

УДК 532.591+517.948

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

Д. Руссо, В. М. Тешуков*, А. А. Чесноков*

Университет Катании, 95125 Катания, Италия

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Для кинетической модели движения пузырьков в идеальной жидкости, предложенной Д. Руссо и П. Смерекой, построен новый класс решений. Эти решения характеризуются линейной зависимостью между интегральными инвариантами Римана. С использованием вытекающих из этой связи соотношений построение решений в специальном классе сведено к интегрированию гиперболической системы двух дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Получены точные решения в классе простых волн и дана их физическая интерпретация.

Ключевые слова: пузырьковая жидкость, кинетическое уравнение, гиперболичность, точные решения.

Введение. Для моделирования движения пузырьков газа в идеальной жидкости с учетом эффектов их коллективного взаимодействия в [1–5] развит кинетический подход. Получение уравнений движения основано на вычислении кинетической энергии жидкости, представимой в виде квадратичной формы от скоростей пузырьков [6], коэффициенты которой определяются потенциалом течения жидкости в области между пузырьками. В предположении, что все пузырьки одинаковые и являются твердыми невесомыми сферами, путем асимптотического разложения решения уравнения Лапласа по малому параметру (отношению радиуса пузырька к среднему расстоянию между ними) кинетическая энергия и гамильтониан, определяющий движение пузырьков, приближенно вычислены в работе [3]. С использованием системы гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений для координат и импульсов пузырьков и метода вывода уравнения Власова в [3] получено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию одночастичной функции распределения.

Характеристические свойства кинетической модели Руссо — Смереки [3] в случае одной пространственной переменной исследованы в работе [7], в которой сформулированы условия гиперболичности, найдены интегральные инварианты Римана и бесконечные серии законов сохранения. Точные решения кинетической модели в классе простых волн, распространяющихся по заданному стационарному однородному по пространству фону, получены в [7, 8].

В настоящей работе предложен новый метод построения решений интегродифференциальных уравнений, допускающих формулировку в инвариантах Римана. На его основе найден обширный класс решений кинетического уравнения Руссо — Смереки, описываемый гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 01-868), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00253) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-440.2003.1).

1. Математическая модель. В одномерном случае в безразмерных переменных кинетическое уравнение Руссо — Смереки имеет вид [3, 7]

$$f_t^1 + (p - j)f_x^1 + pj_x f_p^1 = 0, \quad j(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} p f^1 dp. \quad (1)$$

Здесь $f^1(t, x, p)$ — одночастичная функция распределения числа пузырьков в фазовом пространстве (x, p) координат и импульсов; t — время; j — первый момент функции распределения. Предполагается, что f^1 либо быстро убывает на бесконечности, либо финитна по переменной p .

В данной работе рассматриваются решения уравнения (1) в классе кусочно-непрерывных по переменной p функций с ограниченным носителем

$$f^1(t, x, p) = f(t, x, p)(\theta(p - p_1(t, x)) - \theta(p - p_2(t, x))), \quad (2)$$

где θ — функция Хевисайда; $p_1(t, x), p_2(t, x)$ — границы интервала по переменной p , вне которого функция распределения $f^1(t, x, p)$ тождественно равна нулю; $f(t, x, p)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая на множестве $\{(t, x, p) \mid t \geq 0, x \in \mathbb{R}, p \in (p_1, p_2)\}$ функция. Подставляя представление решения (2) в кинетическое уравнение (1), получаем интегродифференциальную систему для определения величин $f(t, x, p), p_1(t, x)$ и $p_2(t, x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (p - j) \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, p \in (p_1, p_2)), \quad j(t, x) = \int_{p_1}^{p_2} p f dp; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (p_1 - j) \frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + (p_2 - j) \frac{\partial p_2}{\partial x} - p_2 \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Цель работы состоит в развитии методов построения решений интегродифференциальных уравнений, получении и изучении нового класса решений уравнений (3), (4).

Заметим, что в частном случае, когда $f = f_0 = \text{const}$ ($x \in \mathbb{R}, p \in (p_1, p_2)$), решение системы (3), (4) сводится к интегрированию двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(p_1 + f_0 \frac{3p_1^2 - p_2^2}{2} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - f_0 p_1 p_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + f_0 p_1 p_2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left(p_2 + f_0 \frac{p_1^2 - 3p_2^2}{2} \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решения кинетического уравнения (1) с кусочно-постоянной функцией распределения (включающие и распределения типа ступеньки, которые приводятся к уравнениям (5)) исследованы в [9].

Ниже будет рассмотрен класс решений с нетривиальной функцией распределения $f(t, x, p) \neq \text{const}$, который также сводится к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений.

2. Инварианты Римана. С помощью приведенной ниже леммы докажем существование функции $R(t, x, p)$, которая, как и функция распределения $f(t, x, p)$, сохраняется вдоль траекторий

$$\frac{dx}{dt} = p - j, \quad \frac{dp}{dt} = pj_x \quad (6)$$

на решениях кинетического уравнения (3).

Лемма. Пусть $f(t, x, p)$, $p_1(t, x)$, $p_2(t, x)$, $j(t, x)$, $n(t, x)$ — произвольные дифференцируемые функции, а производные f_t , f_x , f_p удовлетворяют условию Гёльдера по переменной p . Тогда справедливо равенство

$$D\left(\frac{n-1}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f' dp'}{p' - p}\right) = \frac{n_t + ((1-n)j)_x}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{D' f' dp'}{p' - p} + \\ + \frac{(p_{2t} + (p_2 - j)p_{2x} - p_2 j_x) f_2}{p_2 - p} - \frac{(p_{1t} + (p_1 - j)p_{1x} - p_1 j_x) f_1}{p_1 - p} + \frac{\partial}{\partial x} \left(n - \int_{p_1}^{p_2} f' dp' \right). \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения функций $f = f(t, x, p)$, $f' = f(t, x, p')$, $f_i = f(t, x, p_i)$ и операторов $D = \partial_t + (p - j) \partial_x + p j_x \partial_p$, $D' = \partial_t + (p' - j) \partial_x + p' j_x \partial_{p'}$.

Доказательство проводится непосредственными вычислениями с использованием формул дифференцирования интегралов с переменными пределами и формулы дифференцирования сингулярных интегралов [10]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \xi} = \frac{\varphi(a)}{a - \xi} - \frac{\varphi(b)}{b - \xi} + \int_a^b \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{\tau - \xi}.$$

Введем обозначения

$$R(t, x, p) = \frac{n(t, x) - 1}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f(t, x, p') dp'}{p' - p}, \quad n(t, x) = \int_{p_1}^{p_2} f(t, x, p) dp. \quad (8)$$

Заметим, что следствием системы (3), (4) является равенство

$$n_t + ((1-n)j)_x = \int_{p_1}^{p_2} (f_t + (p-j)f_x + p j_x f_p) dp + \\ + (p_{2t} + (p_2 - j)p_{2x} - p_2 j_x) f_2 - (p_{1t} + (p_1 - j)p_{1x} - p_1 j_x) f_1. \quad (9)$$

Таким образом, если функции $f(t, x, p)$, $p_1(t, x)$, $p_2(t, x)$ — решение системы (3), (4), то в силу (7), (8) и (9) величина $R(t, x, p)$ удовлетворяет уравнению

$$R_t + (p - j)R_x + p j_x R_p = 0.$$

Функции f и R , сохраняющиеся вдоль траекторий (6), будем называть инвариантами Римана. Более подробно характеристические свойства кинетического уравнения Руссо — Смереки и его приведение к интегральным инвариантам Римана с использованием эйлерово-лагранжевых координат обсуждается в [7].

3. Класс решений с функционально зависимыми инвариантами Римана. Рассмотрим решения с функциональной зависимостью между величинами $f(t, x, p)$ и $R(t, x, p)$. Пусть $f = \psi(R)$, где ψ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда для определения $f(t, x, p) = \bar{f}(p_1, p_2, p)$ в силу (8) возникает нелинейное сингулярное интегральное уравнение

$$f = \psi\left(\frac{n-1}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f' dp'}{p' - p}\right). \quad (10)$$

Далее предполагаем выполнение неравенств

$$0 < p_1 \leq p \leq p_2 < \infty.$$

Если уравнение (10) решено и функция $\bar{f}(p_1, p_2, p)$ найдена, то, вычислив ее первый момент

$$j(t, x) = \bar{j}(p_1, p_2) = \int_{p_1}^{p_2} p \bar{f}(p_1, p_2, p) dp$$

и подставив его в (4), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$p_{1t} + (p_1 - \bar{j})p_{1x} - p_1(\bar{j}(p_1, p_2))_x = 0, \quad p_{2t} + (p_2 - \bar{j})p_{2x} - p_2(\bar{j}(p_1, p_2))_x = 0 \quad (11)$$

для определения неизвестных $p_1(t, x)$, $p_2(t, x)$. Покажем, что функция $f(t, x, p)$ удовлетворяет уравнению (3), если p_1 и p_2 являются решением системы (11). Применяя дифференциальный оператор $D = \partial_t + (p - j)\partial_x + pj_x\partial_p$ к обеим частям равенства (10), получим

$$Df = \psi'_R D \left(\frac{n-1}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f' dp'}{p' - p} \right).$$

Поскольку p_1, p_2 удовлетворяют уравнениям (11), с помощью (7), (9) последнее соотношение приводится к однородному сингулярному интегральному уравнению

$$\varphi - \psi'_R \int_{p_1}^{p_2} \frac{\varphi' dp'}{p' - p} = 0, \quad (12)$$

где $\varphi = pDf$; $D' = \partial_t + (p' - j)\partial_x + p'j_x\partial_{p'}$; $\varphi' = p'D'f'$. Уравнение (3) выполняется, если (12) имеет только тривиальное решение $\varphi = pDf = 0$. Условия единственности решения уравнения (12) сформулированы в [11]. Проверкой этих условий завершается построение специального класса решений кинетической модели Руссо — Смереки, описываемого системой (11), с функционально зависимыми инвариантами Римана.

4. Решения с линейно зависимыми инвариантами Римана. Получим класс решений интегродифференциальной системы (3), (4) в случае линейной зависимости между инвариантами f и R . Пусть

$$f = \psi(R) = a(R - b), \quad (13)$$

где a, b — постоянные. Без ограничения общности полагаем $a^{-1} = -\pi \operatorname{ctg} \mu\pi$ ($0 < \mu < 1$, $\mu \neq 1/2$). Тогда для определения функции f возникает линейное сингулярное интегральное уравнение

$$f\pi \operatorname{ctg} \mu\pi + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f' dp'}{p' - p} = \frac{1-n}{p} + b. \quad (14)$$

Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [11] уравнение (14) однозначно разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера во внутренних точках интервала (p_0, p_1) , ограниченных в одном из концов этого интервала и неограниченных в другом.

Применяя развитые в [11] методы и используя табличные формулы для сингулярных интегралов (см. [12])

$$\int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{p' - p_1}{p_2 - p'} \right)^\mu \frac{dp'}{p' - p} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} - \pi \operatorname{ctg} \mu\pi \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p} \right)^\mu,$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p'} \left(\frac{p' - p_1}{p_2 - p'} \right)^\mu \frac{dp'}{p' - p} = \frac{\pi}{\sin \mu \pi} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\mu \frac{1}{p} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \mu \pi}{p} \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p} \right)^\mu,$$

найдем решение уравнения (14) в явном виде

$$f = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \left(\frac{1}{p} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\mu (1 - n) + b \right) \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p} \right)^\mu \quad (15)$$

(выбран класс решений, ограниченных в точке $p = p_1$ и неограниченных в точке $p = p_2$).

Интегрированием (15) по p получаем выражение для концентрации пузырьков

$$n(t, x) = \bar{n}(p_1, p_2) = 1 - (p_1/p_2)^\mu (1 - \mu b(p_2 - p_1)). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем итоговое выражение для функции распределения в специальном классе решений, характеризуемом линейной зависимостью (13) между инвариантами Римана f и R :

$$f = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \left(\frac{1 - \mu b(p_2 - p_1)}{p} + b \right) \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p} \right)^\mu. \quad (17)$$

С использованием найденной функции распределения f вычисляем ее первый момент $j(t, x)$

$$j = \bar{j}(p_1, p_2) = \mu(p_2 - p_1)(1 + (1 + \mu)bp_1/2 + (1 - \mu)bp_2/2) \quad (18)$$

и сводим решение интегродифференциальной системы (3), (4) в специальном классе к интегрированию двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left((1 + \mu + \mu b p_1)p_1 - \mu(p_2 - p_1) \left(1 + b \frac{p_1 + p_2}{2} + \mu b \frac{3p_1 - p_2}{2} \right) \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - \\ - \mu p_1 \left(1 - \mu b(p_2 - p_1) + b p_2 \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \mu p_2 \left(1 - \mu b(p_2 - p_1) + b p_1 \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} + \\ + \left((1 - \mu - \mu b p_2)p_2 - \mu(p_2 - p_1) \left(1 + b \frac{p_1 + p_2}{2} + \mu b \frac{p_1 - 3p_2}{2} \right) \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Скорости распространения характеристик $dx/dt = k = k_{1,2}$ системы (19) находятся из квадратного уравнения

$$(k + j)^2 - (1 - \mu b(p_2 - p_1))((1 + \mu)p_1 + (1 - \mu)p_2)(k + j) + (1 - \mu b(p_2 - p_1))p_1 p_2 = 0 \quad (20)$$

(величина j задана формулой (18)). Уравнения (19) являются гиперболическими при выполнении неравенства

$$((1 + \mu)p_1 + (1 - \mu)p_2)^2 > 4p_1 p_2 / (1 - \mu b(p_2 - p_1)). \quad (21)$$

Требования неотрицательности f и ограничение на значения концентрации пузырьков $n < 1$, соответствующие применимости кинетической модели (1) (см. [3, 7]), приводят к неравенству

$$(\theta(b) - 1)bp_2 < 1 - \mu b(p_2 - p_1). \quad (22)$$

На рис. 1 заштрихованы области, в которых выполнены неравенства (21) и (22) при $\mu = 0,4$, $b = \mp 0,3$. В случае отрицательных значений b (рис. 1, *a*) заштрихованная область ограничена линией 1 (следствие неравенства (21)), прямой $p_1 = 0$ и прямой 2 (соответствует ограничению (22)). Условие неотрицательности функции распределения (22)

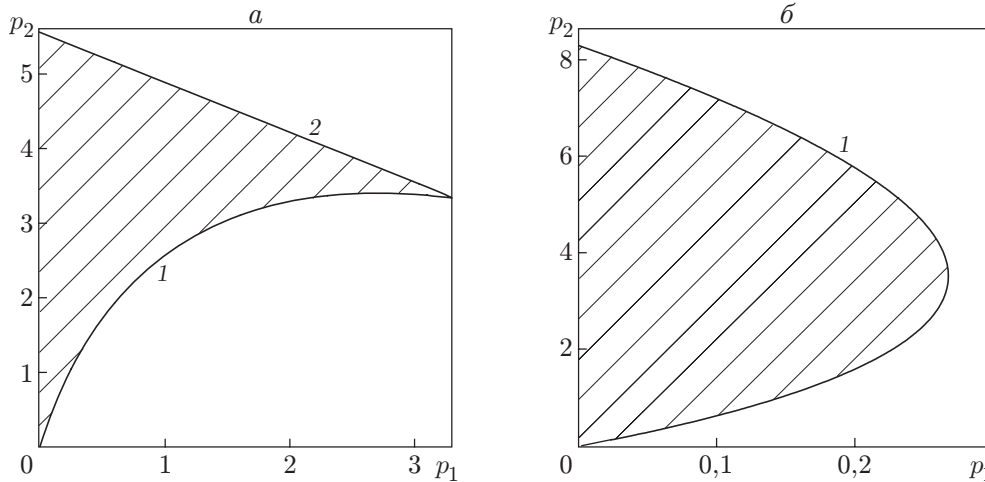


Рис. 1

выполнено автоматически для $b \geq 0$. На рис. 1,б заштрихована область, в которой выполняются условия гиперболичности для положительного значения параметра b . Область гиперболичности ограничена прямой $p_1 = 0$ и линией 1, в точках которой (21) обращается в равенство.

Мы показали, что специальный класс решений описывается системой дифференциальных уравнений (19), зависящей от параметров μ и b . Система существенно упрощается в случае $b = 0$. При этом уравнения (19) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + ((1 + 2\mu)p_1 - \mu p_2) \frac{\partial p_1}{\partial x} - \mu p_1 \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \mu p_2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + (\mu p_1 + (1 - 2\mu)p_2) \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Скорости распространения характеристик уравнений (23) задаются формулами

$$k_{1,2} = \frac{1 + 3\mu}{2} p_1 + \frac{1 - 3\mu}{2} p_2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu)^2 p_1^2 + (1 - \mu)^2 p_2^2 - 2(1 + \mu^2) p_1 p_2},$$

а условие гиперболичности (21) имеет вид

$$(1 - \mu)^2 p_2 > (1 + \mu)^2 p_1.$$

Отметим, что неравенство (22) выполняется автоматически.

Приведем дифференциальные уравнения (19) к инвариантам Римана. В работе [7] получено уравнение

$$\chi(k + j) = 1 - n + (k + j) \int_{p_1}^{p_2} \frac{f dp}{(p - j - k)^2} = 0, \quad (24)$$

определяющее скорости распространения характеристик кинетического уравнения (1). Представляют интерес решения, в которых выполняются неравенства $0 < n < 1$, $f \geq 0$. В этом случае характеристическое уравнение не имеет вещественных корней k вне интервала $[p_1 - j, p_2 - j]$. Но в случае гиперболичности уравнений, как показывают предыдущие результаты в специальном классе решений, имеются вещественные корни k_1 и k_2 внутри этого интервала: $p_1 - j < k_1 < k_2 < p_2 - j$. Чтобы придать смысл уравнению (24) в

интервале, где величина $p - j - k$ обращается в нуль, продолжим функцию χ в комплексную область и вычислим предельные значения функции комплексного аргумента $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскостей на отрезке $[p_1, p_2]$:

$$\chi^\pm(p) = 1 - n + p^2 \left(\frac{f_1}{p_1 - p} - \frac{f_2}{p_2 - p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f'_p dp'}{p' - p} \right) \pm \pi i p^2 f_p.$$

Как показывают непосредственные вычисления, в точках

$$p = k_{1,2} + j = \frac{1 - \mu b(p_2 - p_1)}{2} \left((1 + \mu)p_1 + (1 - \mu)p_2 \mp \sqrt{((1 + \mu)p_1 + (1 - \mu)p_2)^2 - \frac{4p_1 p_2}{1 - \mu b(p_2 - p_1)}} \right)$$

(k_i — корни квадратного уравнения (20)) обращаются в нуль вещественная и мнимая части комплексных функций $\chi^\pm(p)$. Отметим, что условие $\text{Im} \{ \chi(k_i + j) \} = 0$ равносильно равенству $f_p = 0$ при $p = k_i + j$. Следовательно, в указанных точках характеристическое уравнение (24) выполнено в смысле главного значения.

Инварианты Римана, отвечающие характеристическим значениям $p = k_i + j$ ($i = 1, 2$), согласно (8) определяются формулами

$$r_i = \frac{n - 1}{k_i + j} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{f dp}{p - j - k_i}.$$

С учетом (16), (17) после несложных вычислений находим

$$r_i = b - \cos \mu \pi \left(b + \frac{1 - \mu b(p_2 - p_1)}{k_i + j} \right) \left(\frac{k_i + j - p_1}{p_2 - j - k_i} \right)^\mu. \quad (25)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (19), описывающая специальный класс решений, приведена к инвариантам Римана

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + k_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0.$$

5. Простые волны. Простыми волнами системы интегродифференциальных уравнений (3), (4) будем называть решения вида $f(t, x, p) = \hat{f}(k(t, x), p)$, $p_i(t, x) = \hat{p}_i(k(t, x))$, где $k(t, x)$ — произвольная гладкая функция. Построим простую волну для специального класса решений. Эта задача сводится к отысканию решений системы (19) вида $p_i(t, x) = \hat{p}_i(k(t, x))$. Из общих свойств простых волн следует, что один из инвариантов Римана (25) в области волны сохраняет постоянное значение. Пусть волна движется с характеристической скоростью $k = k_1$ ($k_1 < k_2$), тогда инвариант Римана $r_2 = \text{const}$ в простой волне. Получение такого решения сводится к определению функций p_1, p_2 из конечных соотношений

$$r_2(p_1, p_2) = r_{20} = \text{const}, \quad k_1(p_1, p_2) = k \quad (26)$$

и интегрированию уравнения

$$k_t + k k_x = 0.$$

Для упрощения и наглядности выкладок рассмотрим специальный класс решений в случае $b = 0$ (система (23)) и построим автомодельную простую волну, что соответствует выбору $k(t, x) = x/t$. Введем обозначения

$$h = p_2 + p_1, \quad l = p_2 - p_1, \quad \xi = x/t. \quad (27)$$

С использованием (27) уравнения (26) преобразуются к виду

$$h - 3\mu l - \alpha = 2\xi, \quad \alpha = l\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu h/l}; \quad (28)$$

$$\frac{1}{h - \mu l + \alpha} \left(\frac{(1 - \mu)l + \alpha}{(1 + \mu)l - \alpha} \right)^\mu = -r'_{20} \quad \left(r'_{20} = \frac{r_{20}}{2 \cos \mu\pi} \right). \quad (29)$$

Формулы (28) позволяют выразить α и h как функции от l , ξ :

$$\alpha(l, \xi) = -\mu l + l\sqrt{1 - 4\mu^2 - 4\mu\xi/l}, \quad h(l, \xi) = 2\xi + 2\mu l + l\sqrt{1 - 4\mu^2 - 4\mu\xi/l}.$$

Тогда (29) является замыкающим соотношением для определения зависимости $l = l(\xi)$ из уравнения

$$F(l, \xi) = \left(\frac{(1 - \mu)l + \alpha(l, \xi)}{(1 + \mu)l - \alpha(l, \xi)} \right)^\mu + r'_{20}(\xi + \mu l + \alpha) = 0. \quad (30)$$

Приведем результаты анализа однозначной разрешимости уравнения $F(l, \xi) = 0$.

Для любого ξ из интервала (ξ_1, ξ_2) уравнение $F(\xi, l) = 0$ имеет единственный корень $l > 0$, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $0 < \mu \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $r'_{20} < 0$, $\xi_1 = \frac{1}{r'_{20}} \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)^{1-\mu}$, $\xi_2 = 0$;
- 2) $\frac{1}{\sqrt{5}} < \mu < 1$, $r'_{20} < 0$, $\xi_1 = \frac{1}{r'_{20}} \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)^{1-\mu}$, $\xi_2 = \frac{5\mu^2 - 1}{r'_{20}(1 - \mu^2)} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^\mu$;
- 3) $0 < \mu < \frac{1}{3}$, $r'_{20} < 0$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = -\frac{1}{2r'_{20}} \left(\frac{1 - 2\mu}{\mu} \right)^\mu$;
- 4) $\frac{1}{3} \leq \mu < \frac{1}{\sqrt{5}}$, $r'_{20} < 0$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = -\frac{1 - 5\mu^2}{r'_{20}(1 - \mu^2)} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^\mu$.

Приведенные условия гарантируют, что при $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ выполняются неравенства

$$F(l_1, \xi) > 0, \quad F(l_2, \xi) < 0, \quad F_l > 0, \quad (31)$$

позволяющие однозначно разрешить замыкающее уравнение (30) и определить функцию $l = l(\xi)$ в интервале (ξ_1, ξ_2) . Однако в явном виде записать зависимость $l = l(\xi)$ затруднительно, поэтому при численном решении уравнения $F(l, \xi) = 0$ будем использовать итерационный процесс Ньютона $l_{i+1}(\xi) = l_i(\xi) - F(l_i, \xi)/F'_l(l_i, \xi)$, сходимость которого гарантируется неравенствами (31).

По известным функциям $l(\xi)$, $h(\xi)$ находим величины $p_1(\xi) = (h - l)/2$ и $p_2(\xi) = (h + l)/2$. Согласно (17) функция распределения при $b = 0$ имеет вид

$$f = \frac{\sin \mu\pi}{\pi p} \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p} \right)^\mu.$$

В результате построено частное решение кинетических уравнений (3), (4).

В качестве примера рассмотрим автомодельную простую волну с параметрами $\mu = 0,4$, $b = 0$ и $r'_{20} = -(\mu/(1 - \mu))^{1-\mu} \approx -0,784$, определенную в интервале $\xi \in (a_1, a_2)$, примыкающую по характеристикам $\xi = a_i$ ($i = 1, 2$) к стационарным однородным по пространству распределениям $f_i(p) = \hat{f}(a_i, p)$. Решение типа простой волны, определяемое соотношениями (26), существует в любом интервале $(a_1, a_2) \subset (\xi_1, \xi_2)$, где

$$\xi_1 = \frac{1}{r'_{20}} \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)^{1-\mu} = -1, \quad \xi_2 = -\frac{1 - 5\mu^2}{r'_{20}(1 - \mu^2)} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^\mu \approx 0,2164.$$

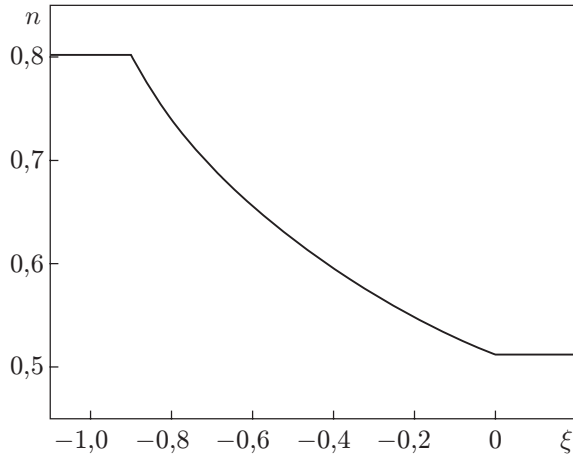


Рис. 2

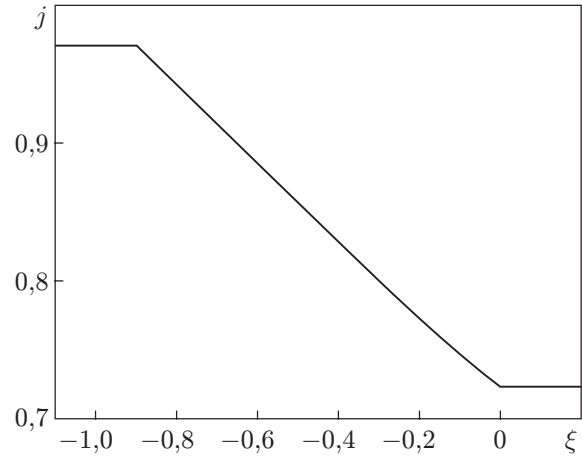


Рис. 3

Это следует из проведенного выше анализа однозначной разрешимости замыкающего уравнения (30) (см. условия 1) и 4), соответствующие данному выбору параметров μ, r'_{20}). Пусть для определенности $a_1 = -0,9, a_2 = 0$. Как следует из (16), (18), концентрация пузырьков в жидкости и первый момент функции распределения имеют вид $n = 1 - (p_1/p_2)^\mu, j = \mu(p_2 - p_1)$. Графики этих функций приведены на рис. 2, 3. При уменьшении автомобильной переменной ξ концентрация пузырьков n возрастает. При этом также увеличивается момент j , пропорциональный разности p_2 и p_1 , т. е. расширяется носитель функции распределения. Графики функции $f = \hat{f}(\xi, p)$ при фиксированных значениях ξ представлены на рис. 4. Штриховой и штрихпунктирной кривыми показаны распределения $f_i(p)$, к которым непрерывно примыкает простая волна $f = \hat{f}(\xi, p)$ по характеристикам $\xi = a_i$. Функция распределения $\hat{f}(\xi, p)$ обращается в нуль в точках $(\xi, p_1(\xi))$ и стремится к бесконечности при $(\xi, p) \rightarrow (\xi, p_2(\xi))$. Во внутренних точках интервала $(p_1(\xi), p_2(\xi))$ производная $\hat{f}_p(\xi, p)$ обращается в нуль (в точках $p_{\max} = k_1 + j(\xi) = \xi + j(\xi)$ и $p_{\min} = k_2 + j(\xi)$). Отметим, что $p_1(\xi) \rightarrow +0, n(\xi) \rightarrow 1 - 0$ при $\xi \rightarrow \xi_1 + 0$. Значения функции $\hat{f}(\xi, p)$ в точке $(\xi, p_{\max}(\xi))$ возрастают при убывании автомобильной переменной ξ .

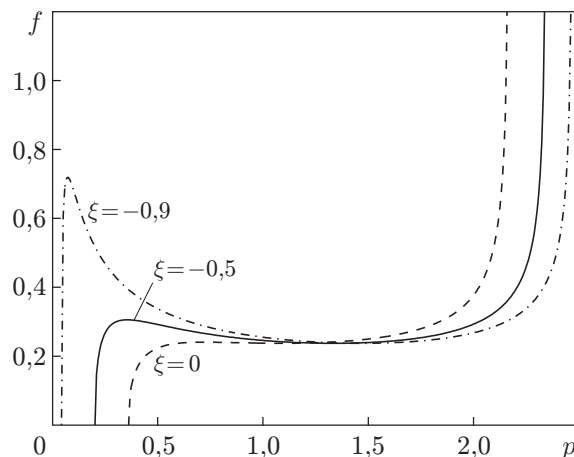


Рис. 4

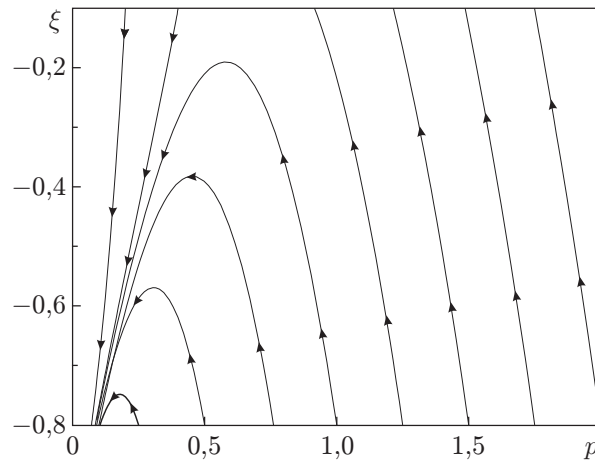


Рис. 5

Траектория движения частиц в системе координат, движущейся вместе с волной, определяется согласно (6) системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{p - j - \xi}{t}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{pj'(\xi)}{t}. \quad (32)$$

На рис. 5 представлены результаты численного интегрирования системы (32) в параметрическом виде на плоскости переменных (p, ξ) (стрелками показано направление движения частиц). Пузырьки, проникающие в область простой волны через фронт $\xi = a_1$ и имеющие небольшие импульсы ($p_1(a_1) < p < p_* \approx 1,25$), совершают поворотные движения в волне и возвращаются на линию $\xi = a_1$. Такое поведение частиц связано с тем, что величина $p - j - \xi$, определяющая знак производной $\xi'(t)$, в области простой волны меняет знак. Причем смена знака происходит на линии $p = p_{\max}(\xi) = \xi + j(\xi)$, в точках которой $\hat{f}_p = 0$. Построенное решение описывает движение с критическим слоем, поскольку в области простой волны на линии $p = p_{\max}(\xi)$ скорость движения частиц $p - j$ совпадает с локальной скоростью волны, движущейся со скоростью ξ . Пузырьки, имеющие при $\xi = a_1$ импульсы $p > p_*$, покидают область волны через фронт $\xi = a_2$. Частицы с импульсами $p_1(a_2) < p < j(a_2) + a_2$ (при $a_2 = 0$ $p_1(a_2) \approx 0,3612$, $j(a_2) \approx 0,7233$) проникают в область простой волны через характеристику $\xi = a_2$ и выходят через фронт $\xi = a_1$. Заметим, что все пузырьки, приходящие на линию $\xi = a_1$, имеют близкие значения импульсов $p \in (p_1(a_1), p_{\max}(a_1))$. В частности, при $a_1 = -0,9$ $p_1(a_1) \approx 0,0431$, $p_{\max}(a_1) \approx 0,0710$. Этим объясняется заметное увеличение значений функции распределения $\hat{f}(\xi, p)$ в точках $(\xi, p_{\max}(\xi))$ и смещение $p_{\max}(\xi)$ к $p = p_1(a_1)$ при $\xi \rightarrow a_1$ (см. рис. 4), а также возрастание концентрации пузырьков n в области простой волны при убывании переменной ξ .

Заключение. Для интегродифференциальных моделей, допускающих формулировку в инвариантах Римана, предложен метод построения специальных классов точных решений. Отыскание решений из специального класса существенно упрощается по сравнению с общим случаем и сводится к интегрированию систем дифференциальных уравнений. Этим методом получен новый широкий класс решений кинетической модели пузырьковой жидкости, предложенной Д. Руссо и П. Смерекой. Решения специального класса задаются системой двух дифференциальных уравнений, зависящих от двух произвольных параметров. В специальном классе изучены простые волны и проанализированы особенности решений. Более подробно рассмотрен случай автомодельной простой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biesheuvel A., van Wijngaarden L.** Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 301–318.
2. **Biesheuvel A., Gorissen W. C. M.** Void fraction disturbance in a uniform bubble liquid // J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. P. 211–231.
3. **Russo G., Smereka P.** Kinetic theory for bubble flow I: collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, N 2. P. 327–357.
4. **Тешуков В. М.** Кинетическая модель пузырькового течения // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 130–139.
5. **Teshukov V. M., Gavriluyuk S. L.** Kinetic model for the motion of compressible bubbles in perfect fluid // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 469–491.
6. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
7. **Тешуков В. М.** Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86–100.
8. **Чесноков А. А.** Точные решения одномерного кинетического уравнения Руссо — Смереки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 21–32.
9. **Teshukov V. M.** On the kinetic modelling of the concentration waves in dilute bubbly flows // Proc. of the 2nd Intern. symp. on two-phase flow modelling and experimentation, Rome, Italy, 23–26 May, 1999. Pisa: Edizioni ETS, 1999. P. 1101–1107.
10. **Прёсдорф З.** Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений. М.: Мир, 1979.
11. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
12. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 25/VIII 2004 г.
