



**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ МОНОЛИТНОЙ КРЕПИ  
ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК, СООРУЖЕННЫХ ВБЛИЗИ СКЛОНА**

**С. В. Анциферов, А. С. Саммаль, А. В. Фомин**

*Тульский государственный университет, E-mail: antsser@mail.ru,  
пр. Ленина, 92, г. Тула 300021, Россия*

Разработан аналитический метод определения напряженного состояния монолитной крепи параллельных горных выработок, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности. Учтено влияние угла наклона земной поверхности и взаимного расположения горных выработок на формирование напряжений в крепи выработок.

*Напряженное состояние, выработка, крепь, склон, расчет, собственный вес пород*

**STRESS STATE OF MONOLITHIC SUPPORT OF MINE OPENINGS  
ARRANGED NEAR THE SLOPE**

**S. V. Antsiferov, A. S. Sammal, and A. V. Fomin**

*Tula State University, E-mail: antsser@mail.ru,  
pr. Lenina 92, Tula 300021, Russia*

An analytical method has been developed for determining the stress state of monolithic support of parallel mine workings constructed by a closed method near an inclined Earth's surface. The influence of the Earth's surface inclination angle and mutual location of mine openings on the formation of stresses in the support of openings has been considered.

*Stress state, opening, support, slope, calculation, dead weight of rocks*

При проектировании комплексов подземных объектов горно-добывающей промышленности, расположенных в районах со сложным рельефом земной поверхности, необходим учет влияния таких факторов, как угол наклона земной поверхности, компоновка параллельных тоннелей, конструктивные решения крепи, деформационные характеристики массива пород и материала крепи, технология проходки, последовательность сооружения выработок и др. С этой целью в настоящее время используются, как правило, результаты расчетов, полученных численными методами, например, с применением проблемно-ориентированных программных комплексов, реализующих метод конечных элементов. Как известно, они существенно зависят от размеров выбранной конечно-элементной области, граничных условий, квалификации специалиста, выполняющего расчеты, поэтому требуют, по возможности, дополнительной верификации путем сравнения с данными расчета аналитическими методами [1].

В практике проектирования подземных сооружений различного назначения нашли применение разработанные в Тульском государственном университете аналитические методы расчета конструкций подземных сооружений [2–5], в основу которых положены полученные решения соответствующих задач теории упругости. Следует отметить, что до недавнего времени не было строгого аналитического метода расчета монолитной крепи комплекса параллельных выработок, сооруженных закрытым способом вблизи горного склона, учитывающего наличие как близко расположенной земной поверхности с углом наклона к горизонту, так и соседних выработок.

Разработанный метод базируется на результатах математического моделирования напряженного состояния монолитной крепи комплекса параллельных выработок кругового поперечного сечения, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, при действии гравитационных сил. Опираясь на положения геомеханики [6] и механики подземных сооружений [1] о взаимодействии конструкций и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы, предложенная модель позволяет учесть влияние на напряженное состояние крепи и окружающего массива пород таких факторов, как угол наклона поверхности склона к горизонту; количества выработок в комплексе, их взаимное расположение и глубину заложения каждой относительно наклонной поверхности; размеры поперечных сечений выработок; толщину используемой в каждой выработке крепи и деформационные характеристики их материалов; поле начальных напряжений в массиве, обусловленных собственным весом пород. Модель позволяет учесть также реологические свойства массива грунта [8]; последовательность сооружения тоннелей, а также отставание возведения обделок от забоя в каждом из тоннелей [2].

Поскольку рассматриваются участки достаточно протяженных выработок, в математической модели взаимодействия элементов геомеханической системы используется расчетная схема плоской задачи теории упругости, представленная на рис. 1.

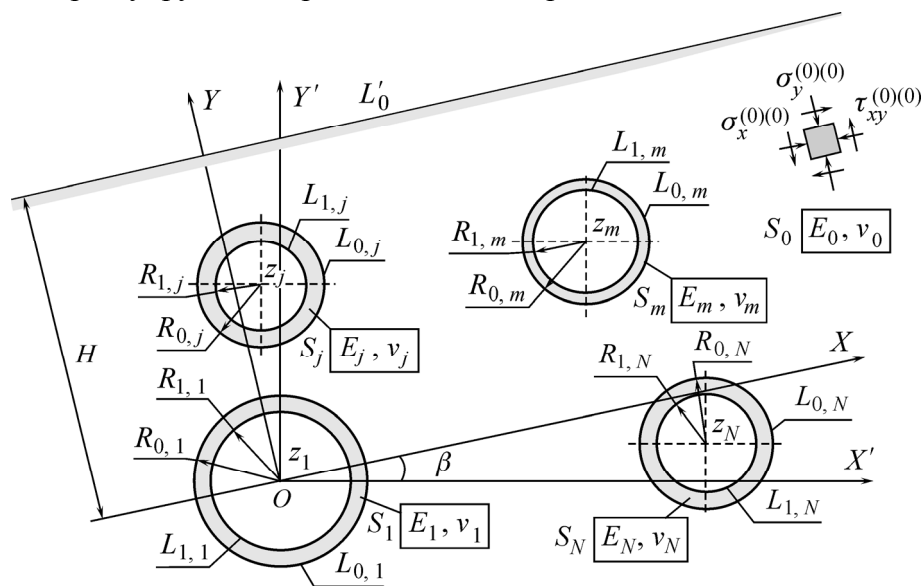


Рис. 1. Расчетная схема задачи

На схеме полубесконечная однородная весомая линейно-деформируемая среда  $S_0$  ограничена прямой  $L'_0$ , образующей угол  $\beta$  с горизонтальной осью  $OX'$  прямоугольной системы координат  $X'OY'$ , и контурами  $L_{0,m}$  произвольного числа  $N$  круговых отверстий радиусами  $R_{0,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ). Центры отверстий расположены в точках с координатами  $x'_m, y'_m$  ( $m = 1, \dots, N$ ).

Материал среды  $S_0$ , моделирующей выработки массив пород, обладает объемным весом  $\gamma$ , модулем деформации  $E_0$ , коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ , коэффициентом бокового давления  $\lambda$  в ненарушенном массиве грунта в направлении угла  $\beta$ . В системе координат  $XOY$ , оси которой образуют угол  $\beta$  с соответствующими осями системы  $X'OY'$ , гравитационные силы в весомой среде  $S_0$  моделируются напряжениями  $\sigma_x^{(0)(0)}, \sigma_y^{(0)(0)}, \tau_{xy}^{(0)(0)}$ , причем между нормальными напряжениями  $\sigma_x^{(0)(0)}, \sigma_y^{(0)(0)}$  выполняется соотношение  $\sigma_x^{(0)(0)} = \lambda \sigma_y^{(0)(0)}$ .

Отверстия подкреплены концентрическими кольцами (областями)  $S_m$  с внутренними контурами  $L_{1,m}$  радиусами  $R_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), моделирующими крепь горных выработок. Материалы колец  $S_m$  имеют деформационные характеристики  $E_m, \nu_m$  ( $m = 1, \dots, N$ ). Весом крепи

по сравнению с весом массива пород пренебрегаем. Таким образом, начальные напряжения в кольцах  $S_m$  ( $m = 1, \dots, N$ ) полагаются равными нулю. Смещения в кольцах рассматриваются только дополнительные.

Полные напряжения  $\sigma_x^{(0)*}, \sigma_y^{(0)*}, \tau_{xy}^{(0)*}$  в среде  $S_0$  представляются в виде сумм дополнительных напряжений  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$  и начальных  $\sigma_x^{(0)(0)}, \sigma_y^{(0)(0)}, \tau_{xy}^{(0)(0)}$ :

$$\sigma_x^{(0)*} = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(0)(0)}, \quad \sigma_y^{(0)*} = \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(0)(0)}, \quad \tau_{xy}^{(0)*} = \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(0)(0)}.$$

Граничные условия задачи теории упругости запишутся в виде:

— граница полуплоскости  $L'_0$  свободна от действия внешних сил

$$\sigma_y^* = 0, \quad \tau_{xy}^* = 0; \quad (2)$$

— среда  $S_0$  и кольца  $S_m$  деформируются совместно

$$\sigma_r^{(1)(m)*} = \sigma_r^{(0)(m)*}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)(m)*} = \tau_{r\theta}^{(0)(m)*}, \quad (3)$$

$$u^{(1)(m)} = u^{(0)(m)}, \quad v^{(1)(m)} = v^{(0)(m)};$$

— нагрузка на внутренних контурах  $L_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) поперечных сечений колец отсутствует

$$\sigma_r^{(1)(m)*} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)(m)*} = 0. \quad (4)$$

В условиях (2)–(4)  $\sigma_r^{(l)(m)*}, \tau_{r\theta}^{(l)(m)*}$  — полные радиальные и касательные напряжения;  $u^{(l)(m)}, v^{(l)(m)}$  — радиальные и окружные перемещения в точках контуров  $L_{l,m}$  ( $l = 0, 1, m = 1, \dots, N$ ) в полярных системах координат с полюсами, расположенными в центрах каждого из отверстий.

Решение задачи теории упругости получено с помощью метода комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили [9], связанных с напряжениями и смещениями в соответствующих областях известными соотношениями. Это потребовало сведение поставленной задачи теории упругости к соответствующей краевой задаче теории функций комплексного переменного (ТФКП), для решения которой использован математический аппарат — аналитическое продолжение комплексных потенциалов через границу полуплоскости, интегралы типа Коши и ряды Лорана [9, 10].

Граничные условия соответствующей краевой задачи ТФКП примут вид:

$$\tilde{\varphi}_0(t_0) + t_0 \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = 0 \quad \text{на } L'_0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_m(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} = \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} + f_m(t_{0,m}), \\ \mathfrak{a}_m \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_m(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} = \frac{\mu_m}{\mu_0} [\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})}] \quad \text{на } L_{0,m}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{\varphi}_m(t_{1,m}) + t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}'_m(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{1,m})} = 0 \quad \text{на } L_{1,m} \quad (m = 1, \dots, N). \quad (7)$$

В условиях (5)–(7) приняты обозначения:  $t_0 = x + iH$ ,  $t_{n,m} = z_m + R_{n,m} e^{i\theta} = z_m + R_{n,m} \sigma$  ( $n = 0, 1, m = 1, \dots, N$ ),  $\sigma = e^{i\theta}$  — аффикс точки единичной окружности;  $\mathfrak{a}_l = 3 - 4\nu_l$ ,  $\mu_l = \frac{E_l}{2(1+\nu_l)}$

( $l = 0, 1, \dots, N$ ). Граничное условие (5) отражает отсутствие внешних нагрузок на границе полуплоскости  $L'_0$ , условия (6) — непрерывность векторов полных напряжений (первое соотношение) и дополнительных смещений (второе соотношение) на контурах  $L_{0,m}$  отверстий, условия (7) — отсутствие внешних нагрузок на контурах  $L_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), подкрепляющих отверстия колец.

Решение поставленной задачи получено с использованием метода И. Г. Арамановича [10], модифицированного в работах [2–5, 11]. Особенностью является сведение решения исходной задачи о напряженном состоянии полубесконечной многосвязной области к итерационному процессу решения ряда задач о напряженном состоянии кольца, подкрепляющего одно круговое отверстие в полной плоскости, при граничных условиях, содержащих дополнительные члены в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, отвечающими за влияние соседних отверстий и наклонной границы. Решение задачи реализовано в виде компьютерной программы, позволяющей выполнять расчеты при практическом проектировании. Ниже приведены результаты расчетов монолитной бетонной крепи двух параллельных выработок, расположенных вблизи наклонной земной поверхности. Общая расчетная схема представлена на рис. 2.

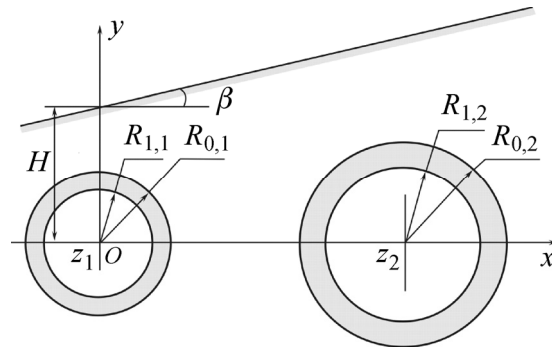


Рис. 2. Расчетная схема

На рис. 3 приведены эпюры расчетных нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих на наружном и внутреннем контурах поперечного сечения крепи обеих выработок при следующих исходных данных:  $E_0 = 1000$  МПа,  $\nu_0 = 0.35$ ,  $\gamma = 0.022$  МН/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 0.53$ ,  $H = 9$  м,  $l = 9$  м,  $R_{0,1} = R_{0,2} = 3.0$  м,  $R_{1,1} = R_{1,2} = 2.7$  м,  $E_1 = E_2 = 27000$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

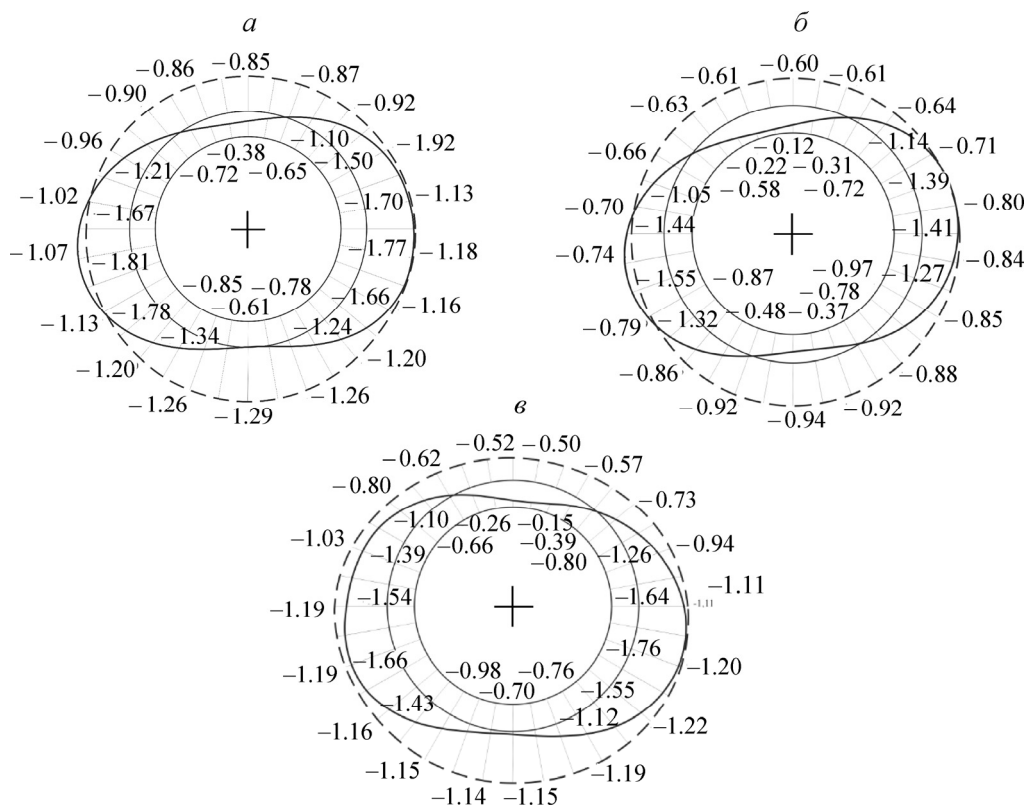


Рис. 3. Напряжения на наружном (пунктирная линия) и внутреннем (сплошная линия) контурах для крепи выработки: *a* — левой при  $\beta = 0^\circ$ ; *б* — левой при  $\beta = 30^\circ$ ; *в* — правой при  $\beta = 30^\circ$

Для иллюстрации влияния наклонной земной поверхности на напряженное состояние крепи выработок на рис. 3а приведены эпюры напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих на обоих контурах поперечного сечения крепи левой выработки при горизонтальном расположении земной поверхности (результаты справедливы для крепи правой выработки с учетом наличия осевой симметрии). Видно, что наличие наклонной земной поверхности приводит к существенному перераспределению напряжений в крепи.

На рис. 4 приведены эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  (МПа), возникающих в точках наружного и внутреннего контуров поперечного сечения крепи выработок при  $\beta = 45^\circ$ , полученные при расчете крепи двух выработок различного диаметра при исходных данных:  $H = 10$  м, центры поперечных сечений тоннелей имеют координаты  $z_1 = (0;0)$ ,  $z_2 = (12;0)$  — центры выработок расположены на одной горизонтали. Поперечные сечения крепи имеют следующие характеристики:  $R_{0,1} = 3.5$  м,  $R_{1,1} = 3.0$  м;  $R_{0,2} = 5.2$  м,  $R_{1,2} = 4.7$  м;  $E_0 = 2300$  МПа,  $\nu_0 = 0.35$ ;  $E_1 = E_2 = 36000$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ ;  $\gamma = 0.022$  МН/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 0.53$ .

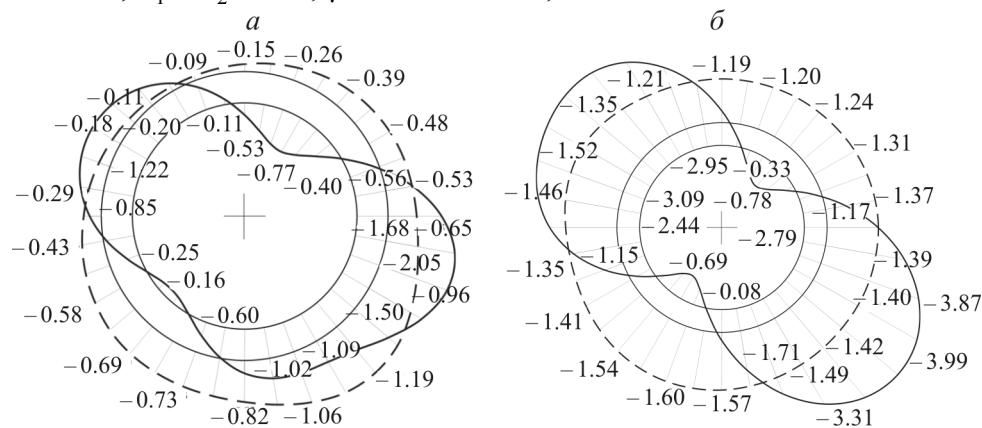


Рис. 4. Напряжения на наружном (пунктирные линии) и внутреннем (сплошные линии) контурах крепи выработок при  $\beta = 45^\circ$ : а — левой; б — правой

Результаты расчета соответствуют случаю возведения крепи непосредственно в забое выработки, что является наихудшим случаем. Они могут быть использованы для учета последовательности сооружения горных выработок по методике, приведенной в [2].

## ВЫВОДЫ

Выполнено сравнение результатов расчета с данными, полученными другими авторами для частных случаев, показавшее удовлетворительное согласование. Это свидетельствует о том, что компьютерная программа, реализующая разработанный метод расчета, позволяет выполнять многовариантные расчеты для оценки напряженного состояния крепи параллельных выработок круглого поперечного сечения, сооруженных закрытым способом в непосредственной близости от наклонной земной поверхности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Bulychev N. S.** The mechanics of underground structures in examples and tasks, Textbook for high schools, Moscow, Nedra, 1989, 270 pp. [Булычев Н. С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. — М.: Недра, 1989. — 270 с.]
2. **Antsiferov S. V.** Method for calculating multi-layer lining of parallel tunnels of a circular cross-section of shallow ground: a monograph, Tula, Publishing House of Tula State University, 2014, 298 pp. [Анциферов С. В. Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения: монография. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. — 298 с.]

3. **Fotieva N. N., Antziferov S. V., and Korneeva N. N.** Designing tunnel linings located near slopes, *Geotechnics* 99. The base of the modern technologies of constructions, Ostrava, Csech republic, 21–22 sept. 1999, pp. 88–90.
4. **Korneeva N. N.** Designing tunnel lining, constructed near the slopes, on the action of its own weight of rock, *GIAB*, 2000, no. 10, pp. 106–109. [**Корнеева Н. Н.** Расчет обделок тоннелей, сооружаемых вблизи склонов, на действие собственного веса пород // *ГИАБ*. — 2000. — № 10. — С. 106–109.]
5. **Sammal A. S. and Knyazeva S. V.** Designing multilayered lining of the tunnel, constructed near the slope on the action of rocks own weight, *Izv. TulGU, Ser. Geomechanics. Mechanics of underground structures*, Tula, 2004, Issue. 2, pp. 3–11. [**Саммаль А. С., Князева С. В.** Расчет многослойной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи склона на действие собственного веса пород // *Изв. ТулГУ. Сер. Геомеханика. Механика подземных сооружений*. — 2004. — Вып. 2. — С. 3–11.]
6. **Kasparian E. V., Kozyrev, A. A., Iofis M. A., and Makarov A. B.** *Geomechanics*, Moscow, Higher School, 2006, 503 pp. [**Каспарьян Э. В., Козырев, А. А., Иофис М. А., Макаров А. Б.** *Геомеханика: учеб. пособие*. — М.: Высш шк., 2006. — 503 с.]
7. **Sammal A. S., Antsiferov S. V., and Deev P. V.** Analytical methods for calculating underground structures: monograph. Tula, Publishing House of Tula State University, 2013, 111 pp. [**Саммаль А. С., Анциферов С. В., Деев П. В.** Аналитические методы расчета подземных сооружений: монография. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. — 111 с.]
8. **Amusin B. Z. and Linkov A. M.** On the use of the method of variable modules for solving one class of the linear hereditary creep problems, *Izv. Academy of Science USSR, Solid mechanics*, 1974, no. 6, pp. 162–166. [**Амусин Б. З., Линьков А. М.** Об использовании метода переменных модулей для решения одного класса задач линейной наследственной ползучести // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. — 1974. — № 6. — С. 162–166.]
9. **Muskhelishvili N. I.** Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moscow, *Nauka*, 1966, 707 pp. [**Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.]
10. **Aramanovich I. G.** On stress distribution in an elastic half-plane weakened by a supported circular opening, *DAN SSSR*, Moscow, 1955, vol. 104, no. 3, pp. 372–375. [**Араманович И. Г.** О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием // *ДАН СССР*. — 1955. — Т. 104. — № 3. — С. 372–375.]
11. **Antsiferov S. V., Kopylov A. B., Zaleskiy K. E., and Fomin A. V.** Determination of zones of inelastic deformations of the soils around shallow openings, *Transportnoe stroitel'stvo*, 2016, no. 12, pp. 19–21. [**Анциферов С. В., Копылов А. Б., Залесский К. Е., Фомин А. В.** Определение зон неупругих деформаций грунта вокруг выработок неглубокого заложения // *Транспортное строительство*, 2016. — № 12. — С. 19–21.]