ПМТФ, № 1, 1963

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. П. Казанцев

(*Новосибирск*)

Как следует из эксперимента и астрофизических наблюдений [1-2], ширина ударной волны в разреженной плазме может быть существенно меньше длины свободного пробега частиц. Очевидно, что механизм диссипации в такой ударной волне не связан с соударениями, а обусловлен, по-видимому, возбуждением когерентных колебаний плазмы в переходном слое. При малой диссипации эти колебания носят упорядоченный характер и связаны со специфическими для неизотермической максвелловской плазмы нелинейностями в уравнениях движения. В принципе, однако, из-за неустойчивости плазмы колебания могут быть турбулентного характера. В работе [3] в качестве такого механизма неустойчивости рассматривалась анизотропия в распределении частиц по скоростям. Оценки приводят к довольно большой ширине ударной волны, порядка M/mq, где q — обратный дебаевский радиус. Наконец, феноменологически (турбулентный режим постулировался) этот вопрос обсуждался в работе [4].

В настоящей работе рассматривается возбуждение «надтепловых» флуктуаций на фронте ударной волны, связанное с пучковой неустойчивостью.

Поясним сначала физическую сторону рассматриваемого явления. Все дальнейшие рассуждения удобно проводить, как обычно, в системе координат, в которой профиль ударной волны не меняется со временем.

В области, где электрический потенциал φ заметно отличен от нуля, имеются захваченные электроны, у которых $1/2\, mv^2 < e\varphi$ и средняя макроскопическая скорость равна нулю. Пучок захваченных электронов вызывает раскачку колебаний, у которых $\omega_k/k \sim v_-$. Так как натекание плазмы происходит с малой скоростью $(v_- \ll s = \sqrt{2T/m})$, то возбуждаются только низкочастотные волны.

Приведенные ниже вычисления проведены для неизотермической плазмы $(T_i \approx 0)$ в отсутствие магнитного поля. В такой плазме возможны слабозатухающие звуковые колебания [5], фазовая скорость которых порядка $c = \sqrt{T/M}$. Натекание плазмы также происходит со скоростью $v_- \sim c$, так что условие возбуждения звуковых колебаний выполнено [6].

Так как электроны, эффективно взаимодействующие с колебаниями, несут очень мало энергии $(\sim Tm/M)$, то и диссипация энергии, связанная с переходом кинетической энергии электронов в энергию колебаний, оказывается малой. Однако учет рассеивания медленных электронов на неравновесных флуктуациях позволяет устранить неопределенность, связанную с выбором функции распределения захваченных электронов, вклад которых в формирование ударной волны весьма существен. Амплитуда ударной волны предполагается малой, т. е. $e\varphi/T \ll 1$. Уточнение границ применимости полученных результатов приводится в конце работы.

1. Звуковые колебания. Соударения для рассматриваемой задачи несущественны, поэтому кинетическое уравнение для электронов имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{e}{m}E\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \tag{1.1}$$

Для описания ионов достаточно использовать уравнение Ньютона, так как ионное давление мало

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i\frac{\partial v^i}{\partial x} = \frac{eE}{M}, \qquad \frac{\partial n^i}{\partial t} + \frac{\partial (n^i v^i)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e\left(n^i - \int dvF\right) \tag{1.2}$$

Рассмотрим малые звуковые колебания, распространяющиеся вдоль потока. Для этого представим

$$F(x, v, t) = \frac{n_-}{\sqrt{\pi}\, s}(f(x, v) + f_1(x, v, t))$$

$$v^i = c + v_1{}^i(x, t), \qquad E(x, t) = -\varphi'(x) + E_1(x, t) \qquad (1.3)$$

где f_1, $v_1{}^i$, E_1 — малые отклонения от стационарных значений.

Для возмущений вида

$$\exp i\left(\omega t - \int dxk\right)$$

полагая диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, k)$ равной нулю, получим дисперсионное уравнение (l — ширина ударной волны $kl \ll 1$)

$$\varepsilon(\omega, k) \equiv 1 - \frac{\omega_i^2}{(\omega - kc)^2} + \frac{\omega_e^2}{\sqrt{\pi}\, sk}\int \frac{dvf_v}{\omega - kv} = 0 \qquad \left(\omega_{e,\, i}^2 = \frac{4\pi c^2 n}{m, M}\right) \qquad (1.4)$$

Естественно предположить, что в случае слабой ударной волны дисперсия звуковых колебаний такая же, как и в равновесной плазме. Вклад в реальную часть (1.4) со стороны электронов определяется областью больших скоростей ($v \gg \omega / k$), где функцию распределения можно считать максвелловской. Введем обозначение

$$q^2 = -\frac{\omega_e^2}{\sqrt{\pi}\, s}\int \frac{dvf_v}{v} \approx \frac{4\pi e^2 n}{T} \qquad (1.5)$$

Для дисперсии звука получим известное выражение (с учетом доплеровского сдвига)

$$\frac{\omega_k}{kc} = 1 \pm \frac{q}{\sqrt{q^2 + k^2}} \qquad (1.6)$$

Из физических соображений ясно, что в дальнейшем достаточно учитывать только замедленные волны (нижний знак в (1.6)), так как они наиболее эффективно взаимодействуют с пучком.

Вычислим теперь инкремент нарастания (затухания) волны $\varkappa \equiv \mathrm{Im}\, k$. Считая $\varkappa \ll k$, из 1.5) находим

$$\varkappa = -\alpha(k) f_v\left(\frac{\omega_k}{k}\right), \qquad \alpha(k) = \frac{\sqrt{\pi}\, \omega_e^2 |k|\, q}{2s\,[(k^2 + q^2)^{3/2} - q^3]} \qquad (1.7)$$

Если $f = e^{-(v/s)^2}$, то $\varkappa \sim q\sqrt{m / M}$ — довольно малая величина. Однако при малых скоростях ($v \sim c$) распределение электронов может существенно отличаться от максвелловского.

2. Уровень флуктуаций в переходном слое. Напишем кинетическое уравнение с учетом рассеивания электронов на неравновесных флуктуациях [7-9]. При этом будем считать задачу одномерной. Это упрощение оправдывается тем, что волны, распространяющиеся вдоль потока, имеют максимальный инкремент нарастания. После усреднения осциллирующих величин по времени и мелкомасштабным пульсациям в пространстве кинетическое уравнение и уравнение переноса флуктуаций примут вид (2.1)

$$v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial f}{\partial v}\right), \qquad D = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_k \rho(k, x)\, \mathrm{Im}\,(\omega_k - kv)^{-1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 2\varkappa\rho, \qquad \rho(k, x) = \langle E_1{}^2(x)\rangle_k \qquad (2.2)$$

При получении гидродинамических уравнений обычно считают, что главную роль в кинетическом уравнении играет «штосс»-член. В рассматриваемой ситуации это верно только для небольшой группы резонансных (и близких резонансу электронов), для которых выполнено условие черенковского излучения $\omega_k = kv$. При $v \gg c$ коэффициент диффузии мал ($D \sim 1 / v$) и рассеивание на флуктуациях можно рассматривать как возмущение. Поэтому естественно попытаться найти приближенные решения (2.1) в области малых скоростей, где преобладает диффузия, и в области больших скоростей, где D мало, а затем их сшить. Итак предположим, что при $v \leqslant c$ в нулевом приближении уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\sum_k \rho^\circ(k, x) \operatorname{Im}(\omega_k - kv)^{-1} \frac{\partial f^\circ}{\partial v} = -A'(x) \qquad (2.3)$$

Интенсивность равновесных флуктуаций в разреженной, высокотемпературной плазме мала [1], поэтому приближенно можно положить $\rho(k, \pm\infty) \approx 0$.

Рассмотрим сначала резонансное взаимодействие электронов с флуктуациями. Для не слишком малых и больших k можно положить

$$\operatorname{Im}(\omega_k - kv)^{-1} \approx \pi\delta(\omega_k - kv)$$

Тогда в уравнениях (1.7), (2.2) и (2.3) разделяются переменные

$$\rho^\circ(k, x) = \frac{A(x)}{\pi}\alpha(k)\nu(k), \qquad \frac{\partial f^\circ}{\partial v} = -\frac{A'(x)}{2A(x)\alpha(v)} \qquad (2.4)$$

Здесь

$$\nu(k) = \left|\frac{d\omega_k}{dk} - \frac{\omega_k}{k}\right| = c\left(\frac{k}{q}\right)^2\left[1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2\right]^{-3/2}, \qquad \omega_k = kv \qquad (2.5)$$

Для определения функции $A(x)$ рассмотрим следующее приближение по $1/A$. Для поправки к плотности шумов ρ^1 имеем уравнение

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial x} - \frac{m\nu(v)\alpha(v)}{2\pi e}\frac{\varphi'(x)A'(x)}{A(x)}\int_0^v \frac{dv'}{\alpha(v')}, \qquad v = \frac{\omega_k}{k}$$

Так как флуктуации должны исчезать вне переходного слоя, то из последнего уравнения следует, что $A(x)$ пропорционально некоторой степени $\varphi'(x)$. Будем предполагать, что для слабой ударной волны имеет место зависимость $A(x) = \varphi'(x)$ const (т. е. интенсивность флуктуаций пропорциональна градиенту плотности). Положительность $\varphi'(x)$ обеспечивается тем, что ударная волна является волной уплотнения. Дальнейшие вычисления позволяют установить только порядок величины const.

При $v > c$ из (2.3), по крайней мере с логарифмической точностью, находим

$$\frac{\partial f^\circ}{\partial v} = -2\pi v\left[\sum_k \frac{1}{k^2}\alpha(k)\nu(k)\right]^{-1} \qquad (2.6)$$

Сумма в (2.6) логарифмически расходится при малых k и, очевидно, может быть «обрезана» на $k_{\min} \sim 1/l$.

3. Функция распределения нерезонансных электронов. Рассмотрим полное уравнение (2.1) при $v > c$. В этой области

$$D \approx \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{A'(x)}{2\pi v}\sum_k \frac{1}{k^2}\alpha(k)\nu(k)$$

---

[1] Напомним, что $\langle E_1^2\rangle_T/8\pi \sim nT/N$ $(N = nq^{-3})$. Здесь N — число частиц в сфере дебаевского радиуса; предполагается, что N весьма велико.

Дальше удобно будет перейти к переменной $\varepsilon = {}^1/_2 mv^2$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + e\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = a'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \tag{3.1}$$

Здесь

$$a(x) = \frac{e^2 A(x)}{2\pi}\sum_k \frac{1}{k^2}\alpha(k)\nu(k) = \frac{e^2}{m}A(x)\,|f_\varepsilon{}^0|^{-1}$$

где $f_\varepsilon{}^0$ определяется формулой (2.6). Установим граничные условия для функции $f(x, \varepsilon)$. При $\varepsilon \sim T$ и $x = -\infty$ распределение не должно существенно отличаться от максвелловского. При малых ε функция f должна совпадать с f°. Но так как f° определена уравнением (2.3) с точностью до произвольной функции от x, то достаточно потребовать $f_\varepsilon = f_\varepsilon^\circ$. Положим

$$f = f^m + \delta f, \qquad f^m = \exp\left[-\frac{\varepsilon}{T} + \frac{e\varphi}{T} + \frac{a}{T^2}\right] \tag{3.2}$$

Отметим, что

$$f_\varepsilon{}^m / f_\varepsilon{}^\circ \sim \sqrt{\frac{m}{M}}\ln ql \ll 1$$

так что с f° нужно сшивать только функцию δf.

По аналогии с обычным уравнением теплопроводности нетрудно установить, что

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left[-\frac{(\varepsilon - e\varphi)^2}{4a}\right]$$

есть фундаментальное решение уравнения (3.1). Так как a и φ входят только под знаком дифференциалов, то общее решение, обращающееся в нуль при $\varphi = 0\,(x = -\infty)$, имеет вид

$$\delta f = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{e\varphi}\frac{d\varepsilon'}{\sqrt{a(e\varphi) - a(\varepsilon')}}\exp\left[-\frac{(\varepsilon - e\varphi + \varepsilon')^2}{4\,[a(e\varphi) - a(\varepsilon')]}\right]\Phi(\varepsilon') \tag{3.3}$$

Функция $\Phi(\varepsilon)$ определяется из условия сшивки решений. При этом возможны два случая: решения нужно сшивать либо при $\varepsilon \approx {}^1/_2 mc^2$, либо при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \gg {}^1/_2 mc^2$.

Первый случай соответствует ударным волнам весьма малой амплитуды и не представляет практического интереса.

Для реализации второго случая необходимо потребовать, что

$$\frac{da(e\varphi)}{d(e\varphi)} \gg \frac{mc^2}{8} \tag{3.4}$$

Тогда условие $\delta f_\varepsilon(\varepsilon = 0) = f_\varepsilon{}^0$ дает

$$\Phi(\varepsilon) = 2\frac{da(\varepsilon)}{d\varepsilon}f_\varepsilon{}^0$$

Учитывая малость a по сравнению с $(e\varphi)^2$, равенство (3.3) можно упростить следующим образом:

$$\delta f = \begin{cases} -2\,(e^2/m)\,A(e\varphi - \varepsilon) & (e\varphi > \varepsilon) \\ 0 & (e\varphi < \varepsilon) \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение (3.3) предполагает, что $a'(x) > 0$, т. е. $x < x_0$, где x_0 — точка перегиба в профиле ударной волны. При $x > x_0$ значение $a'(x) < 0$ и решение (3.3) непригодно. Однако решение типа (3.5), связанное только с малостью a, разумеется, существует и при $x > x_0$, причем оно должно совпадать с (3.5) при $\varphi \sim \varphi(x_0)$ и всех ε. По этой причине решение (3.5) можно использовать при всех φ.

4. **Структура ударной волны**. Перейдем к нахождению профиля ударной волны. Для этого вычислим отклонение плотности электронов и ионов от среднего значения. Из (3.2) и (3.5) находим

$$\frac{\delta n^e}{n} \approx \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{2e^2}{m\sqrt{\pi T}} \int\limits_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda-\lambda'}} \frac{dA(\lambda')}{d\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{e\varphi}{T}\right) \qquad (4.1)$$

Рассеиванием ионов на флуктуациях можно пренебречь. При помощи стационарных уравнений (1.2) получаем

$$\delta n^i / n \approx \lambda c^2 / v_-^2 + {}^3/_2\, \lambda^2 \qquad (4.2)$$

Если l достаточно велико по сравнению с $1/q$, то можно положить $\delta n^e = \delta n^i$. Тогда для определения $A(\lambda)$ получаем интегральное уравнение, решение которого есть

$$\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi} e^2 A(\lambda)}{mT} = \mu\lambda^{3/2} - \frac{4}{5}\lambda^{5/2} \qquad \left(\mu = M^2 - 1 \ll 1,\ M = \frac{v_-}{c} \text{ — число Маха}\right) \qquad (4.3)$$

При $x = +\infty$ имеем $A = 0$. Отсюда $\lambda_+ = \lambda(+\infty) = {}^5/_4\,\mu$. Воспользуемся далее принятой выше зависимостью

$$A(\lambda) = \frac{2mT\beta\sqrt{\mu}}{3\sqrt{\pi}\, e^2 q}\frac{d\lambda}{dx} \quad (\beta \sim 1) \qquad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.3) принимает вид ($x_0 = 0$)

$$\sqrt{\mu}\cdot\beta \int\limits_{{}^3/_5\lambda_+}^{\lambda} \frac{\lambda^{-3/2}\, d\lambda}{\lambda_+ - \lambda} = \frac{4qx}{5} \qquad (4.5)$$

Ограничиваясь рассмотрением асимптотики λ, из (4.5) находим

$$\lambda \sim \begin{cases} 4\beta^2/\mu\,(qx)^2 & (x \to -\infty) \\ \lambda_+[1 - \exp(-xq\mu/\beta)] & (x \to +\infty) \end{cases}$$

Таким образом, эффективная ширина ударной волны $l \sim \beta/\mu q$. Передняя часть фронта оказывается размытой более сильно, чем в обычной газодинамической ударной волне.

Этот результат физически представляется весьма правдоподобным: флуктуации «на входе» должны нарастать быстрее, чем изменяется профиль ударной волны, так как интенсивность равновесных флуктуаций мала.

5. **Границы применимости**. Оценим погрешности, которые были допущены при решении. Начнем с условия применимости теории возмущений (1.3). В отношении электронов для выполнения (1.3) достаточно потребовать, чтобы кинетическая энергия резонансных электронов была велика по сравнению с энергией флуктуационного поля, т. е.

$$mc^2 n\sqrt{m/M} \gg \langle E_1^2\rangle / 4\pi$$

Как следует из (2.4) и (4.4)

$$\langle E_1^2\rangle \lesssim {}^1/_2\sqrt{m/M}\,\mu^{5/2} nT, \quad \text{или} \quad \mu^{5/2} \ll 8\pi m/M \qquad (5.1)$$

Оценим далее погрешность, связанную с пренебрежением распада фононов. Для этого вычислим дополнительное электрическое поле, обусловленное распадом. Продолжая ряд теории возмущений (1.3), найдем

$$E_2(\omega, k) = \frac{i\omega_e^2 e}{\sqrt{\pi} skm\varepsilon(\omega, k)} \int \frac{dv}{\omega - kv}\frac{\partial}{\partial v} \sum_{\omega' k'} \frac{E_1(\omega-\omega', k-k')\, E_1(\omega', k')}{\omega' - k'v}\frac{\partial f}{\partial v} \qquad (5.2)$$