, 2m-2, \\ -1, & i = 2m-1, \end{cases} & \Omega_{2i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m-1, \\ F, & i = m, \dots, 2m-2, \\ 0, & i = 2m-1, \end{cases} \\
\varepsilon_{1i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m, \\ -B, & i = m+1, \dots, 2m, \end{cases} & \varepsilon_{2i} &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m, \\ B, & i = m+1, \dots, 2m. \end{cases}
\end{aligned}$$

На каждом шаге по времени система (23) решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

Объемный расход жидкости через канал вычисляется по формуле

$$Q^* = \int_{-1}^2 u(y, t) dy = \int_{-1}^0 u_1(y, t) dy + \int_0^1 u_2(y, t) dy + \int_1^2 u_3(y, t) dy.$$

4. Результаты численного решения и их обсуждение. При численном решении использовалась сетка с размером ячейки 0,005 по пространственной координате и шагом по времени, равным 0,01. Ниже приводятся результаты численного решения при фиксированных параметрах $n_1 = 0,5$, $m_1 = 0,5$, $m_2 = 0,5$, $Re = 0,5$, $t = 0,5$ и различных значениях других параметров задачи.

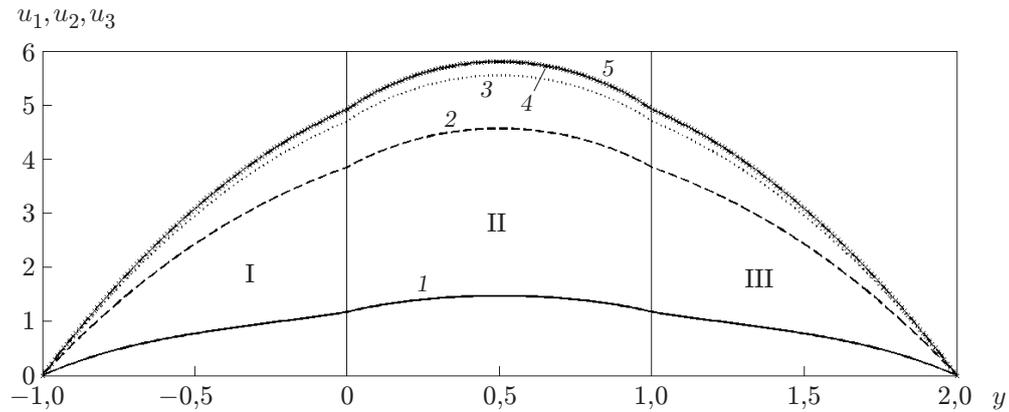


Рис. 2. Распределения скоростей жидкостей по координате y в различные моменты времени:

$1 - t = 0,1$, $2 - t = 0,5$, $3 - t = 1,0$, $4 - t = 3,0$, $5 - t = 4,0$; I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

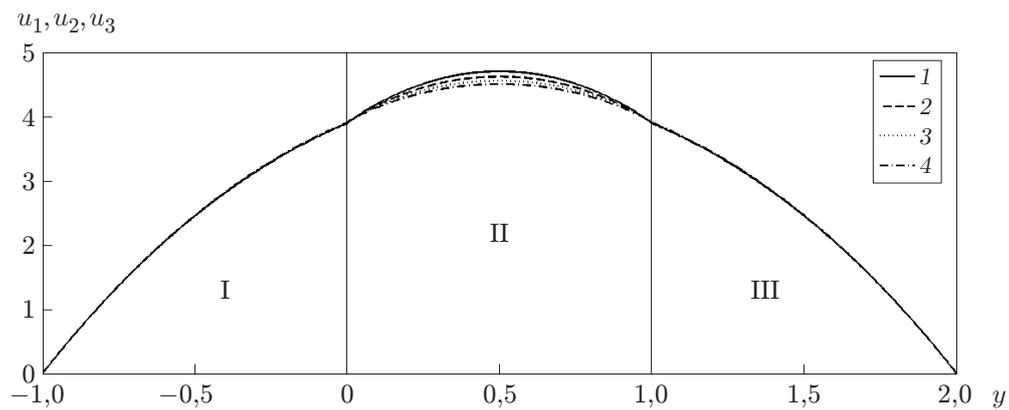


Рис. 3. Распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра n_1 :

$1 - n_1 = 0,3$, $2 - n_1 = 0,5$, $3 - n_1 = 0,7$, $4 - n_1 = 0,9$; I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

На рис. 2 приведены распределения скоростей жидкостей по координате y в различные моменты времени. С увеличением времени скорость жидкости во всех трех областях увеличивается, течение становится стационарным.

На рис. 3 показаны распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра n_1 и фиксированных значениях параметров Re , m_1 , m_2 и градиента давления G . С увеличением параметра n_1 скорость микрополярной жидкости уменьшается и практически не меняется для ньютоновских жидкостей. Незначительное изменение скорости ньютоновских жидкостей, по-видимому, обусловлено течением моментной жидкости вблизи межслойных поверхностей.

На рис. 4 представлены распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях числа Рейнольдса Re . Видно, что с увеличением числа Рейнольдса скорость жидкости существенно возрастает во всех трех областях.

На рис. 5 приведены распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра m_1 . С увеличением параметра m_1 скорость ньютоновских жидкостей увеличивается, а микрополярной жидкости уменьшается. Это обусловлено тем,

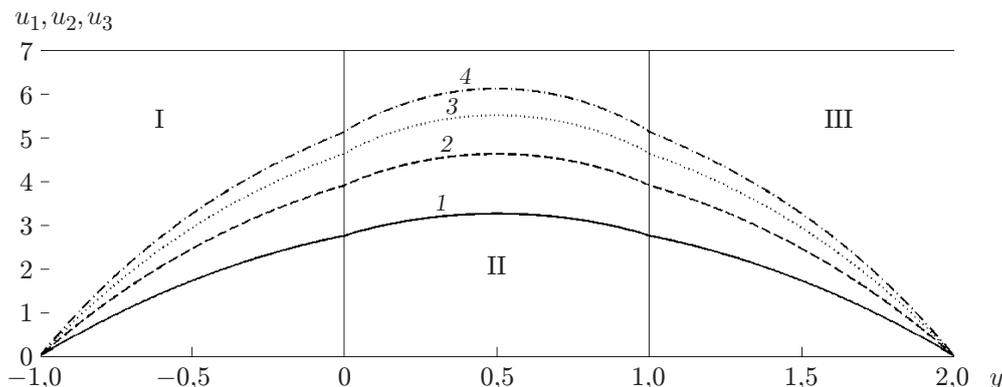


Рис. 4. Распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях числа Рейнольдса:

1 — $Re = 0,3$, 2 — $Re = 0,5$, 3 — $Re = 0,7$, 4 — $Re = 0,9$; I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

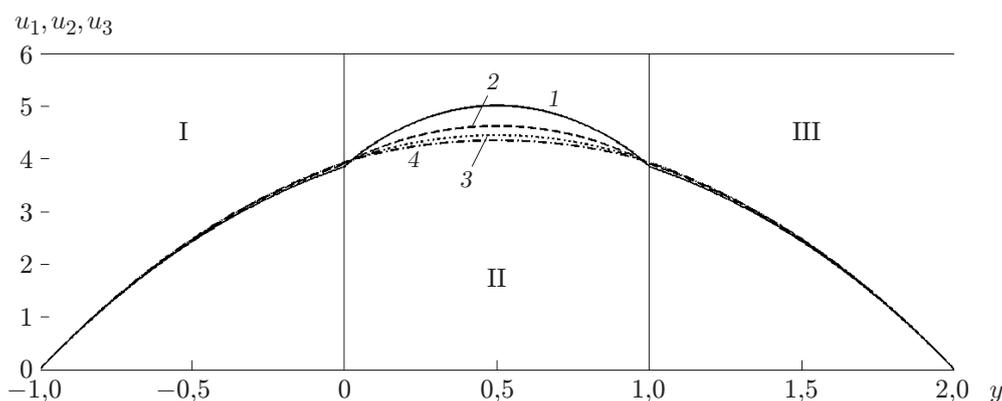


Рис. 5. Распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра m_1 :

1 — $m_1 = 0,3$, 2 — $m_1 = 0,5$, 3 — $m_1 = 0,7$, 4 — $m_1 = 0,9$; I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

что в уравнениях содержится отношение вязкостей μ_2/μ_1 . Увеличению параметра m_1 соответствует увеличение параметра μ_2 , что приводит к увеличению вязкости микрополярной жидкости и, следовательно, к уменьшению скорости ее течения.

На рис. 6 представлены распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра m_2 и фиксированных значениях параметров Re, m_1, n_1, G . С увеличением параметра m_2 скорость жидкости уменьшается во всех трех областях.

На рис. 7 приведено распределение угловой скорости микровращения по координате y в различные моменты времени. Микровращение со временем стремится к установившемуся состоянию. До момента достижения установившегося состояния угловая скорость микровращения со временем уменьшается вблизи нижней межслойной поверхности ($y = 0$) и увеличивается вблизи верхней межслойной поверхности ($y = h_1$).

На рис. 8 показано распределение угловой скорости микровращения по координате y при различных значениях параметра микрополярности n_1 . С увеличением n_1 угловая скорость микровращения увеличивается вблизи нижней межслойной поверхности ($y = 0$), уменьшается вблизи верхней межслойной поверхности ($y = 1$) и практически не меняется в центральной области течения микрополярной жидкости.

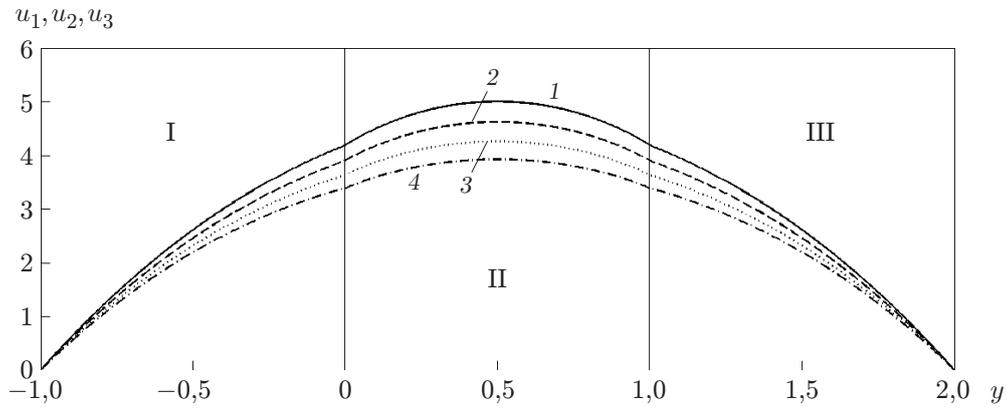


Рис. 6. Распределения скоростей жидкостей по координате y при различных значениях параметра m_2 :

1 — $m_2 = 0,3$, 2 — $m_2 = 0,5$, 3 — $m_2 = 0,7$, 4 — $m_2 = 0,9$; I, III — ньютоновские жидкости, II — микрополярная жидкость

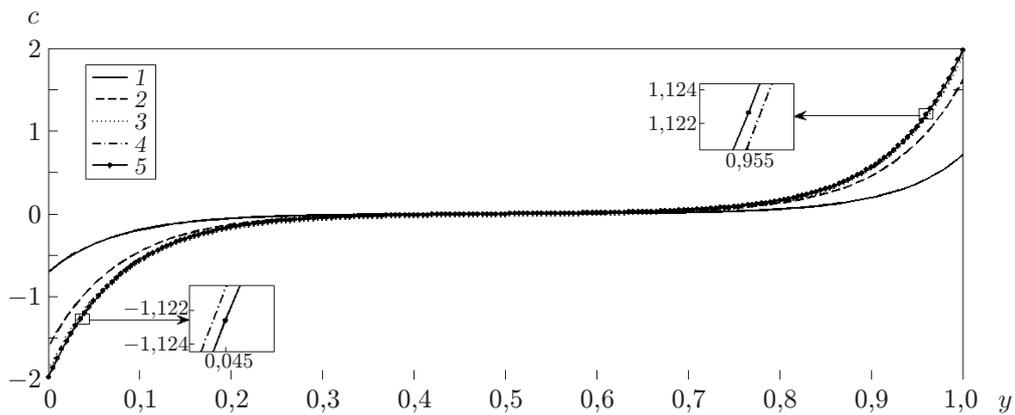


Рис. 7. Распределение угловой скорости микровращения по координате y в различные моменты времени:

1 — $t = 0,1$, 2 — $t = 0,5$, 3 — $t = 1,0$, 4 — $t = 3,0$, 5 — $t = 4,0$

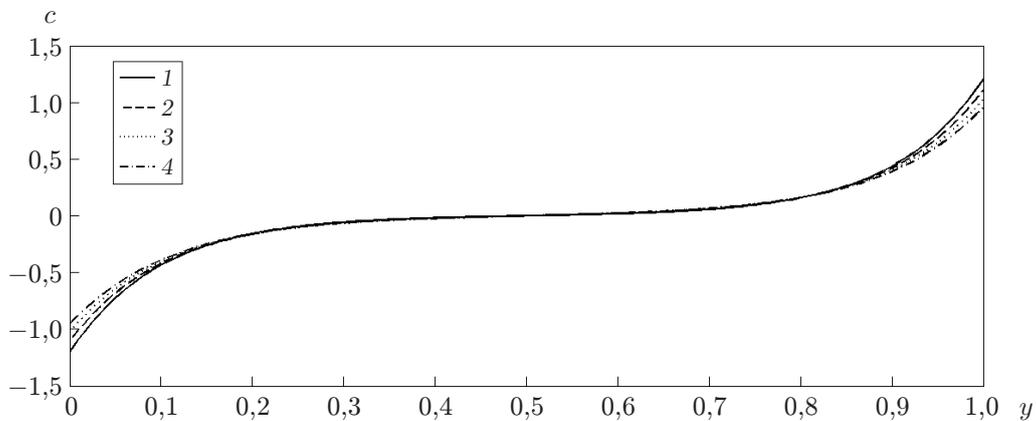


Рис. 8. Распределение угловой скорости микровращения по координате y при различных значениях параметра микрополярности n_1 :

1 — $n_1 = 0,3$, 2 — $n_1 = 0,5$, 3 — $n_1 = 0,7$, 4 — $n_1 = 0,9$

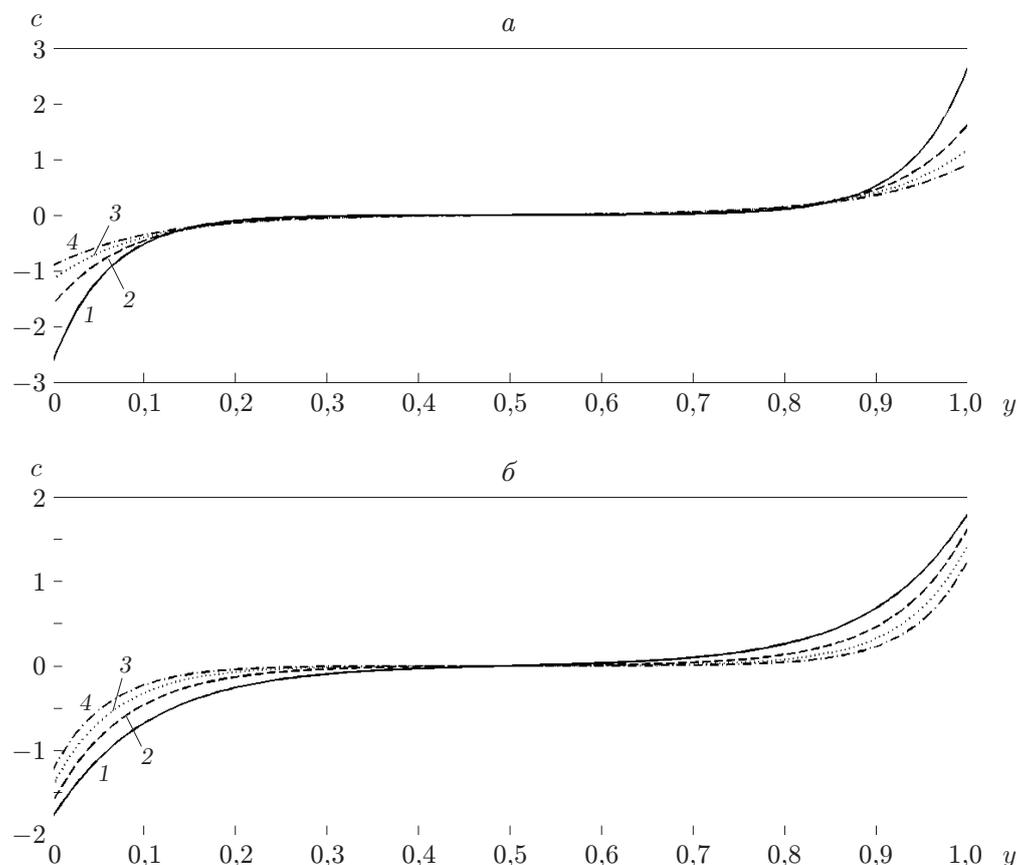


Рис. 9. Распределение угловой скорости микровращения по координате y при различных значениях параметров m_1 (а), m_2 (б):

1 — $m_1 = m_2 = 0,3$, 2 — $m_1 = m_2 = 0,5$, 3 — $m_1 = m_2 = 0,7$, 4 — $m_1 = m_2 = 0,9$

Значения объемного расхода жидкости при различных значениях числа Рейнольдса Re и параметров m_1, n_1

Re	Q^*	m_1	Q^*	n_1	Q^*
0,3	6,2775	0,3	9,1159	0,3	6,3170
0,5	8,9232	0,5	8,9232	0,5	6,2775
0,7	10,6312	0,7	8,8360	0,7	6,2463
0,9	11,8024	0,9	8,7863	0,9	6,2210

На рис. 9 приведено распределение угловой скорости микровращения по координате y при различных значениях параметров m_1, m_2 , с увеличением которых угловая скорость существенно увеличивается вблизи поверхности $y = 0$ и уменьшается вблизи поверхности $y = 1$.

Значения объемного расхода жидкости при различных значениях числа Рейнольдса Re и параметров m_1, n_1 приведены в таблице.

Заключение. В работе численно решена задача о неустановившемся течении в горизонтальном канале микрополярной жидкости, находящейся между двумя слоями ньютоновской жидкости и движущейся под действием постоянного градиента давления. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

Скорость жидкости со временем увеличивается, и по истечении достаточно большого промежутка времени течение устанавливается.

С увеличением параметра микрополярности скорость микрополярной жидкости существенно уменьшается, а скорость ньютоновских жидкостей практически не меняется.

С увеличением отношения вязкостей скорость микрополярной жидкости уменьшается. С увеличением числа Рейнольдса скорость жидкостей во всех трех областях увеличивается.

Угловая скорость микровращения, увеличиваясь со временем вблизи нижней межслойной поверхности и уменьшаясь вблизи верхней межслойной поверхности, стремится к стационарному состоянию.

С увеличением параметра микрополярности и отношения вязкостей угловая скорость микровращения увеличивается вблизи нижней межслойной поверхности, уменьшается вблизи верхней межслойной поверхности и практически не меняется в центральной части канала.

Объемный расход жидкости уменьшается с увеличением параметра микрополярности и увеличивается с увеличением числа Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eringen A. C.** Theory of micropolar fluids // *J. Math. Mech.* 1966. V. 16. P. 1–18.
2. **Stokes V. K.** Theories of fluids with microstructure — an introduction. N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
3. **Lukaszewicz G.** Micropolar fluids: Theory and applications. Basel: Birkhauser, 1999.
4. **Cheng C. Y.** Fully developed natural convection heat and mass transfer of a micropolar fluid in a vertical channel with asymmetric wall temperatures and concentrations // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2006. V. 33. P. 627–635.
5. **Shelukhin V. V., Ruzicka M.** On Cosserat — Bingham fluids // *J. Appl. Math. Mech.* 2013. V. 93. P. 57–72.
6. **Shelukhin V. V., Neverov V. V.** Flow of micropolar and viscoplastic fluids in a Hele-Shaw cell // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2014. V. 55, N 6. P. 905–916.
7. **Shelukhin V. V., Chemetov N. V.** Global solvability of the one-dimensional Cosserat — Bingham fluid equations // *J. Math. Fluid Mech.* 2015. V. 17. P. 495–511.
8. **Das K., Sarkar A.** Effect of melting on an MHD micropolar fluid flow toward a shrinking sheet with thermal radiation // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 4. P. 681–689.
9. **Shelukhin V. V., Neverov V. V.** Thermodynamics of micropolar Bingham fluids // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2016. V. 236. P. 83–90.
10. **Chaturani P., Samy R. P.** A study of non-Newtonian aspects of blood flow through stenosed arteries and its applications in arterial diseases // *Biorheol.* 1985. V. 22. P. 521–531.
11. **Prathap Kumar J., Umavathi J. C., Chamkha A. J., Pop I.** Fully-developed free-convective flow of micropolar and viscous fluids in a vertical channel // *Appl. Math. Model.* 2010. V. 34. P. 1175–1186.
12. **Nikodijevic D., Milenkovic D., Stamenkovic Z.** MHD Couette two-fluid flow and heat transfer in presence of uniform inclined magnetic field // *Heat Mass Transfer.* 2011. V. 47. P. 1525–1535.
13. **Kumar N., Gupta S.** MHD free-convective flow of micropolar and Newtonian fluids through porous medium in a vertical channel // *Meccanica.* 2012. V. 47. P. 277–291.
14. **Shelukhin V. V., Khristenko U. A.** On one slip condition for the equations of a viscous fluid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 5. P. 773–780.

15. **Umavathi J. C., Chamkha A. J., Manjula M. H., Al-Mudhaf A.** Flow and heat transfer of a couple-stress fluid sandwiched between viscous fluid layers // *Canad. J. Phys.* 2005. V. 83. P. 705–720.
16. **Umavathi J. C., Prathap Kumar J., Chamkha A. J.** Flow and heat transfer of a micropolar fluid sandwiched between viscous fluid layers // *Canad. J. Phys.* 2008. V. 86. P. 961–973.
17. **Umavathi J. C.** Flow and heat transfer of couple-stress permeable fluid sandwiched between viscous fluid layers // *Heat Transfer-Asian Res.* 2012. V. 41, N 5. P. 444–458.
18. **Sai K. S.** Unsteady flow of two immiscible viscous fluids over a naturally permeable bed // *Def. Sci. J.* 1990. V. 40, N 2. P. 183–189.
19. **Vajravelu K.** Unsteady flow of two immiscible conducting fluids between two permeable beds // *J. Math. Anal. Appl.* 1995. V. 196. P. 1105–1116.
20. **Umavathi J. C., Chamkha A. J., Mateen A., Al-Mudhaf A.** Unsteady two-fluid flow and heat transfer in a horizontal channel // *Heat Mass Transfer.* 2005. V. 42. P. 81–90.
21. **Umavathi J. C., Liu I. C., Shekar M.** Unsteady mixed convective heat transfer of two immiscible fluids confined between long vertical wavy wall and parallel flat wall // *Appl. Math. Mech.* 2012. V. 33, N 7. P. 931–950.
22. **Umavathi J. C., Liu I. C., Prathap-Kumar J., Shaikh-Meera D.** Unsteady flow and heat transfer of porous media sandwiched between viscous fluids // *Appl. Math. Mech.* 2010. V. 31, N 12. P. 1497–1516.
23. **Crank J., Nicolson P.** A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type // *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1947. V. 43, N 1. P. 50–67.
24. **Ahmadi G.** Self similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate // *Intern. J. Engng Sci.* 1976. V. 14. P. 639–646.

*Поступила в редакцию 16/VIII 2017 г.,
в окончательном варианте — 9/I 2018 г.*
