

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. П. Казанцев

(Новосибирск)

Как следует из эксперимента и астрофизических наблюдений [1-2], ширина ударной волны в разреженной плазме может быть существенно меньше длины свободного пробега частиц. Очевидно, что механизм диссипации в такой ударной волне не связан с соударениями, а обусловлен, по-видимому, возбуждением когерентных колебаний плазмы в переходном слое. При малой диссипации эти колебания носят упорядоченный характер и связаны со специфическими для неизотермической максвелловской плазмы нелинейностями в уравнениях движения. В принципе, однако, из-за неустойчивости плазмы колебания могут быть турбулентного характера. В работе [3] в качестве такого механизма неустойчивости рассматривалась анизотропия в распределении частиц по скоростям. Оценки приводят к довольно большой ширине ударной волны, порядка M/mq , где q — обратный дебаевский радиус. Наконец, феноменологически (турбулентный режим постулировался) этот вопрос обсуждался в работе [4].

В настоящей работе рассматривается возбуждение «надтепловых» флуктуаций на фронте ударной волны, связанное с пучковой неустойчивостью.

Поясним сначала физическую сторону рассматриваемого явления. Все дальнейшие рассуждения удобно проводить, как обычно, в системе координат, в которой профиль ударной волны не меняется со временем.

В области, где электрический потенциал ϕ заметно отличен от нуля, имеются захваченные электроны, у которых $1/2 mv^2 < e\phi$ и средняя макроскопическая скорость равна нулю. Пучок захваченных электронов вызывает раскачку колебаний, у которых $\omega_p/k \sim v_-$. Так как натекание плазмы происходит с малой скоростью ($v_- \ll s = \sqrt{2T/m}$), то возбуждаются только низкочастотные волны.

Приведенные ниже вычисления проведены для неизотермической плазмы ($T_i \approx 0$) в отсутствие магнитного поля. В такой плазме возможны слабозатухающие звуковые колебания [5], фазовая скорость которых порядка $c = \sqrt{T/M}$. Натекание плазмы также происходит со скоростью $v_- \sim c$, так что условие возбуждения звуковых колебаний выполнено [6].

Так как электроны, эффективно взаимодействующие с колебаниями, несут очень мало энергии ($\sim Tm/M$), то и диссипация энергии, связанная с переходом кинетической энергии электронов в энергию колебаний, оказывается малой. Однако учет рассеивания медленных электронов на неравновесных флуктуациях позволяет устранить неопределенность, связанную с выбором функции распределения захваченных электронов, вклад которых в формирование ударной волны весьма существен. Амплитуда ударной волны предполагается малой, т. е. $e\phi/T \ll 1$. Уточнение границ применимости полученных результатов приводится в конце работы.

1. Звуковые колебания. Соударения для рассматриваемой задачи несущественны, поэтому кинетическое уравнение для электронов имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad (1.1)$$

Для описания ионов достаточно использовать уравнение Ньютона, так как ионное давление мало

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^i}{\partial x} &= \frac{eE}{M}, & \frac{\partial n^i}{\partial t} + \frac{\partial (n^i v^i)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= 4\pi e \left(n^i - \int dv F \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим малые звуковые колебания, распространяющиеся вдоль потока. Для этого представим

$$F(x, v, t) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi s}} (f(x, v) + f_1(x, v, t))$$

$$v^i = c + v_1^i(x, t), \quad E(x, t) = -\phi'(x) + E_1(x, t) \quad (1.3)$$

где f_1, v_1^i, E_1 — малые отклонения от стационарных значений.

Для возмущений вида

$$\exp i \left(\omega t - \int dx k \right)$$

полагая диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, k)$ равной нулю, получим дисперсионное уравнение (l — ширина ударной волны $kl \ll 1$)

$$\varepsilon(\omega, k) \equiv 1 - \frac{\omega_i^2}{(\omega - kc)^2} + \frac{\omega_e^2}{\sqrt{\pi s k}} \int \frac{dv f_v}{\omega - kv} = 0 \quad \left(\omega_{e,i}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m, M} \right) \quad (1.4)$$

Естественно предположить, что в случае слабой ударной волны дисперсия звуковых колебаний такая же, как и в равновесной плазме. Вклад в реальную часть (1.4) со стороны электронов определяется областью больших скоростей ($v \gg \omega/k$), где функцию распределения можно считать максвелловской. Введем обозначение

$$q^2 = - \frac{\omega_e^2}{\sqrt{\pi s}} \int \frac{dv f_v}{v} \approx \frac{4\pi e^2 n}{T} \quad (1.5)$$

Для дисперсии звука получим известное выражение (с учетом доплеровского сдвига)

$$\frac{\omega_k}{kc} = 1 \pm \frac{q}{\sqrt{q^2 + k^2}} \quad (1.6)$$

Из физических соображений ясно, что в дальнейшем достаточно учитывать только замедленные волны (нижний знак в (1.6)), так как они наиболее эффективно взаимодействуют с пучком.

Вычислим теперь инкремент нарастания (затухания) волны $\kappa \equiv \text{Im } k$. Считая $\kappa \ll k$, из (1.5) находим

$$\kappa = -\alpha(k) f_v \left(\frac{\omega_k}{k} \right), \quad \alpha(k) = \frac{\sqrt{\pi} \omega_e^2 |k| q}{2s [(k^2 + q^2)^{3/2} - q^3]} \quad (1.7)$$

Если $f = e^{-(v/s)^2}$, то $\kappa \sim q \sqrt{m/M}$ — довольно малая величина. Однако при малых скоростях ($v \sim c$) распределение электронов может существенно отличаться от максвелловского.

2. Уровень флуктуаций в переходном слое. Напишем кинетическое уравнение с учетом рассеивания электронов на неравновесных флуктуациях [7-9]. При этом будем считать задачу одномерной. Это упрощение оправдывается тем, что волны, распространяющиеся вдоль потока, имеют максимальный инкремент нарастания. После усреднения осциллирующих величин по времени и мелкомасштабным пульсациям в пространстве кинетическое уравнение и уравнение переноса флуктуаций примут вид (2.1)

$$v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} \phi'(x) \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad D = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \rho(k, x) \text{Im}(\omega_k - kv)^{-1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 2\kappa \rho, \quad \rho(k, x) = \langle E_1^2(x) \rangle_k \quad (2.2)$$

При получении гидродинамических уравнений обычно считают, что главную роль в кинетическом уравнении играет «штосс»-член. В рассматриваемой ситуации это верно только для небольшой группы резонансных (и близких резонансу электронов), для которых выполнено условие че-

ренковского излучения $\omega_k = kv$. При $v \gg c$ коэффициент диффузии мал ($D \sim 1/v$) и рассеивание на флуктуациях можно рассматривать как возмущение. Поэтому естественно попытаться найти приближенные решения (2.1) в области малых скоростей, где преобладает диффузия, и в области больших скоростей, где D мало, а затем их сшить. Итак предположим, что при $v \lesssim c$ в нулевом приближении уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\sum_k \rho^0(k, x) \operatorname{Im} (\omega_k - kv)^{-1} \frac{\partial f^0}{\partial v} = -A'(x) \quad (2.3)$$

Интенсивность равновесных флуктуаций в разреженной, высокотемпературной плазме мала¹, поэтому приближенно можно положить $\rho(k, \pm \infty) \approx 0$.

Рассмотрим сначала резонансное взаимодействие электронов с флуктуациями. Для не слишком малых и больших k можно положить*

$$\operatorname{Im} (\omega_k - kv)^{-1} \approx \pi \delta(\omega_k - kv)$$

Тогда в уравнениях (1.7), (2.2) и (2.3) разделяются переменные

$$\rho^0(k, x) = \frac{A(x)}{\pi} \alpha(k) v(k), \quad \frac{\partial f^0}{\partial v} = -\frac{A'(x)}{2A(x) \alpha(v)} \quad (2.4)$$

Здесь

$$v(k) = \left| \frac{d\omega_k}{dk} - \frac{\omega_k}{k} \right| = c \left(\frac{k}{q} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{k}{q} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \omega_k = kv \quad (2.5)$$

Для определения функции $A(x)$ рассмотрим следующее приближение по $1/A$. Для поправки к плотности шумов ρ^1 имеем уравнение

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial x} - \frac{mv(v) \alpha(v)}{2\pi e} \frac{\varphi'(x) A'(x)}{A(x)} \int_0^v \frac{dv'}{\alpha(v')}, \quad v = \frac{\omega_k}{k}$$

Так как флуктуации должны исчезать вне переходного слоя, то из последнего уравнения следует, что $A(x)$ пропорционально некоторой степени $\varphi'(x)$. Будем предполагать, что для слабой ударной волны имеет место зависимость $A(x) = \varphi'(x) \operatorname{const}$ (т. е. интенсивность флуктуаций пропорциональна градиенту плотности). Положительная $\varphi'(x)$ обеспечивается тем, что ударная волна является волной уплотнения. Дальнейшие вычисления позволяют установить только порядок величины const .

При $v > c$ из (2.3), по крайней мере с логарифмической точностью, находим

$$\frac{\partial f^0}{\partial v} = -2\pi v \left[\sum_k \frac{1}{k^2} \alpha(k) v(k) \right]^{-1} \quad (2.6)$$

Сумма в (2.6) логарифмически расходится при малых k и, очевидно, может быть «обрезана» на $k_{\min} \sim 1/l$.

3. Функция распределения нерезонансных электронов. Рассмотрим полное уравнение (2.1) при $v > c$. В этой области

$$D \approx \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{A'(x)}{2\pi v} \sum_k \frac{1}{k^2} \alpha(k) v(k)$$

¹ Напомним, что $\langle E_1^2 \rangle_T / 8\pi \sim nT/N$ ($N = nq^{-3}$). Здесь N — число частиц в сфере дебаевского радиуса; предполагается, что N весьма велико.

Дальше удобно будет перейти к переменной $\varepsilon = 1/2 mv^2$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = a'(x) \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \quad (3.1)$$

Здесь

$$a(x) = \frac{\varepsilon^2 A(x)}{2\pi} \sum_k \frac{1}{k^2} \alpha(k) \nu(k) = \frac{e^2}{m} A(x) |f_{\varepsilon^0}|^{-1}$$

где f_{ε^0} определяется формулой (2.6). Установим граничные условия для функции $f(x, \varepsilon)$. При $\varepsilon \sim T$ и $x = -\infty$ распределение не должно существенно отличаться от максвелловского. При малых ε функция f должна совпадать с f^0 . Но так как f^0 определена уравнением (2.3) с точностью до произвольной функции от x , то достаточно потребовать $f_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}^0$. Положим

$$f = f^m + \delta f, \quad f^m = \exp \left[-\frac{\varepsilon}{T} + \frac{e\varphi}{T} + \frac{a}{T^2} \right] \quad (3.2)$$

Отметим, что

$$f_{\varepsilon}^m / f_{\varepsilon}^0 \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \ln ql \ll 1$$

так что с f^0 нужно шивать только функцию δf .

По аналогии с обычным уравнением теплопроводности нетрудно установить, что

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - e\varphi)^2}{4a} \right]$$

есть фундаментальное решение уравнения (3.1). Так как a и φ входят только под знаком дифференциалов, то общее решение, обращающееся в нуль при $\varphi = 0$ ($x = -\infty$), имеет вид

$$\delta f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{e\varphi} \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{a(e\varphi) - a(\varepsilon')}} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - e\varphi + \varepsilon')^2}{4[a(e\varphi) - a(\varepsilon')]} \right] \Phi(\varepsilon') \quad (3.3)$$

Функция $\Phi(\varepsilon)$ определяется из условия шивки решений. При этом возможны два случая: решения нужно шивать либо при $\varepsilon \approx 1/2 mc^2$, либо при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \gg 1/2 mc^2$.

Первый случай соответствует ударным волнам весьма малой амплитуды и не представляет практического интереса.

Для реализации второго случая необходимо потребовать, что

$$\frac{da(e\varphi)}{d(e\varphi)} \gg \frac{mc^2}{8} \quad (3.4)$$

Тогда условие $\delta f_{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = f_{\varepsilon}^0$ дает

$$\Phi(\varepsilon) = 2 \frac{da(\varepsilon)}{d\varepsilon} f_{\varepsilon}^0$$

Учитывая малость a по сравнению с $(e\varphi)^2$, равенство (3.3) можно упростить следующим образом:

$$\delta f = \begin{cases} -2(e^2/m)A(e\varphi - \varepsilon) & (e\varphi > \varepsilon) \\ 0 & (e\varphi < \varepsilon) \end{cases} \quad (3.5)$$

Решение (3.3) предполагает, что $a'(x) > 0$, т. е. $x < x_0$, где x_0 — точка перегиба в профиле ударной волны. При $x > x_0$ значение $a'(x) < 0$ и решение (3.3) непригодно. Однако решение типа (3.5), связанное только с малостью a , разумеется, существует и при $x > x_0$, причем оно должно совпадать с (3.5) при $\varphi \sim \varphi(x_0)$ и всех ε . По этой причине решение (3.5) можно использовать при всех φ .

4. **Структура ударной волны.** Перейдем к нахождению профиля ударной волны. Для этого вычислим отклонение плотности электронов и ионов от среднего значения. Из (3.2) и (3.5) находим

$$\frac{\delta n^e}{n} \approx \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{2e^2}{m \sqrt{\pi T}} \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda - \lambda'}} \frac{dA(\lambda')}{d\lambda} \quad \left(\lambda = \frac{e\varphi}{T} \right) \quad (4.1)$$

Рассеиванием ионов на флуктуациях можно пренебречь. При помощи стационарных уравнений (1.2) получаем

$$\delta n^i / n \approx \lambda c^2 / v_-^2 + 3/2 \lambda^2 \quad (4.2)$$

Если l достаточно велико по сравнению с $1/q$, то можно положить $\delta n^e = \delta n^i$. Тогда для определения $A(\lambda)$ получаем интегральное уравнение, решение которого есть

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi e^2 A(\lambda)}}{mT} = \mu \lambda^{3/2} - \frac{4}{5} \lambda^{5/2} \quad \left(\mu = M^2 - 1 \ll 1, M = \frac{v_-}{c} - \text{число Маха} \right) \quad (4.3)$$

При $x = +\infty$ имеем $A = 0$. Отсюда $\lambda_+ = \lambda(+\infty) = 5/4 \mu$. Воспользуемся далее принятой выше зависимостью

$$A(\lambda) = \frac{2mT\beta \sqrt{\mu}}{3 \sqrt{\pi e^2 q}} \frac{d\lambda}{dx} \quad (\beta \sim 1) \quad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.3) принимает вид ($x_0 = 0$)

$$\sqrt{\mu} \cdot \beta \int_{5/4 \lambda_+}^\lambda \frac{\lambda^{-3/2} d\lambda}{\lambda_+ - \lambda} = \frac{4qx}{5} \quad (4.5)$$

Ограничиваясь рассмотрением асимптотики λ , из (4.5) находим

$$\lambda \sim \begin{cases} 4\beta^2 / \mu (qx)^2 & (x \rightarrow -\infty) \\ \lambda_+ [1 - \exp(-xq\mu/\beta)] & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Таким образом, эффективная ширина ударной волны $l \sim \beta / \mu q$. Передняя часть фронта оказывается размытой более сильно, чем в обычной газодинамической ударной волне.

Этот результат физически представляется весьма правдоподобным: флуктуации «на входе» должны нарастать быстрее, чем изменяется профиль ударной волны, так как интенсивность равновесных флуктуаций мала.

5. **Границы применимости.** Оценим погрешности, которые были допущены при решении. Начнем с условия применимости теории возмущений (1.3). В отношении электронов для выполнения (1.3) достаточно потребовать, чтобы кинетическая энергия резонансных электронов была велика по сравнению с энергией флуктуационного поля, т. е.

$$mc^2 n \sqrt{m/M} \gg \langle E_1^2 \rangle / 4\pi$$

Как следует из (2.4) и (4.4)

$$\langle E_1^2 \rangle \lesssim 1/2 \sqrt{m/M} \mu^{5/2} nT, \quad \text{или} \quad \mu^{5/2} \ll 8\pi m/M \quad (5.1)$$

Оценим далее погрешность, связанную с пренебрежением распада фононов. Для этого вычислим дополнительное электрическое поле, обусловленное распадом. Продолжая ряд теории возмущений (1.3), найдем

$$E_2(\omega, k) = \frac{i\omega_e^2 e}{\sqrt{\pi} skm e(\omega, k)} \int \frac{dv}{\omega - kv} \frac{\partial}{\partial v} \sum_{\omega', k'} \frac{E_1(\omega - \omega', k - k') E_1(\omega', k')}{\omega' - k'v} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (5.2)$$

